А. Я. Белов–Канель, М. Л. Гервер

ПРЯМЫЕ НА КЛЕТЧАТОЙ БУМАГЕ И СВЕРХСЛОВА

Проведем прямую L на клетчатой бумаге так, чтобы она не проходила через узлы. На всех пересечениях L с вертикалями и горизонталями напишем буквы v и h.[1]

На конечных отрезках L появятся тогда *слова* из букв v и h, а на всей прямой возникнет бесконечная в обе стороны последовательность W_L из этих букв.

Такие последовательности W_L принято называть *сверхсловами.*

Прямые L считаем *ориентированными*: на L указано направление. Если сменить его на противоположное, то и сверхслово W_L прочитается в обратном направлении. Например, $\{\dots vvh\,vvh\,vh\dots\}$ заменится на $\{\dots hv\,hvv\,hvv\dots\}$.

Спрашивается: Чем W_L выделены среди всех сверхслов, которые можно составить из двух букв? И как свойства W_L связаны с геометрическими свойствами прямых L и с арифметическими свойствами чисел, характеризующих эти прямые?

Анонс: вскоре мы познакомим вас с процедурой, связывающей сверхслово W_L с разложением углового коэффициента k_L прямой L в цепную дробь.

Что такое цепные дроби, объясняют следующие примеры:

$$\frac{11}{25}=\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{1+\frac{1}{2}}}},\quad \frac{5}{8}=\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\frac{1}{2}}}},\quad \frac{\sqrt{5}-1}{2}=\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\dots}}},$$

$$\frac{8}{5}=1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\frac{1}{2}}},\quad \frac{\sqrt{5}+1}{2}=1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\dots}}},\quad \sqrt{2}+1=2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\dots}}}.$$

Подробнее о цепных дробях и об их геометрической интерпретации – алгоритме *вытягивания носов* – чуть погодя. А пока обратим внимание на вопрос: интересно, если угловой коэффициент k_L равен одной из выписанных *периодических* цепных дробей, то как ее периодичность проявляется в строении W_L?

Терминология. Следующие термины помогут нам говорить точно и коротко. *Слово* – это конечная, а *сверхслово* – бесконечная в обе стороны последовательность символов. *Подслово* – это слово, являющееся частью другого слова или сверхслова. *Длина слова* – число символов в нем. Примеры: vv, vh, aba и 001 – некоторые подслова длины 2 и 3 в сверхсловах $\{\dots vvhvvhv\dots\}$, $\{\dots aabaaba\dots\}$ и $\{\dots 0010010\dots\}$.

Класс S. Класс сверхслов $W=W_L$, соответствующих всем ориентированным прямым L на клетчатой бумаге, не проходящим через узлы, обозначим через S.

Наряду с S мы рассмотрим еще несколько классов сверхслов: тщательно перемешанные сверхслова, сверхслова с медленно растущим запасом подслов и другие.

Сравнивая их с классом S, мы установим ряд красивых свойств сверхслов W_L.

Желающих ждут дополнительные вопросы, в том числе, нерешенные.

[1] На пересечениях с вертикалями – v – vertical, на пересечениях с горизонталями – h – horizontal.

Подготовительные задачи

Некоторые подготовительные задачи – совсем простые. Другие – сложнее.

Совет: если какая-то задача долго не получается, пропустите ее и идите дальше, а потом, когда много задач будет решено, вернитесь к ней.

0.1. Придумайте сверхслово W из букв v, h, заведомо не принадлежащее классу S.

0.2.1. Для каких прямых L сверхслова W_L из S – периодические?

0.2.2. Для каких L буквы v встречаются в сверхсловах $W_L \in S$ чаще, чем h?

0.2.3. Сделаем замену $h \rightleftarrows v$ в произвольном сверхслове W_L из S. Останется ли получившееся сверхслово W' в классе S? То есть всегда ли $W' = W_{L'}$ для некоторой прямой L'? Если да, то как прямая L' соотносится с L?

Ленточные многоугольники M_w. Произвольно фиксируем клетку K_0 на клетчатой бумаге и любому слову w, состоящему из n букв w_j:

$$w = \{w_1, \dots, w_n\}, \text{ каждая буква } w_j \text{ – это либо } v, \text{ либо } h,$$

сопоставим многоугольник M_w, состоящий из $n+1$ клеток $K_0, K_1, \dots, K_n$, действуя по следующим правилам. Клетка K_1 имеет общую сторону с K_0 и примыкает к ней сверху, если $w_1 = h$, или справа, если $w_1 = v$. Вообще, если j–я буква $w_j = h$, то K_j примыкает к K_{j-1} сверху (их общая сторона *горизонтальна*), а если буква $w_j = v$, то K_j примыкает к K_{j-1} справа (их общая сторона *вертикальна*).

Многоугольники M_w будем называть *ленточными.* M_w лежит в нескольких последовательных строках на клетчатой бумаге. В каждой такой строке клетки, принадлежащие M_w, образуют *ленту* (прямоугольник $1 \times \lambda$, $\lambda \geq 1$; числа $\lambda = \lambda_s$ зависят от номера строки). Для лент в двух соседних строках *самая правая* клетка нижней ленты лежит под *самой левой* клеткой верхней ленты.

Между ленточными многоугольниками M_w и словами w из букв v и h имеется взаимно однозначное соответствие: не только M_w по w, но и w по M_w определяется однозначно. Поэтому слова w можно *отождествить* с многоугольниками M_w и трактовать свойства слов и сверхслов геометрически – как свойства ленточных многоугольников.

Разрешенные и запрещенные слова. Слово w, составленное из букв v и h, назовем *разрешенным*, если оно является подсловом некоторого сверхслова $W_L \in S$, и назовем *запрещенным*, если никакое $W_L \in S$ не содержит w в качестве подслова.

Геометрический смысл данных определений: если w – *разрешенное* слово, то многоугольник M_w (все его клетки) можно перечеркнуть некоторой прямой L, не проходящей через вершины клеток; если w – *запрещенное* слово, то этого сделать нельзя.

0.3. Докажите, что $\{h\,v\,v\,v\,h\,v\,v\,h\}$ – разрешенное слово, а значит, существует сверхслово $W = \{\dots h\,v\,v\,v\,h\,v\,v\,h \dots\} \in S$.

0.3.1. Сколько букв v может стоять в W между *соседними* буквами h, т.е. всеми такими буквами h, что между ними нет других h? Верен ли ответ: *либо* 2, *либо* 3?

0.3.2. Перечислите все различные подслова длины 2, 3 и 4 в W.

0.3.3. Укажите какие-нибудь две прямые L и L^*, для которых W_L и W_{L^*} содержат подслово $hvvvhvvh$ из таких же восьми букв, как в 0.3.

0.3.4. Обязательно ли совпадают в W_L и W_{L^*} – или для каких-то L и L^* могут и не совпасть – множества всех подслов a) длины 5? b) длины 6? c) длины 7?

0.4.1. Может ли случиться, что все подслова некоторого сверхслова W являются разрешенными словами, но само $W \notin S$?

0.4.2. Могут ли совпасть W_L и W_{L^*}, если L и L^* не совпадают?

0.4.3. Могут ли совпасть множества всех подслов в сверхсловах W_L и W_{L^*}, если сами W_L и W_{L^*} не совпадают?

0.5.1. Сотрем по одному v перед каждым h в $W \in S$ из 0.3.

Останется ли получившееся сверхслово $\{\dots hvvhvh \dots\}$ в классе S?

0.5.2. Сотрем по одному v перед каждым h в произвольном сверхслове W из S.

Останется ли получившееся сверхслово в классе S?

0.6. Впишем по одному v перед каждым h в произвольном сверхслове W из S.

Останется ли получившееся сверхслово в классе S?

Классификация сверхслов $W \in S$. Отнесем $W = W_L \in S$ к S^h, если прямая L – *пологая*: образует угол меньше $\pi/4$ с горизонталью; если же L – *крутая* (образует угол меньше $\pi/4$ с вертикалью), отнесем $W = W_L \in S$ к S^v. Сверхслово $\{\dots v\,h\,v\,h \dots\}$, для которого оба угла равны $\pi/4$, выделим в отдельный подкласс E.

Отнесем сверхслово $W \in S^h$ к S^h_n, $n = 1, 2, 3, \dots$, в двух случаях:

a) если в W между любыми двумя соседними буквами h стоят n букв v,

b) если в W между любыми двумя соседними h стоят либо $n+1$, либо n букв v.

Аналогично, отнесем $W \in S^v$ к S^v_n, $n = 1, 2, 3, \dots$, если между любыми двумя соседними буквами v в W стоят a) n букв h, b) либо $n+1$, либо n букв h.

Сверхслова $\{\dots v\,v\,v\, \dots\}$ и $\{\dots h\,h\,h \dots\}$ выделим в подклассы S^h_∞ и S^v_∞.

0.7. Докажите, что объединение всех S^h_n, $1 \le n \le \infty$, совпадает с S^h, а объединение всех S^v_n, $1 \le n \le \infty$, совпадает с S^v.

Эквивалентная формулировка: Докажите, что каждое сверхслово $W \in S$ принадлежит ровно одному подклассу:

$$\text{либо } E,\ \text{либо } S^h_n \text{ или } S^v_n,\ 1 \le n < \infty,\ \text{либо } S^h_\infty \text{ или } S^v_\infty.$$

0.7.1. Дайте геометрическую интерпретацию 0.7 в терминах ленточных многоугольников: какими могут быть длины λ_s лент многоугольника M_w для разрешенного слова w, являющегося подсловом сверхсло́ва $W \in S^h$?

0.7.2. Придумайте периодическое запрещенное слово w, для которого в многоугольнике M_w дли́ны лент λ_s принимают два значения: 2 и 3.

0.8. Перестройки сверхслова W, цепочки из чисел a_j и цепные дроби.

Возьмем произвольное сверхслово $W \in S$ и начнем его *перестраивать*, последовательно превращая в сверхслова W_j, $j \ge 1$: $W \to W_1 \to W_2 \to \dots$, а попутно образуем *цепочку из чисел* a_j по следующим правилам.

Любое сверхслово W из S принадлежит либо E, либо S^h, либо S^v. Пусть для определенности $W \in S^h$. Тогда, согласно 0.7, $W \in S^h_n$ при некотором n, $1 \le n \le \infty$.

Если $n = \infty$ (если $W \in S^h_\infty$), никакое построение не производится.

Если $n = a_1 < \infty$, стираем по a_1 букв v перед каждым h и полученное сверхслово называем W_1. Ясно, что W_1 принадлежит S^v (почему?), а следовательно, принадлежит S^v_n при некотором n.

Если $n = \infty$, построение обрывается.

Если $n = a_2 < \infty$, стираем по a_2 букв h перед каждым v. Получаем W_2 и т.д.

0.8.1. Пусть угловой коэффициент прямой L равен *конечной* цепной дроби, например, одной из следующих:

$$\frac{11}{25}=\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{1+\frac{1}{2}}}},\quad \frac{7}{24}=\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{3}}},\quad \frac{4}{19}=\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{3}}},\quad \frac{5}{8}=\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\frac{1}{2}}}}.$$

Для каждой из этих дробей найдите цепочку $a_1,\ a_2,\ \ldots,a_n$ для сверхслова $W=W_L$, сопоставленного прямой L.

0.8.2. Из 0.8.1. следует: для некоторых L перестройки сверхслова $W=W_L$ могут оборваться через конечное число шагов: $W\to W_1\to W_2\to\cdots\to W_n$.

Опишите *все* такие L и точно сформулируйте для них, как цепочки $a_1,\ a_2,\ \ldots,a_n$ связаны с представлением углового коэффициента k_L в виде цепной дроби.

Мы скоро вернемся к изучению взаимосвязи цепных дробей и цепочек a_j, но перед этим исследуем некоторые свойства сверхслов.

1. Класс S_1 – тщательно перемешанные слова и сверхслова. В следующих задачах – для разнообразия – считаем, что сверхслова W составлены из букв a и b. При сопоставлении со сверхсловами из класса S можно сделать замену $a\rightleftarrows h,\ b\rightleftarrows v$.

Пусть слово (или сверхслово) W таково, что для любых двух его подслов U и V одинаковой длины число букв a в U и в V различается не более, чем на 1 (число букв b различается в них тогда тоже максимум на 1). Назовем такие W *тщательно перемешанными* словами (сверхсловами) и отнесем их к классу S_1.

1.1. Приведите пример тщательно перемешанного сверхслова.

Наша ближайшая цель – разобраться с двумя вопросоми:

I. Верно ли, что каждое разрешенное слово являются тщательно перемешанным?

II. Верно ли, что $S\subset S_1$?

Сделать это нам помогут следующие упражнения и задачи.

1.2.1. Верно ли, что любое разрешенное слово является подсловом для бесконечного множества различных сверхслов W_L из S?

1.2.2. Верно ли, что любое разрешенное слово является подсловом сверхсло́ва W_L из S для прямой L с рациональным угловым коэффициентом k_L?

1.2.3. Верно ли, что сверхслово W является тщательно перемешанным, если каждое его подслово является тщательно перемешанным?

1.3. Пусть слово (или сверхслово) W можно разбить на подслова двух типов:

ab^n (за буквой a следуют n букв b) и ab^{n+1} (за буквой a следуют $n+1$ букв b).

Произведем операцию *переименования*: каждое подслово ab^{n+1} заменим буквой b, а каждое подслово ab^n – буквой a. Слово (или сверхслово), получившееся из W в результате переименования обозначим через W^*.

1.3.1. Верно ли, что при переименовании разрешенные слова переходят в разрешенные, а запрещенные – в запрещенные? Что происходит при переименовании с ленточными многоугольниками?

Указание. Введите на листе клетчатой бумаги координаты x,y и рассмотрите отображение F, переводящее точку $\{x,y\}$ в $\{x-ny,-x+(n+1)y\}$.

1.3.2. Верно ли, что при переименовании

слова $W\in S_1$ переходят в $W^*\in S_1$, а слова $W\notin S_1$ – в $W^*\notin S_1$?

1.4.1. Докажите, что каждое разрешенное слово тщательно перемешано.

1.4.2. Докажите, что любое сверхслово $W \in S$ является тщательно перемешанным.

1.4.3. Приведите пример тщательно перемешанного сверхслова $W \notin S$.

1.5. Верно ли, что в алфавите из букв a и b для любых натуральных m и n существует такое периодическое тщательно перемешанное сверхслово, что в его периоде встречается m букв a и n букв b?

1.6.1. Существует ли такое тщательно перемешанное конечное слово, которое не может являться подсловом никакого тщательно перемешанного сверхслова?

1.6.2. Верно ли, что любое тщательно перемешанное слово является разрешенным?

1.7. Найдите все сверхслова W, такие что $W \in S_1$ и $W \notin S$.

1.8. Обобщите определение тщательно перемешанности на алфавиты из нескольких букв. Верно ли, что ни в каком тщательно перемешанном сверхслове из букв a, b, c нет подслова aa?

2. Класс S_2 – сверхслова с медленно растущим запасом подслов.

2.1. Пусть W – произвольное сверхслово из двух букв и пусть $T_W(n)$ – число различных подслов длины n в W. Каково максимально возможное значение $T_W(n)$?

2.2. Докажите, что если $T_W(k) = T_W(k+1)$ при некотором k, то сверхслово W периодично с периодом длины $T_W(k)$.

2.3. Пусть $T_W(k) < k+1$ при некотором k (сравните с задачей 2.1). Докажите, что тогда сверхслово W периодично.

Итак, минимум $T_W(n)$ в непериодическом сверхслове W есть $n+1$. Если этот минимум достигается (см. задачу 2.4.2) и $T_W(k) = k+1$ для всех k, назовем W *сверхсловом с медленно растущим* (при увеличении k) *запасом подслов* и отнесем такие W к классу S_2.

2.4. Докажите, что для всех сверхслов $W \in S$ выполняется неравенство

$$T_W(k) \leq k+1 \text{ для всех } k.$$

2.4.1. Опишите функцию $T_W(k)$ для сверхслова $W = W_L$ в случае, когда угловой коэффициент k_L прямой L – рациональное число m/n (где m и n взаимно просты).

2.4.2. Пусть k_L – иррациональное число. Докажите, что тогда $W = W_L$ удовлетворяет условию $T_W(k) = k+1$ при всех k, т.е. $W \in S_2$.

2.4.3. Приведите пример сверхслова W с медленно растущим запасом подслов, не принадлежащего ни S, ни S_1.

2.4.4. Найдите все сверхслова $W \in S_2$, такие что $W \in S_1$ и $W \notin S$.

Класс S_2. Особые подслова, ветвящиеся влево или вправо.

Множество всех подслов длины n для сверхслова W обозначим через $\Pi_W(n)$.

2.5.1. Возьмем любое сверхслово $W \in S_2$. В каждом из $n+1$ различных подслов длины n, принадлежащих $\Pi_W(n)$, сотрем самую левую букву. Докажите, что среди получившиеся $n+1$ подслов длины $n-1$ встретится каждое подслово $U \in \Pi_W(n-1)$.

Итак, все подслова $U \in \Pi_W(n-1)$, кроме одного, встретятся по разу, а одно – назовем его *особым* и *ветвящимся влево* – встретится 2 раза.

Смысл выбранного названия: к подслову U слева можно приписать и v, и h, а к неособым подсловам – *либо v, либо h*.

Докажите, что особые *ветвящиеся влево* подслова U_n длины n образуют вложенную последовательность: $U_1 \subset U_2 \subset \dots \subset U_n \subset U_{n+1} \subset \dots$ (иначе говоря, при каждом n особое U_n получается, если стереть самую правую букву U_{n+1}).

2.5.2. По аналогии с 4.1.1. определите *особые* подсловá V_n сверхслóва $W \in S_2$, *ветвящиеся вправо.*

Докажите, что особые *ветвящиеся вправо* подслова V_n длины n тоже образуют вложенную последовательность: $\dots \supset V_{n+1} \supset V_n \supset \dots \supset V_2 \supset V_1$.

2.5.3. Приведите пример сверхслова $W \in S_2$, для которого $U_n \neq V_n$ при всех n.

2.5.4. Приведите пример сверхслова $W \in S_2$, для которого $U_n = V_n$ для бесконечной последовательности индексов n: $U_{n_k} = V_{n_k},\ k = 1, 2, 3, \dots$.

2.6.1. Верно ли, что $W \in S_2$ тогда и только тогда, когда при любом n в W есть ровно одно подслово U длины n, ветвящиеся влево?

2.6.2. Верно ли, что $W \in S_2$ тогда и только тогда, когда при любом n в W есть ровно одно подслово V длины n, ветвящиеся вправо?

2.7. Какие из следующих сверхслов, составленных из двух периодических частей, принадлежат S_2?

$\{\dots vvv, hv^n hv^n hv^n \dots\}$, $n \geq 0$; $\{\dots hv^2hv^2hv^2, hv^5hv^5hv^5 \dots\}$;

$\{\dots hv\, hv\, hv\, hv,\ hvhvhvv\, hvhvhvv\, hvhvhvv \dots\}$;

$\{\dots hv\, hv\, hv\, hv,\ hvhvvhvv\, hvhvvhvv\, hvhvvhvv \dots\}$.

2.8.1. Найдите все сверхслова $W \in S_2$, такие что $W \notin S_1$.

2.8.2. Пусть $W \in S_2$, $W \notin S_1$. Докажите, что тогда для любого подслова $w \in W$ ленточный многоугольник M_w можно перечеркнуть двумя полупрямыми с рациональными угловыми коэффициентами (возможно, зависящими от w).

2.8.3. Пусть $W \in S_2$, $W \notin S_1$. Верно ли, что тогда найдутся такие 2 рациональных числа k_1 и k_2, что для любого подслова $w \in W$ ленточный многоугольник M_w можно перечеркнуть двумя полупрямыми с угловыми коэффициентами k_1 и k_2? (Числа k_1 и k_2 – одни и те же для всех w).

Подготовительные задачи о цепных дробях Лагранжа и Хирцебруха

Эти задачи рекомендуется решать параллельно с задачами о сверхсловах.

А. Геометрия цепных дробей. Возьмем прямоугольник П со сторонами p, q, где p и q – целые взаимно простые числа и $1 < p < q$. Приложим к меньшей стороне П и расположим внутри П (см. рисунок) столько квадратов со стороной p, сколько их там уместится; число таких квадратов обозначим через a_1; тем самым,

$$a_1 p < q < (a_1 + 1)p. \tag{1}$$

Если исключить из П эти a_1 квадратов, то останется прямоугольник Π_1 со сторонами $p_1 = q - a_1 p,\ q_1 = p$, причем, ввиду (1), $1 \leq p_1 < q_1$.

При $p_1 = 1$ положим $a_2 = q_1 = p$ и оборвем построение. При $p_1 < 1$ поступим с Π_1 так же, как с П: к меньшей стороне Π_1 приложим столько квадратов со стороной p_1, сколько уместится внутри Π_1; число их обозначим через a_2. Исключив из Π_1 эти a_2 квадратов, получим прямоугольник Π_2 со сторонами $p_2 = q_1 - a_2 p_1,\ q_2 = p_1$ и т.д. Построение обрывается на $k-$м шагу, если $p_k = 1$; в этом случае $a_k = q_k = p_{k-1} > 1$.

A0.1. Докажите, что

$$\frac{p}{q} = \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \dots + \cfrac{1}{a_k}}}}. \tag{2}$$

Числа a_j в (2) называются *неполными частными* или *элементами* цепной дроби. Все a_j в (2), кроме a_n, могут быть любыми натуральными числами, а $a_n > 1$.

A0.1. Можно рассматривать не только конечные, но и бесконечные цепные дроби с любыми целыми a_0 и любыми натуральными $a_n,\ n > 0$; такую бесконечную цепную дробь c следует понимать как *предел* конечных цепных дробей c_k при $k \to \infty$:

$$c = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \dots}}} = \lim c_k, \quad c_k = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \dots + \cfrac{1}{a_k}}}}.$$

Докажите, что $\lim c_k$ существует при любымх целых a_0 и натуральных $a_n,\ n > 0$.

A1.1. Выше дана геометрическая интерпретация неполных частных $a_1, \dots, a_k$ для разложения рационального числа p/q в цепную дробь. Дайте аналогичную геометрическую интерпретацию для разложения иррационального числа β в цепную дробь.

A1.2. Объясните геометрически, почему при $\beta = \sqrt{2} + 1$ или при $\beta = (\sqrt{5} - 1)/2$ получаются *периодические* цепные дроби.

A1.3. Докажите, что число β тогда и только разлагается в *периодическую* цепную дробь, когда β является *квадратичной иррациональностью*, то есть является корнем квадратного уравнения с целыми коэффициентами.

Объясните, когда получаются периодические цепные дроби с периодом $\{a_1, \dots, a_p\}$ и когда период начинается не с a_1, а с a_{k+1}, т.е. имеет вид $\{a_{k+1}, \dots, a_{k+p}\}$.

A2. Рассмотренные выше цепные дроби называются дробями Лагранжа.[2] Наряду с ними будем рассматривать цепные дроби Хирцебруха[3] – конечные и бесконечные:

$$\cfrac{1}{b_1 - \cfrac{1}{b_2 - \cfrac{1}{b_3 - \dots - \cfrac{1}{b_k}}}}, \quad \cfrac{1}{b_1 - \cfrac{1}{b_2 - \cfrac{1}{b_3 - \dots}}}, \quad \text{все } b_j \geq 2. \tag{3}$$

Примеры (проверьте, что следующие равенства верны):

$$\frac{4}{5} = \cfrac{1}{2 - \cfrac{1}{2 - \cfrac{1}{2 - \cfrac{1}{2}}}}, \quad \frac{5}{8} = \cfrac{1}{2 - \cfrac{1}{3 - \cfrac{1}{2}}}, \quad \frac{3 - \sqrt{5}}{2} = \cfrac{1}{3 - \cfrac{1}{3 - \cfrac{1}{3 - \dots}}}. \tag{4}$$

Дайте геометрическую интерпретацию *элементов* b_j для разложений (3).

---

[2]Жозеф Луи Лагранж (1736-1813) – выдающийся французский математик.

[3]Фридрих Хирцебрух (род. в 1928 г.) – крупный современный немецкий математик.

В (3) и (4) в цепные дроби Хирцебруха разложены числа, меньшие 1. Для чисел, больших или равных 1, разложения имеют вид

$$b_0 - \cfrac{1}{b_1 - \cfrac{1}{b_2 - \cfrac{1}{b_3 - \dots - \cfrac{1}{b_k}}}}, \quad b_0 - \cfrac{1}{b_1 - \cfrac{1}{b_2 - \cfrac{1}{b_3 - \dots}}}, \quad \text{все } b_j \geq 2. \tag{5}$$

$$\text{Например,} \quad \frac{5}{4} = 2 - \cfrac{1}{2 - \cfrac{1}{2 - \cfrac{1}{2}}}, \quad \frac{8}{5} = 2 - \cfrac{1}{3 - \cfrac{1}{2}}, \quad \frac{\sqrt{5}+3}{2} = 3 - \cfrac{1}{3 - \cfrac{1}{3 - \cfrac{1}{3 - \dots}}}. \tag{6}$$

Пояснение. Условие, что *все* $b_j \geq 2$ в (3) и (5), обеспечивает *единственность* разложения любого числа в цепную дробь Хирцебруха. Не будь этого условия, можно было бы *ошибочно* предложить в качестве таких дробей следующие разложения:

$$\frac{5+\sqrt{5}}{2} = 5 - \cfrac{1}{1 - \cfrac{1}{5 - \cfrac{1}{1 - \dots}}}, \quad \frac{5-\sqrt{5}}{2} = \cfrac{1}{1 - \cfrac{1}{5 - \cfrac{1}{1 - \dots}}}. \tag{7}$$

Верные равенства (7) с чередующимися единицами и пятерками *не являютя,* ввиду несоблюдения условия $b_j \geq 2$, разложениями в цепную дробь Хирцебруха.

А3.1. Разложите в цепную дробь Хирцебруха числа $1, (\sqrt{5} \pm 1)/2, (5 \pm \sqrt{5})/2, \sqrt{2}$.

А3.2. Докажите – при условии, что *все элементы* $b_j \geq 2$, – единственность разложения любого положительного числа в цепную дробь Хирцебруха.

А3.3. Решите задачу А1.3 применительно к дробям Хирцебруха.

Подходящие дроби. Для бесконечых цепных дробей Лагранжа и Хирцебруха с элементами a_j и b_j введем более компактные, чем выше, обозначения:

$$[a_0; a_1, a_2, \dots], \quad [[b_0; b_1, b_2, \dots]]. \tag{8}$$

Конечные цепные дроби обозначаются так:

$$[a_0; a_1, a_2, \dots, a_k], \quad [[b_0; b_1, b_2, \dots, b_k]]. \tag{9}$$

Если в (8) и (9) $a_0 = 0$ или $b_0 = 0$, пишем

$$[a_1, a_2, \dots], \quad [[b_1, b_2, \dots]]; \quad [a_1, a_2, \dots, a_k], \quad [[b_1, b_2, \dots, b_k]].$$

Являющиеся приближениями дробей (8), (9) конечные цепные дроби

$$[a_0;], [a_0; a_1], [a_0; a_1, a_2], \dots \quad \text{и} \quad [[b_0;]], [[b_0; b_1]], [[b_0; b_1, b_2]], \dots \tag{10}$$

называются *подходящими дробями.* Например, для разложения $(\sqrt{5}+1)/2$ в цепную дробь Лагранжа $[1; 1, 1, \dots]$ подходящими дробями служат дроби

$$[1;] = 1/1, \ [1; 1] = 2/1, \ [1; 1, 1] = 3/2, \ [1; 1, 1, 1] = 5/3, \ \dots \tag{11}$$

а для разложения $(\sqrt{5}+3)/2$ в цепную дробь Хирцебруха $[[3;3,3,\ldots]]$ – дроби

$$[[3;]] = 3/1,\ [[3;3]] = 8/3,\ [[3;3,3]] = 21/8,\ [[3;3,3,3]] = 55/21,\ \ldots \tag{12}$$

Вследствие (12) подходящие дроби для разложения $(\sqrt{5}+1)/2 = [[2;3,3,\ldots]]$ – это

$$[[2;]] = 2/1,\ [[2;3]] = 5/3,\ [[2;3,3]] = 13/8,\ [[2;3,3,3]] = 34/21,\ \ldots \tag{13}$$

A4.1. Как подходящие дроби (11)–(13) связаны с последовательностью Фибоначчи

$$f_0 = 0,\ f_1 = 1,\quad f_{k+1} = f_k + f_{k-1}?$$

A4.2. Найдите и сравните друг с другом подходящие дроби для разложений числа $(\sqrt{5}-1)/2$ в цепную дробь Лагранжа и в цепную дробь Хирцебруха.

B. Алгоритм вытягивания носов. Для луча $y = \beta x$, выходящего из начала координат, разложение его углового коэффициента β в цепную дробь связано с выпуклыми оболочками множеств узлов решетки *под* лучом и *над* лучом.

Рассмотрим ломаные $\underline{L}$ и $\overline{L}$, ограничивающие эти выпуклые оболочки. По остроумному замечанию известного советского математика Бориса Николаевича Делоне, ломаные $\underline{L}$ и $\overline{L}$ образуют *нос, вытянутый вдоль луча* $y = \beta x$.

B0. Убедитесь в том, что вершины ломаных попадают в точки x_k, y_k, где y_k/x_k – подходящие дроби разложения β в цепную дробь Лагранжа.

B1. Каков геометрический смысл подходящих дробей разложения β в цепную дробь Хирцебруха? Рассмотрите 2 случая: $\beta < 1$ и $\beta > 1$.