А. Я. Белов–Канель, М. Л. Гервер

ПРЯМЫЕ НА КЛЕТЧАТОЙ БУМАГЕ И СВЕРХСЛОВА

Основные задачи

Пополнение класса S. Класс S_0 – последовательности Штурма. Определяя класс S, мы проводили на клетчатой бумаге прямые, не проходящие через узлы. Проведем теперь прямую L с *иррациональным* угловым коэффициентом k_L *через узел.* На всех пересечениях L с вертикалями и горизонталями напишем (как обычно) буквы v и h, а на узле поставим знак вопроса "?". Заменяя "?" на vh, получим сверхслово $W = W_L$; заменяя "?" на hv, получим сверхслово $\overline{W} = \overline{W}_L$.

3.1.1. Докажите, что полученные сверхслова тщательно перемешаны: $W, \overline{W} \in S_1$.

3.1.2. Докажите, что $W, \overline{W} \notin S$.

Добавим к S все полученные сверхслова W_L, $\overline{W}_L$ (для всех иррациональных угловых коэффициентов k_L) и так пополненный класс сверхслов обозначим через S_0. Сверхслова $W \in S_0$ называются *последовательностями или сверхсловами Штурма* в честь французского математика Жака Штурма (1803–1855).

3.1.3. Найдите все тщательно перемешанные сверхслова, не принадлежащие S_0.

Указание. Примените следующую конструкцию. Проведите прямую L с *рациональным* угловым коэффициентом k_L *через узел.* На всех пересечениях L с вертикалями и горизонталями напишите буквы v и h, а на узлах поставьте знаки вопроса "?". Замените некоторые "?" на vh, а остальные "?" – на hv. Выясните, при каких заменах получатся a) сверхслова $W \in S$, b) сверхслова $W \in S_1$, c) сверхслова $W \notin S_1$.

Исключительные сверхслова. Выращивание сверхслов. Рассмотрим три сверхслова: $W_0 = \{\dots vvv\dots\}$, $W_1 = \{\dots vvvhvvv\dots\}$, $W_2 = \{\dots vvvhhh\dots\}$.

3.2.1. Проверьте, что

$$W_0 \in S_0 \subset S_1, W_0 \notin S_2; \quad W_1 \in S_1, W_1 \in S_2, W_1 \notin S_0; \quad W_2 \in S_2, W_2 \notin S_0, W_2 \notin S_1$$

(W_0 является последовательностью Штурма и тщательно перемешанным сверхсловом, но не является сверхсловом с медленно растущим запасом подслов; W_1 является тщательно перемешанным сверхсловом, а также сверхсловом с медленно растущим запасом подслов, но не является последовательностью Штурма; W_2 является сверхсловом с медленно растущим запасом подслов, но не является ни последовательностью Штурма, ни тщательно перемешанным сверхсловом).

3.2.2. Верно ли, что в классе S_2 есть только одно сверхслово, – а именно, сверхслово W_2, – содержащее подслово $vvhh$?

Сверхслова W, которые (подобно W_0, W_1 и W_2) обладают одним из трех свойств

$$W \in S_0 \subset S_1, W \notin S_2, \quad W \in S_1, W \in S_2, W \notin S_0, \quad W \in S_2, W \notin S_0, W \notin S_1,$$

назовем *исключительными.* Рассмотрим две операции над сверхсловами: *правильная n-подстановка*: $hv^n \to v, hv^{n+1} \to h$ (каждая буква v заменяется словом hv^n, каждая буква h – словом hv^{n+1}, $n \geq 0$ – любое целое число) и *инверсия*: $h \rightleftarrows v$.

Последовательное применение конечного числа таких операций (к слову или сверхслову) назовем *выращиванием*, для разных n-подстановок n может быть разным.

3.3. Докажите, что любое исключительное сверхслово получается выращиванием из одного из W_j, $j = 0, 1, 2$.

Ряды Фарея[1], основные параллелограммы и исключительные $W \in S_2$.

Ряды Фарея F_j – это следующие упорядоченные по возрастанию множества несократимых дробей m/n со знаменателями $n \le j$:

$$F_1 = \{0, 1\}, \quad F_2 = \{0, \frac{1}{2}, 1\}, \quad F_3 = \{0, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, 1\},$$

$$F_4 = \{0, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, 1\}, \quad F_5 = \{0, \frac{1}{5}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{1}{2}, \frac{3}{5}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, 1\}, \ \ldots$$

Если числа 0 и 1 представить в виде $\dfrac{0}{1}$ и $\dfrac{1}{1}$, то для любых двух соседних дробей $\dfrac{x_1}{y_1} < \dfrac{x_2}{y_2}$ из любого F_j выполняется условие $x_2 y_1 - x_1 y_2 = 1$. Оно означает (проверьте), что площадь параллелограмма П, натянутого на векторы $\{x_1, y_1\}$ и $\{x_2, y_2\}$ равна 1.

Такие параллелограммы П с вершинами в точках решетки называют *основными.*

3.4.1. Сопоставим каждой паре рациональных чисел k_1, k_2, таких что

$$0 \le k_1 = \frac{x_1}{y_1} < k_2 = \frac{x_2}{y_2} \le 1,$$

a) параллелограмм П, натянутый на векторы $\{x_1, y_1\}$ и $\{x_2, y_2\}$,

b) пару периодических сверхслов $W_1 = W_{L_1}, W_2 = W_{L_2} \in S$ для прямых с угловыми коэффициентами k_1, k_2, а значит, и сверхслово W, составленное (как в задаче 2.7) из двух периодических частей W_1, W_2.

Докажите, что $W \in S_2$ тогда и только тогда, когда параллелограмм П – основной (или, что то же, когда k_1, k_2 – соседние дроби для некоторого F_j).

3.4.2. Объясните, почему все $W \in S_2$, сопоставленные в 3.4.1 основным параллелограммам, являются исключительными: не принадлежат S_1.

3.4.3. Докажите, что каждое исключительное сверхслово $W \in S_2$ связано с одним из основных параллелограммов П: двумя полупрямыми, параллельными сторонам П, можно перечеркнуть ленточный многоугольник M_w для любого слова $w \in W$ (только сначала, быть может, в w нужно сделать инверсию $v \rightleftarrows h$).

Каноническое представление периодических сверхслов W_L. Мы знаем, что для прямых с рациональными угловыми коэффициентами k_L сверхслова́ $W_L \in S_0$ – периодические. Если $k_L = m/n$, где m/n – несократимая дробь, то период P сверхслова W_L содержит m букв h и n букв v, но расставить эти буквы в правильном порядке при больших m и n не так уж просто. Ряды Фарея помогают найти следующее *каноническое* представление периода P в виде слова $f_{m,n}$ из m букв h и n букв v (назовем такие слова $(m,n)-$*фареями*): по определению $(0,1)-$фареем $f_{0,1}$ является однобуквенное слово v, $(1,1)-$фареем $f_{1,1}$ является двубуквенное слово vh. Пусть $(m,n)-$фареи уже определены для всех $m \le n < q$, тогда $(m,q)-$фареи получаются из $(i,j)-$фареев, $j < q$, следующей операцией *приписывания*: в ряду F_q у каждой дроби $\frac{m}{q}$ имеются две соседние дроби $\frac{x_1}{y_1}$ и $\frac{x_2}{y_2}$, для которых $\frac{m}{q}$ является *медиантой*: $x_1 + x_2 = m$, $y_1 + y_2 = q$. Знаменатели этих дробей меньше q, так что для них уже определены f_{x_1,y_1} и f_{x_2,y_2}. Тогда $f_{m,j}$ получается приписыванием к слову f_{x_1,y_1} слова f_{x_2,y_2}. Примеры: $f_{1,2} = f_{0,1} \cup f_{1,1} = vvh$, $f_{1,3} = f_{0,1} \cup f_{1,2} = vvvh$, $f_{2,3} = f_{1,2} \cup f_{1,1} = vvhvh$, $f_{1,4} = f_{0,1} \cup f_{0,3} = vvvvh$, $f_{3,4} = f_{2,3} \cup f_{1,1} = vvhvhvh$.

[1]Эти ряды придумал в 1816 г. британский геолог Джон Фарей (1766-1826).

3.5.1. Проверьте, что

$f_{1,5} = vvvvvh$, $f_{2,5} = vvvhvvh$, $f_{3,5} = vvhvvhvh$, $f_{4,5} = vvhvhvhvh$.

3.5.2. Докажите, что $(m,n)-$фареи определены корректно: при $k_L = m/n$ сверхслова $W = W_L$, действительно, имеют период $P = f_{m,n}$.

3.5.3. Пусть $\frac{x_1}{y_1} < \frac{x_2}{y_2}$ – соседние дроби для некоторого ряда F_j и $y_1 < y_2$. Докажите, что тогда f_{x_1,y_1} является подсловом f_{x_2,y_2} (если $y_1 > y_2$, то f_{x_2,y_2} – подслово f_{x_1,y_1}).

Золотое сечение. *Золотым сечением* называется такое разбиение отрезка на два отрезка, при котором отношение длины *всего* отрезка к длине *большего* равно отношению длины *большего* отрезка к длине *меньшего* ($\frac{\sqrt{5}+1}{2} : 1 = 1 : \frac{\sqrt{5}-1}{2}$).

3.6.1. Проведем через начало координат луч ℓ с угловым коэффициентом $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

На всех пересечениях ℓ с вертикалями и горизонталями напишем буквы v и h. Получим *половину сверхслова* $w_\ell = \{v\,v\,h\,v\,v\,h\,v\,h\,\ldots\}$ (последовательность w_ℓ, бесконечную вправо). Докажите, что w_ℓ можно построить так:

В трехбуквенном слове $v\,v\,h$ сделаем замену

$$v\,v\,h \to v, \;\; v\,h \to h.$$

(каждая буква v заменяется словом $v\,v\,h$, каждая буква h – словом $v\,h$). В полученном слове $v\,v\,h\,v\,v\,h\,v\,h$ сделаем ту же замену: $v\,v\,h\,v\,v\,h\,v\,h\;v\,v\,h\,v\,v\,h\,v\,h\;v\,v\,h\,v\,h$ и т.д.

Замечание. Можно начать даже не с трехбуквенного слова $v\,v\,h$, а с однобуквенного слова v и, повторяя замену $v\,v\,h \to v$, $v\,h \to h$ *бесконечно много раз* (сравним с 3.3), вырастить w_ℓ из одной буквы v.

3.6.2. Сформулируйте и решите аналогичную задачу для луча ℓ с угловым коэффициентом $k_\ell = \sqrt{2} - 1$.

3.6.3. Обобщите результат на угловые коэффициенты k_ℓ, равные периодическим цепным дробям $[a_1, \ldots, a_n \ldots]$, $[[b_1, \ldots, b_n \ldots]]$ с периодами $\{a_1, \ldots, a_n\}$, $\{b_1, \ldots, b_n\}$.

4. Последовательности Штурма. Разобьем окружность C длины 1 на две дуги A и B с длинами α и β, $\alpha + \beta = 1$. Отметив на окружности начальную точку P_0, построим последовательность $P_0, P_1, P_2, \ldots$, в которой каждая точка P_k получается из P_{k-1} сдвигом на β вдоль окружности C, и последовательность $P_0, P_{-1}, P_{-2}, \ldots$, где каждая точка P_{-k} получается из $P_{-(k-1)}$ сдвигом на $-\beta$ вдоль окружности C.

Иными словами, P_n – сдвиг P_0 на $n\beta$ вдоль C, $n = \pm 1, \pm 2, \ldots, \pm k, \ldots$.

Точкам P_n сопоставим последовательность $W = \{w_n\}$ из букв a и b, в которой

$$w_n = a, \text{ если } P_n \in A, \text{ и } w_n = b, \text{ если } P_n \in B, \;\; n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots.$$

4.1. Докажите, что класс последовательностей $W = \{w_n\}$ в точности совпадает (после замены a и b на v и h) с классом S_0 сверхслов Штурма $W = W_L$.

Указание 1. Нужно считать, что каждая из дуг A и B *полуоткрыта* – содержит один из концов и не содержит другого.

Указание 2. Решить задачу 4.1 помогут следующие три (более простые) задачи.

4.1.1. Какие из подслов aa, ab, ba, bb длины 2 может содержать W?

4.1.2. Может ли W содержать подслово abb длины 3?

4.1.3. Пусть $0 \le s, t \le 1$, $w_n = [sn + t] - [s(n-1) + t]$, где квадратные скобки обозначают целую часть числа.

Проверьте, что w_n могут принимать лишь 2 значения: 0 и 1.

Верно ли, что при любых s и t из отрезка $[0,1]$ последовательность $W = \{w_n\}$ является и последовательностью, сопоставленной точкам P_n (если заменить в ней 0 на a и 1 на b), и сверхсловом из класса S_0 (если заменить 0 на v и 1 на h)?

4.2. Опишите в терминах α, β, и P_0 последовательности Штурма $W \in S_0$, не принадлежащие классу S.

4.3. Докажите, что если число β иррационально, то множество точек P_n *всюду плотно* и *равномерно распределено* на окружности C. Это означает следующее.

Возьмем на окружности C любую дугу d длины δ, возьмем в последовательности $\{P_n\}$ любые N точек подряд и посмотрим, сколько из них попало на дугу d. Тогда отношение числа попаданий к числу N стремится к δ при $N \to \infty$.

Эквивалентность сверхслов. Назовем два сверхслова *эквивалентными*, если у них в точности совпадают множества всех подслов.

4.4. Докажите, что при фиксированных α и β, $\alpha + \beta = 1$, и при разных P_0 последовательности Штурма $W = \{w_n\}$ эквивалентны.

4.5. Докажите, что при иррациональных α и β, $\alpha + \beta = 1$, последовательности Штурма $W = \{w_n\}$ являются *квазипериодическими*: в них любое их подслово встречается бесконечно много раз.

4.6. Докажите, что при фиксированных α и β, $\alpha + \beta = 1$, и при $P_0^* = P_0 + k\beta$ (k – целое) последовательности Штурма W, W^* получаются друг из друга сдвигом.

4.7. Докажите, что при фиксированных иррациональных α и β, $\alpha + \beta = 1$, и при $P_0^* \neq P_0 + k\beta$ (k – целое) последовательности Штурма W, W^* не совпадают и не получаются друг из друга сдвигом.

5. Саморазворачивающиеся сверхслова.

5.1. Рассмотрим две последовательности слов U_k и V_k из букв a и b:

$$U_0 = a,\ V_0 = b \ \text{ и } \ U_k = U_{k-1}^2 V_{k-1},\ V_k = U_{k-1} V_{k-1} \text{ при всех } k \geq 1,$$

последняя формула означает, что для получения слова U_k нужно два раза подряд выписать слово U_{k-1}, а вслед за этим выписать слово V_{k-1}; для получения слова V_k нужно приписать слово V_{k-1} к слову U_{k-1}. Тем самым, для каждого $k \geq 1$ слово U_{k-1} является началом слова U_k, а слово V_{k-1} является концом слова V_k:

$$U_0 = a,\ U_1 = aab,\ U_2 = aab\ aab\ ab,\ \ldots \quad V_0 = b,\ V_1 = ab,\ V_2 = aab\ ab,\ \ldots$$

и поэтому слова $W_k = V_k U_k$ образуют вложенную последовательность и, значит, *саморазворачиваются* в сверхслово W, являющееся их объединением:

$$W_0 = b\,a \subset W_1 = ab\,aab \subset W_2 = aab\,ab\ aab\,aab\,ab \subset \cdots \subset W = \ldots aab\,ab\ aab\,aab\,ab \ldots.$$

Проверьте, что построенное сверхслово W можно разбить на слова aab и ab:

$$W = \ldots aab\,aab\,ab\,aab\,ab\ aab\,aab\,ab\,aab\,aab\,ab\,aab\,ab \ldots.$$

5.1.1. Докажите, что это сверхслово W непериодично.

5.1.2. Заменим в сверхслове W каждое слово aab буквой v, а затем каждое слово ab – буквой h: $W = \ldots v\,v\,h\,v\,h\ v\,v\,h\,v\,v\,h\,v\,h \ldots$

Верно ли, что замены: $vvh \to v$, а затем $vh \to h$ переводят W в себя?

5.1.3. Верно ли, что полученное сверхслово W эквивалентно некоторому сверхслову из класса S, т.е. существует такая прямая L, что $W \sim W_L$?

Если да, то чему равен ее угловой коэффициент k_L?

5.2. Возьмем любую последовательность натуральных чисел $\{n_k\}$ и сопоставим ей две последовательности слов U_k и V_k, в которых

$$U_0 = a,\ V_0 = b,\ U_1 = U_0^{n_1+1}V_0,\ V_1 = U_0^{n_1}V_0,\ U_2 = U_1^{n_2+1}V_1,\ V_2 = U_1^{n_2}V_1,\ \text{и вообще}$$

$$U_k = U_{k-1}^{n_k+1}V_{k-1},\ V_k = U_{k-1}^{n_k}V_{k-1} \text{ при всех } k \geq 1.$$

Докажите, что (как в 5.1) слова $W_k = V_kU_k$, разрастаясь "из середины" влево и вправо, образуют бесконечное в обе стороны саморазворачивающееся сверхслово W.

5.2.1. В задаче 5.1, которая является частным случаем задачи 5.2, все $n_k \equiv 1$.

Рассмотрим еще один частный случай: проверьте, что при $n_k \equiv 2$ построенное сверхслово W можно разбить на слова $a^3b = aaab$ и $a^2b = aab$:

$$W = \dots aaab\, aaab\, aab\ aaab\, aaab\, aaab\, aab \dots.$$

Докажите, что это сверхслово W непериодично.

Заменим в W каждое слово $aaab$ буквой v, а затем каждое слово aab – буквой h:

$$W = \dots v\, v\, h\ \ v\, v\, v\, h \dots$$

Верно ли, что замены: $vvvh \to v$, а затем $vvh \to h$ переводят W в себя?

Верно ли, что полученное сверхслово W эквивалентно некоторому сверхслову из класса S, т.е. существует такая прямая L, что $W \sim W_L$?

Если да, то чему равен ее угловой коэффициент k_L и каково уравнение L?

5.2.2. Верно ли, что для любой последовательности $\{n_k\}$

a) W тщательно перемешано,

b) $T_W(n) = n + 1$ при всех n,

c) W является последовательностью Штурма?

E-mail address: kanel@mccme.ru M.L@gerver.mccme.ru