Подготовительные задачи. Ответы и решения

0.1. Сверхслово $W = \dots vvhvv \dots$ из букв v, среди которых есть единственная буква h, заведомо не принадлежит классу S. Другой пример такого сверхслова W: $\dots vvvhhh \dots$ (сначала – только буквы v, потом – только буквы h).

0.2.1. Для прямых L, образующих угол $\varphi < \pi/2$ с горизонталью, сверхслова W_L – тогда и только тогда периодические, когда $\operatorname{tg} \varphi$ – рациональное число.

При $\varphi = \pi/2$, т.е. для вертикальной прямой L, сверхслово W_L – тоже периодическое, т.к. состоит только из букв h.

0.2.2. Если прямая L образует угол $\varphi < \pi/4$ с горизонталью, то буквы v встречаются в сверхслове W_L чаще, чем h.

0.2.3. Сделаем замену $h \rightleftarrows v$ в произвольном сверхслове W_L из S. Тогда получившееся сверхслово W' останется в классе S, т.к. $W' = W_{L'}$ для прямой L', с угловым коэффициентом $k_{L'} = 1/k_L$.

0.3. Сверхслово $W = \{\dots h\,v\,v\,v\,h\,v\,v\,h \dots\} \in S$, т.к. все клетки многоугольника M_w, соответствующего слову $w = \{h\,v\,v\,v\,h\,v\,v\,h\}$, можно перечеркнуть прямой (например, прямой с угловым коэффициентом $k_L = 3/7$).

0.3.1. Между любыми двумя *соседними* буквами h в W могут стоять *либо две, либо три* буквы v. Докажем это. Если какое-нибудь сверхслово $W_L \in S$ содержит подслово hv^kh (k букв v между двумя соседними h), то угловой коэффициент k_L, очевидно, заключен между $1/(k+1)$ и $1/(k-1)$.

Слово $hvvvhvvh$ содержит подслова hv^kh при $k = 2$ и $k = 3$. Значит, $k_L \in [1/3, 1/2]$.

При этом $k_L \neq 1/3$, $k_L \neq 1/2]$ (почему?). Значит, $k_L \in (1/3, 1/2)$. Но тогда $2 \leq k \leq 3$ для любого подслова $hv^kh \in W$, что и требовалось доказать.

0.3.2. Перечислим все различные подслова длины 2, 3 и 4 в W:

3 слова длины 2: hv, vv, vh; 4 слова длины 3: vvv, hvv, vhv, vvh;

5 слов длины 4: $hvvv, vhvv, vvhv, vvvh, hvvh$.

0.3.3. Сверхслова W_L и W_{L^*} содержат подслово $hvvvhvvh$, например, для параллельных прямых L и L^* с угловым коэффициентом $k_L = 3/7$; годятся и $k_L = 3/8$, и $k_L = 2/5$ (проверьте). То же верно и для всех достаточно близких k_L.

0.3.4. Ввиду 0.3.1, сверхслово W в 0.3 равно $\{\dots v\,v\,h\,v\,v\,v\,h\,v\,v\,h\,v\,v \dots\}$. Значит, W содержит следующие 6 подслов длины 5: $hvvvh, vhvvv, vvhvv, vvvhv, vhvvh, hvvhv$ и 7 подслов длины 6: $vhvvvh, hvvvhv, vvhvvv, vvvhvv, vvhvvh, vhvvhv, hvvhvv$.

Так как между любыми двумя соседними буквами h в W стоят *минимум две и максимум три* буквы v, то всякое подслово W длины 5 или 6 содержит либо одну, либо две буквы h. Поэтому простым перебором проверяется, что выше перечислены *все* подслова длины 5 и длины 6 в W.

Значит, каковы бы ни были прямые L и L^*, перечеркивающие все клетки многоугольника M_w, соответствующего слову $w = \{h\,v\,v\,v\,h\,v\,v\,h\}$, в W_L и W_{L^*} обязательно совпадают и множества всех подслов длины 5, и множества всех подслов длины 6.

Напротив, множества всех подслов длины 7 в W_L и W_{L^*} для каких-то L и L^* могут и не совпасть. Пусть, например, L и L^* образуют такие углы φ и φ^* с горизонталью, что $\operatorname{tg} \varphi = 3/7$ и $\operatorname{tg} \varphi^* = 3/8$, тогда W_L и W_{L^*} – это периодические сверхслова $\{h\,v\,v\,v\,h\,v\,v\,h\,v\,v\}$ и $\{h\,v\,v\,v\,h\,v\,v\,v\,h\,v\,v\}$, так что W_L содержит подслово $\{h\,v\,v\,h\,v\,v\,h\}$, которого нет в W_{L^*}, а W_{L^*} содержит подслово $\{v\,v\,v\,h\,v\,v\,v\}$, которого нет в W_L.

0.4.1. Может случиться, что все подслова некоторого сверхслова W являются разрешенными словами, но само $W \notin S$. Пример такого сверхслова был уже приведен – см. решение задачи 0.1: это – сверхслово $W = \dots vvhvv \dots$ из букв v, среди которых есть единственная буква h.

0.4.2. W_L и W_{L^*} могут совпасть, хотя прямые L и L^* не совпадают: так будет, если L^* симметрична L (с учетом ориентации) относительно какой-либо горизонтали или вертикали или относительно какого-либо узла решетки; так будет и в случае, если прямые параллельны и L^* получается из L сдвигом на 1 (или на любое целое число клеток) по вертикали или по горизонтали.

Чтобы различным прямым L и L^* отвечали, *как правило* (см. 0.4.3), различные сверхслова W_L и W_{L^*}, можно поступить так: выделить клетку K_0 и рассматривать только те прямые L и L^*, которые проходят через K_0 и пересекают одну и ту же ее сторону, причем идут *снизу вверх*, т.е. образуют с горизонталью угол $\varphi \in [0, \pi/2]$.

0.4.3. Пусть прямые L и L^* имеют один и тот же угловой коэффициент k_L и ни одна из них не проходит через узлы решетки. Если к тому же k_L – рациональное число, то тогда (как легко убедиться) сверхслова W_L и W_{L^*} совпадают.

Если же k_L – иррациональное число, то множества всех подслов в W_L и W_{L^*} совпадают, а сами W_L и W_{L^*} могут и не совпасть (и не совпадают, если L и L^* проходят через одну и ту же сторону клетки K_0, см. конец решения 0.4.2).

Сейчас – на этапе решения подготовительных задач – ограничимся формулировкой этого факта. Попробуйте доказать его сами. Попробуйте доказать еще один факт – *квазипериодичность* W_L: если k_L – иррациональное число, то в W_L встречаются как угодно длинные совпадающие друг с другом подслова.

0.5.1. Сотрем по одному v перед каждым h в $W \in S$ из 0.3. Тогда получившееся сверхслово $\{\dots hvvhvh \dots\}$ останется в классе S. В общем случае этот факт доказан в 0.5.2. Иллюстрируя 0.5.2, заметим: если прямые L_1 и L_2 образуют такие углы φ_1 и φ_2 с горизонталью, что $\operatorname{tg} \varphi_1 = 3/4$ и $\operatorname{tg} \varphi_2 = 3/5$, то W_{L_1} и W_{L_2} – это периодические сверхслова с периодами $\{hvvhvhv\}$ и $\{hvvhvvhv\}$ (сравним с концом решения 0.3.4).

0.5.2. Пусть прямая L пересекает какую-либо горизонталь g в точке P и образует с g угол $\varphi \le \pi/4$. Сотрем по одному v перед каждым h в сверхслове W_L. Тогда получившееся сверхслово W^* останется в классе S, т.к. $W^* = W_{L^*}$ для прямой L^*, проходящей через точку P и образующей с g такой угол φ^*, что $\operatorname{ctg} \varphi^* = \operatorname{ctg} \varphi - 1$.

0.6. Пусть прямая L пересекает какую-либо горизонталь g в точке P и образует с g угол $\varphi \le \pi/4$. Впишем по одному v перед каждым h в сверхслове W_L. Тогда получившееся сверхслово W^* останется в классе S, т.к. $W^* = W_{L^*}$ для прямой L^*, проходящей через точку P и образующей с g такой угол φ^*, что $\operatorname{ctg} \varphi^* = \operatorname{ctg} \varphi + 1$.

0.7. Если прямая L образует угол φ с горизонталью, то

$W_L \in E$ тогда и только тогда, когда $\varphi = \pi/4$;

$W_L \in S^h_\infty$ тогда и только тогда, когда $\varphi = 0$;

$W_L \in S^v_\infty$ тогда и только тогда, когда $\varphi = \pi/2$;

$W_L \in S^h_n$ тогда и только тогда, когда $\operatorname{tg} \varphi \in (1/(n+1), 1/n]$; при этом $\operatorname{tg} \varphi = 1/n$, если и только если между любыми двумя соседними буквами h стоят n букв v.

$W_L \in S^v_n$ тогда и только тогда, когда $\operatorname{tg} \varphi \in [n, n+1)$; при этом $\operatorname{tg} \varphi = n$, если и только если между любыми двумя соседними буквами v стоят n букв h.

0.7.1. Геометрическая интерпретация 0.7 в терминах ленточных многоугольников такова – длины λ_s лент многоугольника M_w для разрешенного слова w, являющегося подсловом сверхсло́ва $W \in S^h$ могут принимать не более двух значений:

если между любыми двумя соседними буквами h стоят n букв v, то все $\lambda_s = n+1$;

если $W_L \in S^h_n$ и $k_L \neq 1/n$, то λ_s равны либо $n+1$, либо $n+2$.

Если длины λ_s лент M_w принимают более двух значений, слово w *заведомо* является запрещенным. Если длины лент M_w принимают только два значения, слово w *все равно* может оказаться запрещенным (см. 0.7.2). Для сверхслов $W \in S^v$ – перед подсчетом числа значений λ_s – нужно сделать инверсию $v \rightleftarrows h$.

0.7.2. Вот пример периодического запрещенного слова w, для которого в многоугольнике M_w дли́ны лент λ_s принимают два значения: 2 и 3, в нем периодически повторяются 10 букв: $\{hvhvhvvhvv\}$. Проверьте, что соответствующий этому слову многоугольник M_w нельзя перечеркнуть одной прямой.

0.8.1. Пусть угловой коэффициент k_L прямой L равен *конечной* цепной дроби, например, одной из следующих:

$$\frac{11}{25} = \cfrac{1}{2+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{1+\frac{1}{2}}}}, \quad \frac{7}{24} = \cfrac{1}{3+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{3}}}, \quad \frac{4}{19} = \cfrac{1}{4+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{3}}}, \quad \frac{5}{8} = \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\frac{1}{2}}}}.$$

Для каждой из этих дробей найдем цепочку $a_1, a_2, \ldots, a_n$ для сверхслова $W = W_L$.

Если $k_L = 11/25 \in (1/3, 1/2]$, то (см. решение задачи 0.7) $W = W_L \in S^h_2$.

Значит, $a_1 = 2$. Стираем по a_1 букв v перед каждым h и полученное сверхслово называем W_1. В соответствии с решением задач 0.7 и 0.5.2 имеем:

$W_1 = W_{L_1} \in S^v_3$, т.к. $25/11 - 2 = 3/11 \in (1/4, 1/3]$.

Значит, $a_2 = 3$. Стираем по a_2 букв h перед каждым v. Получаем $W_2 = W_{L_2} \in S^h_1$, т.к. $11/3 - 3 = 2/3 \in (1/2, 1]$.

Значит, $a_3 = 1$. Стираем по a_3 букв v перед каждым h и полученное сверхслово называем W_3. Т.к. $3/2 - 1 = 1/2$, то $W_3 \in S^v_2$.

Значит, $a_4 = 2$. Стираем по a_4 букв h перед каждым v. Получаем $W_4 \in S^h_\infty$. Итак, если $k_L = 11/25$, то $a_1 = 2$, $a_2 = 3$, $a_3 = 1$, $a_4 = 2$.

Следствие. Если $k_L = 11/25$, то W_j – сверхслова с такими периодами:

$W_4 = \{\ldots v \ldots\}$; $W_3 = \{\ldots hhv \ldots\}$; $W_2 = \{\ldots vvhvh \ldots\}$; $W_1 = \{\ldots vh^4vh^4vh^3 \ldots\}$;

$W = \{\ldots hv^2hv^2hv^2hv^3\ hv^2hv^2hv^2hv^3\ hv^2hv^2hv^3 \ldots\}$.

Аналогично, при $k_L = 7/24$ имеем: $a_1 = 3, a_2 = 2, a_3 = 3$; если $k_L = 4/19$, то $a_1 = 4$, $a_2 = 1$, $a_3 = 3$, а если $k_L = 5/8$, то $a_1 = a_2 = a_3 = 1, a_4 = 2$.

Найдите периоды сверхслов W_j, получающихся при перестройках W для этих k_L.

0.8.2. Если угловой коэффициент k_L прямой L – рациональное число:

$$k_L = \cfrac{1}{a_1+\cfrac{1}{a_2+\cfrac{1}{a_3+\cdots+\cfrac{1}{a_n}}}},$$

то перестройки сверхслова $W = W_L$, сопоставленного прямой L, обрываются через конечное число шагов: $W \to W_1 \to W_2 \to \cdots \to W_n$ и дают цепочку $a_1, a_2, \ldots, a_n$.

1.1. Простейшими примерами тщательно перемешанных сверхслов являются

$$\{\dots aaa\dots\} \text{ и } \{\dots bbb\dots\}.$$

Следующий по сложности пример: сверхслово $W = W_L \in S$ для прямыой L с угловым коэффициентом k_L, равным либо n, либо $1/n$. Пусть для определенности $k_L = 1/n$. Согласно 0.7 в $W = W_L$ в этом (и только в этом) случае между любыми двумя соседними h стоят n букв v:

$$W = \{\dots hvhvhv\dots\} \text{ при } n = 1,\ W = \{\dots hvvhvvhvv\dots\} \text{ при } n = 2, \text{ и т.д.}$$

Тщательная перемешанность таких W очевидна: в $W = \{\dots hv^n hv^n hv^n\dots\}$ любое подслово длины $r \le n$ содержит либо r букв v, либо 1 букву h и $r-1$ букв v; любое подслово длины $(n+1)k + r$, где $0 \le r \le n$, содержит либо k букв h и $nk + r$ букв v, либо $k+1$ букву h и $nk + r - 1$ букв v.

1.2.1. Любое разрешенное слово w, очевидно, является подсловом для бесконечного множества различных сверхслов W_L из S: если многоугольник M_w можно перечеркнуть какой-нибудь прямой L, не проходящей через узлы, то его можно перечеркнуть и любой прямой L^*, достаточно близкой к L.

1.2.2. В частности, прямую L^* в решении 1.2.1 можно выбрать так, чтобы ее угловой коэффициент k_L был рациональным числом.

1.2.3. Из определения тщательной перемешанности следует, что сверхслово W является тщательно перемешанным в том и только том случае, если каждое его подслово является тщательно перемешанным.

1.3.1. Ответ: *неверно.* Заменим буквы a и b на h и v. Контрпример:

$w = hvvhvvhvhv$ – разрешенное слово, а $w^* = vvhh$ – запрещенное слово.

Пояснение к контрпримеру: $w = hvvhvvhvhv$ – разрешенное слово, так как $w' = hvvhvvhvhvv$ – разрешенное слово. (А $w' = hvvhvvhvhvv$ – разрешенное слово, т.к. $w'^* = vvhv$ – разрешенное слово, см. приводимую ниже теорему).

Верна теорема: *при переименовании*

1) сверхслова $W \in S$ переходят в сверхслова $W^* \in S$,

2) запрещенные слова W переходят в запрещенные слова W^*,

3) сверхслова $W \notin S$ переходят в сверхслова $W^* \notin S$.

Наметим путь к ее доказательству.

Пусть M_W – ленточный многоугольник для слова W. Границы M_W – *зубчатые* ломаные $\underline{L}$ и $\overline{L}$, идущие по горизонталям и вертикалям клетчатой бумаги. Для подслов W типа hv^n и hv^{n+1} соседние зубцы ломаных являютя катетами прямоугольных треугольников двух типов. Гипотенузы этих треугольников образуют ломаные $\underline{L}'$ и $\overline{L}'$, идущие внутри M_W. Звенья обеих ломаных лежат на *новой* решетке, образуемой прямыми с угловыми коэффициентами $1/n$ и $1/(n+1)$ (узлы у новой решетки те же, что у старой), так что каждое звено соответствует либо слову hv^n, либо слову hv^{n+1}.

Введем на листе клетчатой бумаги координаты x, y и рассмотрим отображение F, переводящее точку $\{x, y\}$ в $\{x - ny, -x + (n+1)y\}$. Это отображение переводит векторы $\{n+1, 1\}$ и $\{n, 1\}$ в векторы $\{1, 0\}$ и $\{0, 1\}$, а ломаные $\underline{L}'$ и $\overline{L}'$ – в *зубчатые* ломаные $\underline{L}^*$ и $\overline{L}^*$, идущие по горизонталям и вертикалям клетчатой бумаги.

Тем самым, отображение F соответствует операции переименования (замене слов hv^{n+1} буквами v и слов hv^n буквами h): если обозначить через M^* многоугольник, ограниченный ломаными $\underline{L}^*$ и $\overline{L}^*$, то окажется, что это – ленточный многоугольник для слова W^*.

Далее надо использовать свойства линейных преобразований F:

F переводит прямые в прямые и сохраняет отношения длин отрезков.

1.3.2. Задача 1.3.2 *не снимается с конкурса.*

В дальнейшем нам понадобится следующая теорема о сверхсловах:

При переименовании сверхслова́ $W \in S_1$ переходят в сверхслова́ $W^* \in S_1$, а сверхслова́ $W \notin S_1$ – в сверхслова́ $W^* \notin S_1$.

Докажем ее первую часть. По условию W можно разбить на подслова двух типов: ab^n и ab^{n+1} (далее – при решении задачи 1.3.2 – удобно называть их *короткими и длинными отсеками*). Произведем операцию *переименования*: каждое подслово ab^{n+1} заменим буквой b, а каждое подслово ab^n – буквой a. Сверхслово, получившееся из W в результате переименования, обозначим через W^*.

Для любого слова w введем обозначения:

$a(w)$ – число букв a в w, $b(w)$ – число букв b в w; $|w|$ – длина w.

Замечание. Далее используются такое утверждение (докажите его):

В любом слове (или сверхслове) $W^* \notin S_1$ найдутся два подслова U^* и V^* одинаковой длины, для которых $b(U^*) - b(V^*) = 2$.

Пусть сверхслово $W \in S_1$. Нужно доказать, что тогда сверхслово $W^* \in S_1$. Допустим, что это не так и в W^* существуют такие два подслова U^* и V^*, что $|U^*| = |V^*|$ и $b(U^*) - b(V^*) = 2$. Последние два равенства означают, что для слов U и V, переходящих в U^* и V^* при переименовании,

$$|U| - |V| = b(U) - b(V) = 2.$$

Преобразуем U и V и построим 2 подслова U' и V' сверхслова W.

Слова U и V состоят из отсеков ab^n и ab^{n+1}; слово U' получается из U отрасыванием первой буквы a, слово V' получается из V приписыванием справа буквы a. Тем самым,

$$|U'| = |V'|, \quad b(U') - b(V') = 2.$$

Наличие таких подслов U' и V' в W противоречит тому, что $W \in S_1$. Следовательно доказано, что $W^* \in S_1$.

1.4.1. Докажем, что каждое разрешенное слово W тщательно перемешано. Пусть U и V – любые два его подслова одной и той же длины, причем U содержит n букв h и m букв v, а V содержит $n+d$ букв h и $m-d$ букв v, где $d \geq 0$. Предположим, что ленточный многоугольник слова W можно пересечь прямой L с угловым коэффициентом k. Так как эта прямая пересекает и многоугольник слова U, то $\frac{m-1}{n+1} < k$. С другой стороны, так как она пересекает и многоугольник слова V, то $k < \frac{m-d+1}{n+d-1}$. Получаем $\frac{m-d+1}{n+d-1} > \frac{m-1}{n+1}$, или $(n+m)(2-d) > 0$. Итак, $d < 2$, то есть W тщательно перемешано.

1.4.2. Любое сверхслово $W \in S$ тщательно перемешано, так как согласно 1.4.1 каждое его подслово тщательно перемешано, а согласно 1.2.3 сверхслово тщательно перемешано тогда и только тогда, когда каждое его подслово тщательно перемешано.

1.4.3. Пример тщательно перемешанного сверхслова $W \notin S$ был приведен уже дважды – см. решение задач 0.1 и 0.4.1: это – сверхслово $W = \ldots vvhvv \ldots$ из букв v, среди которых есть единственная буква h.

1.5. Докажем, что в алфавите из двух букв a и b для любых взаимно простых натуральных m и n существует такое периодическое тщательно перемешанное сверхслово, что в его периоде встречается m букв a и n букв b.

Пусть $W_L \in S$, где L – прямая с угловым коэффициентом m/n. Чтобы получить W из W_L, достаточно сделать в W_L замену $h \to a$, $v \to b$.

Если m и n не взаимно просты, то не существует такого периодического тщательно перемешанного сверхслова W, что в его *наименьшем* периоде встречается m букв a и n букв b. Пусть, например, $m = 2$, $n = 4$. Тогда для

$$W = \{a\,b\,b\,a\,b\,b\} = \{b\,a\,b\,b\,a\,b\} = \{b\,b\,a\,b\,b\,a\}$$

период длины 6 не является наименьшим, а все остальные сверхслова с периодом длины 6 из двух букв a и четырех букв b не являются тщательно перемешанными, т.к. содержат подслова aab и bbb.

Если не требовать, чтобы период был наименьшим, то утверждение верно для для любых, а не только взаимно простых m и n.

1.6.1. Задача 1.6.1 *не снимается с конкурса.*

1.6.2. Задача 1.6.2 *не снимается с конкурса.*

1.7. Начнем описание сверхслов W, принадлежащих классу S_1 и не принадлежащих классу S. Оно подведет вас к основным задачам 3.1.1-3.1.3. Вы сами продолжите его, решив эти основные задачи.

Согласно 1.2.3 сверхслово $W \in S_1$ в том и только том случае, если каждое его подслово w является тщательно перемешанным. Согласно 1.6.2 любое тщательно перемешанное слово w является разрешенным. Значит, для каждого $w \in W$ ленточный многоугольник M_w можно перечеркнуть прямой $L(w)$, не проходящей через узлы.

Построим вложенную последовательность $w_1 \subset w_2 \subset \ldots$ слов $w_n \in W$, сходящуюся к W (в том смысле, что каждая буква W принадлежит всем w_n начиная с некоторого n). Ей соответствует вложенная последовательность ленточных многоугольников M_n с общей клеткой K_0. Каждый из них можно перечеркнуть прямой L_n, проходящей через K_0. Пусть $y = k_n x + b_n$ – уравнение L_n. Последовательности k_n и b_n ограничены (проверьте). Значит, можно выбрать подпоследовательность пар k_{n_j}, b_{n_j}, сходящуюся к k, b.

Прямая L с уравнением $y = kx + b$ имеет общую точку с каждой клеткой каждого из ленточных многоугольников M_n. Она обязательно проходит хотя бы через один узел решетки (почему?).

Продолжение – в основных задачах 3.1.1-3.1.3.

1.8. Обобщим определение тщательной перемешанности на алфавиты из нескольких букв: $a, b, c, \ldots$. Сверхслово W тщательно перемешано, если в любых двух его подсловах U и V одинаковой длины число букв a различается максимум на 1; точно такое же требование предъявляется к буквам b, буквам c и т.д.

Вот – пример *периодического* тщательно перемешанного сверхслова из букв a, b, c, содержащего подслово aa: $W = \{\ldots\{a\,a\,b\,a\,c\,a\,b\,a\,c\}\ldots\}$. Чтобы убедиться в тщательной перемешанности W, построим 3 вспомогательных сверхслова из букв v, h.

Первое получается из W заменой a на v, и b и c на h: $W_1 = \{\ldots\{v\,v\,h\,v\,h\,v\,h\,v\,h\}\ldots\}$.

Второе получается из W заменой a и c на v, и b на h: $W_2 = \{\ldots\{v\,v\,h\,v\,v\,v\,h\,v\,v\}\ldots\}$.

Третье получается из W заменой a и b на v, и c на h: $W_3 = \{\ldots\{v\,v\,v\,v\,h\,v\,v\,v\,h\}\ldots\}$.

Все три вспомогательных сверхслова принадлежат S:

$$W_1 = W_{L_1}, \quad W_2 = W_{L_2}, \quad W_3 = W_{L_3}$$

для прямых L_1, L_2, L_3 с угловыми коэффициентами $k_{L_1} = 4/5$, $k_{L_2} = k_{L_3} = 2/7$.

Значит, все они тщательно перемешаны. В частности, в любых двух подсловах U и V одинаковой длины сверхсло́ва W_1 число букв v различается максимум на 1. Но тогда в любых подсловах U и V одинаковой длины сверхсло́ва W число букв a различается максимум на 1. Точно так же из тщательной перемешанности W_2 следует, что в любых подсловах одинаковой длины сверхсло́ва W число букв b различается максимум на 1. А из тщательной перемешанности W_3 следует, что в любых подсловах одинаковой длины сверхсло́ва W число букв c различается максимум на 1.

Тщательная перемешанность W доказана.

2.1. Обозначим через $T_W(n)$ число различных подслов длины n в сверхслове W.

Максимально возможное значение $T_W(n)$ для алфавита из двух букв, очевидно, равно 2^n (для алфавита из трех букв оно равно 3^n, для алфавита из m букв – m^n).

2.2. Пусть $T_W(k) = T_W(k+1) = T$ при некотором k (число различных подслов длины k в сверхслове W равно числу различных подслов длины $k+1$ и равно T).

Докажем, что тогда сверхслово W периодично с периодом длины T.

При любом d каждое подслово длины d в сверхслове W можно продолжить вправо до слова длины $d+1$ максимум двумя разными способами (приписав к нему справа либо букву a, либо букву b). Равенство $T_W(k) = T_W(k+1)$ означает, что при $d = k$ возможно лишь одно продолжение вправо: если бы какое-нибудь подслово длины k в разных частях сверхслова W продолжалось вправо по-разному, то слов длины $k+1$ было бы больше, чем $T_W(k)$. Точно так же два одинаковых подслова длины k в разных частях сверхслова W одинаково продолжаются влево.

Выпишем $T+k$ последовательных букв $w_1, \ldots, w_{T+k}$ сверхслова W и (соответственно) $T+1$ подслов $W_0, \ldots, W_T$ длины k, составленных из этих букв:

$$W_0 = \{w_1, \ldots, w_k\}, \ \ldots, \ W_T = \{w_{T+1}, \ldots, w_{T+k}\}.$$

Так как число различных подслов длины k в сверхслове W равно T, то $W_i = W_j$ для некоторых i и j:

$$W_i = \{w_{i+1}, \ldots, w_{i+k}\} = W_j = \{w_{j+1}, \ldots, w_{j+k}\}, \ 0 \le i < j \le T,$$

или, что то же,

$$W_i = \{w_{i+1}, \ldots, w_{i+k}\} = W_{i+P} = \{w_{i+P+1}, \ldots, w_{i+P+k}\}, \ 1 \le P = j - i \le T.$$

Так как по любому своему подслову длины k сверхслово W однозначно продолжается и вправо, и влево, то отсюда следует, что

$$W_s = \{w_{s+1}, \ldots, w_{s+k}\} = W_{s+P} = \{w_{s+P+1}, \ldots, w_{s+P+k}\}, \ \text{при любом целом } s,$$

т.е. сверхслово W – периодическое и длина периода равна $P \le T$. Поскольку число подслов длины k в таком сверхслове равно P, а по условию оно равно T, то $P = T$.

Замечание. Следовательно, выше $i = 0, j = T$ и

$$W_0 = \{w_1, \ldots, w_k\} = W_T = \{w_{T+1}, \ldots, w_{T+k}\}.$$

2.3. Пусть $T_W(k) < k+1$ при некотором k. Докажем, что тогда W периодично.

Если $W = \{\ldots aaa \ldots\}$ или $W = \{\ldots bbb \ldots\}$ (если $T_W(k) = 1 \le k$ при всех k), то утверждение верно: W периодично.

Пусть теперь в W встречаются как буквы a, так и буквы b. Тогда

$$2 \le T_W(1) \le T_W(2) \le \cdots \le T_W(k) \le k,$$

Так как k чисел $T_W(i)$ принимают $k-1$ значений, то существует такое i, что $T_W(i+1) = T_W(i)$. Следовательно, согласно 2.2, W периодично.

2.4. Докажем, что для всех сверхслов $W \in S$ выполняется неравенство

$$T_W(k) \leq k+1 \text{ для всех } k.$$

2.4.1. Начнем с описания $T_W(k)$ для $W = W_L$ в случае, когда угловой коэффициент прямой L – рациональное число: $k_L = m/n$ (где m и n взаимно просты).

В этом случае, очевидно, $T_W(k) = k+1$ при $k < P = m+n$ и $T_W(k) = P$ при $k \geq P$, так что для рациональных k_L неравенство $T_W(k) \leq k+1$ доказано для всех k.

2.4.2. Пусть k_L – иррациональное число. Докажем, что тогда $W = W_L$ удовлетворяет условию $T_W(k) = k+1$ при всех k, и, значит, $W \in S_2$.

Согласно 2.3 при всех k выполняется неравенство $T_W(k) \geq k+1$. Тем самым, осталось доказать, что ни при каком k не может оказаться верным неравенство $T_W(k) > k+1$. Допустим, что для каких-то k оно выполняется, и возьмем одно из таких k. Пусть w – подслово сверхслова W, содежащее $k+2$ подслов W длины k.

Согласно 1.2.2 найдется прямая L^* с *рациональным* угловым коэффициентом, перечеркивающая ленточный многоугольник M_w. Слово w является подсловом сверхслова $W^* = W_{L^*}$, т.е. $T_{W^*}(k) \geq k+2 > k+1$ вопреки 2.4.1. Полученное противоречие доказывает, что наше допущение было неверным и что $W = W_L$ удовлетворяет условию $T_W(k) = k+1$ при всех k, т.е., действительно, $W \in S_2$.

2.4.3. Пример сверхслова $W \in S_2$, не принадлежащего классу S, был уже приведен в решении задачи 0.1: $\dots vvvhhh \dots$ (сначала – буквы v, потом – буквы h).

2.4.4. Все сверхслова W, такие что $W \in S_1$ и $W \notin S$, принадлежат S_2.

Продолжение – в основных задачах 3.3, 3.4.1-3.4.3.