Наборы кратных сумм

К. Кохась

Условия задач

Пусть дан произвольный набор вещественных чисел $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ (среди чисел a_i могут быть равные). Набором k-сумм назовем совокупность всех чисел вида $a_{i_1} + a_{i_2} + \ldots + a_{i_k}$, где $1 \leqslant i_1 < i_2 < \ldots < i_k \leqslant n$. Обозначим этот набор $A^{(k)}$. Например, для $A = \{1, 1, 2, 7\}$ $\quad A^{(3)} = \{4, 9, 10, 10\}$.

Значком $\diamond$ помечены задачи, которые будут разобраны на промежуточном финише.

1 Попарные суммы

$\diamond$ **1.1.** Из чисел a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 можно образовать 10 попарных сумм; обозначим их через x_1, x_2, $\ldots$, x_{10}. Докажите, что, зная числа x_1, x_2, $\ldots$, x_{10} (но не зная, разумеется, суммой каких именно двух чисел является каждое из них), можно восстановить числа a_1, a_2, a_3, a_4, a_5.

$\diamond$ **1.2.** Известно что для набора A его набор попарных сумм равен $\{2, 2, 2, 3, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, 5, 5, 5, 6\}$. Найдите сумму квадратов элементов набора A.

$\diamond$ **1.3.** а) Приведите пример двух наборов из четырех чисел каждый (повторы допускаются), у которых совпадают наборы попарных сумм.

б) $b_1 < b_2 < b_3 < b_4 < b_5 < b_6$ — набор попарных сумм некоторого набора из четырех чисел. Докажите, что существует еще один набор из четырех чисел с тем же набором попарных сумм.

$\diamond$ **1.4.** Докажите, что при $n = 2^k$, $k = 1, 2, \ldots$, существуют два набора по n чисел каждый, у которых совпадают наборы попарных сумм.

$\diamond$ **1.5.** Докажите, что при $n \neq 2^k$ набор из n чисел однозначно определяется своим набором попарных сумм.

1.6. а) Приведите пример трех наборов чисел (более двух чисел в каждом), у которых совпадают наборы попарных сумм.

б) Докажите, что не существует трех наборов из 4 чисел, у которых совпадают наборы попарных сумм.

в) Докажите, что не существует четырех наборов из 8 чисел каждый, у которых совпадают наборы попарных сумм.

1.7. Двоечник Саша задумал три вещественных числа и выписал на доску все их попарные суммы, попарные суммы, взятые с обратным знаком, и все попарные разности, итого 12 чисел. Всегда ли отличница Надя сможет узнать модули задуманных Сашей чисел?

1.8. Докажите, что для набора $\{a_1, a_2, \ldots\}$ из n различных чисел количество различных сумм вида $a_i + a_j$ может быть любым числом из диапазона $2n - 1, C_n^2$.

2 Суммы большей кратности

2.1. а) Докажите, что при каждом натуральном m числа 2, 2^2, 2^3, $\ldots$, $2^{2\cdot 3^{m-1}}$ дают разные остатки при делении на 3^m.

б) Докажите, что при натуральных p уравнение

$$n^2 - (2^p + 1)n + 2 \cdot 3^{p-1} = 0 \qquad (1)$$

имеет решение в натуральных числах (относительно n) только при $p = 1$, 2, 3, 5, 9.

2.2. Докажите, что набор из n чисел однозначно определяется набором своих 3-сумм, если $n \neq 3, 6, 27, 486$.

$\diamond$ **2.3.** а) Докажите, что при всех $k \in \mathbb{N}$ набор из $2k$ чисел, вообще говоря, не определяется однозначно набором своих k-сумм.

б) Докажите, что набор из n чисел однозначно восстанавливается по своему набору k-сумм тогда и только тогда, когда этот набор однозначно восстанавливается и по набору $(n-k)$-сумм.

2.4. а) Верно ли, что набор из 27 чисел однозначно определяется набором своих сумм по 3?

б) Верно ли, что набор из 486 чисел однозначно определяется набором своих сумм по 3?

2.5. Докажите, что при натуральных p уравнение

$$n^3 - (3 \cdot 2^{p-1} + 3)n^2 + (2 + 3 \cdot 2^{p-1} + 2 \cdot 3^p)n - 6 \cdot 4^{p-1} = 0 \qquad (2)$$

имеет решение в натуральных числах (относительно n) только при $p \leqslant 7$. Возможные решения — $n = 1$, 2, 3, 4, 8, 12.

2.6. Верно ли, что не существует четырех наборов из 6 чисел, у которых одинаковое семейство 3-сумм?

2.7. Докажите, что набор из 12 чисел однозначно определяется набором своих сумм по 4.

2.8. Докажите, что если $(k-1)!k^{n-1} \not\vdots\, n$ (например, если k меньше максимального простого делителя n), то набор A из n чисел определяется набором $A^{(k)}$ однозначно.

2.9. Даны два набора A и B по n чисел каждый, причем элементы набора B "находятся в общем положении", а именно: все суммы вида

$$\pm b_{i_1} \pm b_{i_2} \ldots \pm b_{i_m}, \quad \text{где} \quad 1 \leqslant m \leqslant n,\ 1 \leqslant i_1 < i_2 < \ldots < i_m \leqslant n$$

попарно различны. Если у наборов A и B совпадают множества k-сумм, то либо $n = k$, либо $n = 2k$, в последнем случае наборы A и B симметричны друг другу относительно некоторой точки на вещественной оси.

3 Добавление после промежуточного финиша

Для произвольного набора чисел $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ положим

$$s_p(X) = x_1^p + x_2^p + \ldots + x_n^p\,.$$

Более того, если $1 \leqslant k \leqslant n$, то для каждого набора $(p_1, p_2, \ldots, p_k)$ из неотрицательных целых чисел положим

$$s_{p_1, p_2, \ldots, p_k} = \sum x_{i_1}^{p_1} x_{i_2}^{p_2} \ldots x_{i_k}^{p_k}\,,$$

где суммирование ведется по всевозможным упорядоченным наборам $\{i_1, i_2, \ldots, i_k\} \subset X$.

3.1. Несколько вспомогательных комбинаторных фактов.

а) Докажите, что существует ровно $\sum\limits_{i=1}^{r} (-1)^{r-i} C_r^i i^k$ способов положить k различных фотографий в $r \leqslant k$ различных конвертов так, чтобы в каждом конверте оказалась хотя бы одна фотография.

б) Докажите, что $C_n^{s-q} = \sum\limits_{v=q}^{s} C_{n-v}^{s-v} C_{v-1}^{q-1}$.

в) Пусть среди чисел $\{p_1, p_2, \ldots, p_k\}$ ровно t нулей $(0 \leqslant t \leqslant k-1)$. Докажите, что

$$s_{p_1, p_2, \ldots, p_k} = (n-k+1)(n-k+2)\ldots(n-k+t) \cdot (-1)^{k-t-1} \cdot (k-t-1)! s_p + F\,,$$

где $p = p_1 + \ldots + p_k$, а выражение F зависит только от $s_1, \ldots, s_{p-1}$.

3.2. Докажите, что

$$s_p(A^{(k)}) = f(n,k) s_p(A) + G\,,$$

где выражение G зависит только от n, k, $s_q(A)$, $1 \leqslant q < p$, но не зависит от $s_p(A)$, а

$$f(n,k) = \sum_{i=1}^{k} (-1)^{i-1} i^{p-1} C_n^{k-i}\,.$$

3.3. Найдите простую формулу для $f(n,k)$ при $p = 1$.

3.4. Найдите какие-нибудь $k \geqslant 5$ и $n > 2k$, для которых $f(n,k) = 0$ при каком-нибудь p.

3.5. Конечно или бесконечно множество пар натуральных чисел (m,n), для которых

$$15(8m^2 - 8mn + n^2 + 3n)^2 - 7n^4 + 38n^3 - 47n^2 - 32n = 0\,?$$

Вот список решений (n,m) при $n < 400$ или $m < 400$: (0,0), (2,1), (3,1), (3,2), (4,1), (4,2), (4,3), (5,1), (5,2), (5,3), (5,4), (12,4), (12,8), (32,2), (32,10), (32,22), (32,30). Есть еще пара целочисленных решений: (0,0), $(-1,-1)$, $(-1,0)$.

3.6. Для произвольного набора чисел A определим набор $A^{[k]}$ его k-сумм с повторениями как совокупность всех чисел вида $a_{i_1} + a_{i_2} + \ldots + a_{i_k}$, где $1 \leqslant i_1 \leqslant i_2 \leqslant \ldots \leqslant i_k \leqslant n$. Докажите, что при любом k набор $A^{[k]}$ определяет набор A однозначно.

Решения задач

1 Попарные суммы

1.1. Задача предлагалась на Московской олимпиаде 1962 г (2 тур, 8 класс, см. [2], задача 25.29), аналогичная задача с конкретными числами была на Санкт-Петербургской олимпиаде 1968 г (7 класс). Несколько раньше задача эта задача была опубликована в American Mathematical Monthly ([11], задача E1248a, автор — L. Moser), а перед этим — в декабрьском номере Newsletter of Canad. Math. Congress за 1955 г.

Заметим, что $\sum x_i = 4\sum a_j$. Можно считать, что числа x_i и a_j пронумерованы в порядке возрастания. Тогда $x_1 = a_1 + a_2$, $x_2 = a_1 + a_3$, $x_9 = a_3 + a_5$, $x_{10} = a_4 + a_5$. Значит, $a_3 = \frac{1}{4}\sum x_i - x_1 - x_{10}$, $a_1 = x_2 - a_3$, $a_5 = x_9 - a_3$, $a_2 = x_1 - a_1$, $a_4 = x_{10} - a_5$.

1.2. Ответ: $25\frac{1}{2}$. Обозначим $s_1(A)$ — сумму чисел набора A, $s_2(A)$ — сумму квадратов чисел из набора A. Тогда сумма чисел набора $A^{(2)}$ равна

$$s_1(A^{(2)}) = \sum_{i<j}(a_i + a_j) = (n-1)s_1(A)\,,$$

следовательно, $s_1(A) = \frac{1}{n-1}s_1(A^{(2)})$. Сумма квадратов чисел набора $A^{(2)}$ равна

$$s_2(A^{(2)}) = \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}(a_i+a_j)^2 = \frac{1}{2}\sum_{i\neq j}(a_i^2+a_j^2+2a_ia_j) = \frac{1}{2}\Bigg(\sum_{i,j=1}^{n}(a_i^2+a_j^2+2a_ia_j)-\sum_{j=1}^{n}(2a_j)^2\Bigg) = (n-2)s_2(A)+s_1(A)^2,$$

откуда $s_2(A) = \frac{1}{n-2}\left(s_2(A^{(2)}) - s_1(A)^2\right)$.

В нашем случае набор A состоит из 6 чисел, т. е. $n = 6$; $s_1(A^{(2)}) = 55$, $s_2(A^{(2)}) = 223$. Следовательно, $s_1(A) = 11$, $s_2(A) = \frac{1}{4}(223 - 121) = 25\frac{1}{2}$.

1.3. а) Например, $\{1, 1, 2, 4\}$ и $\{0, 2, 3, 3\}$.

б) Мы взяли задачу и решение из [11], задача E1248b, автор — L. Moser. Пусть a_1, a_2, a_3, a_4 — исходные числа, $S = (a_1 + a_2 + a_3 + a_4)/2$. Тогда $S - a_1$, $S - a_2$, $S - a_3$, $S - a_4$, — требуемый второй набор. Он не совпадает с исходным. Действительно, числа b_3 и b_4 — это $a_1 + a_4$ и $a_2 + a_3$, правда, неизвестно в каком порядке. Неравенство $b_3 \neq b_4$ эквивалентно неравенству $S - a_4 \neq a_1$, что означает, что минимальные числа наших двух наборов не совпадают. Значит, не совпадают и сами наборы.

1.4. Эта и следующая задачи предлагались в 1987 г на олимпиаде 239 школы С.-Петербурга ([4], с. 297, задача 79) на туре “Гран-при”, состоявшем из задач исследовательского типа. Впрочем, организаторы этого тура несколько погорячились. Решение этой задачи и задачи 1.5 содержится в статьях [12], [3].

Будем строить наборы A_n и B_n из $n = 2^k$ чисел с совпадающими наборами попарных сумм индукцией по k.

База $k = 1$, $n = 2$. $A_2 = \{0, 3\}$, $B_2 = \{1, 2\}$.

Индукционный переход. Пусть мы уже имеем два набора $|A_m| = |B_m| = 2^m$ с одинаковыми попарными суммами. Выберем такое число d, что наборы

$$A_{m+1} = A_m \cup (B_m + d), \qquad B_{m+1} = B_m \cup (A_m + d)$$

не совпадают. Проверим, что построенные наборы имеют одинаковые наборы попарных сумм. Для этого убедимся, что для всех пар $(\alpha_1, \alpha_2) \subset A_{m+1}$ найдется пара $(\beta_1, \beta_2) \subset B_{m+1}$, и это соответствие взаимно однозначно.

Случай 1. α_1, $\alpha_2 \in A_m$. Тогда мы можем взять пару (β_1, β_2), такую что β_1, $\beta_2 \in B_m$.

Случай 2. α_1, $\alpha_2 \in B_m + d$. Тогда мы можем взять пару (β_1, β_2), такую что β_1, $\beta_2 \in A_m + d$.

Случай 3. $\alpha_1 \in A_m$, $\alpha_2 \in B_m + d$. Тогда мы можем взять пару $(\alpha_1 + d, \alpha_2 - d)$; $\alpha_1 + d \in A_m + d$, $\alpha_2 - d \in B_m$.

1.5. Пусть A — набор из $n \neq 2^k$ чисел. Проверим индукцией по p, что стандартные симметрические полиномы (степенные суммы)

$$s_p(x_1, x_2, \dots) = x_1^p + x_2^p + \dots\,,$$

вычисленные для набора A, однозначно определяются значениями степенных сумм для набора $A^{(2)}$.

Во первых, $s_1(A^{(2)}) = C_{n-1}^1 s_1(A)$, поэтому $s_1(A) = (C_{n-1}^1)^{-1}s_1(A^{(2)})$.

Далее,

$$
\begin{aligned}
s_p(A^{(2)}) &= \sum_{i<j}(a_i+a_j)^p = \frac{1}{2}\sum_{i\neq j}(a_i+a_j)^p = \frac{1}{2}\sum_{i\neq j}\sum_{r=0}^{p} C_p^r a_i^r a_j^{p-r} = \frac{1}{2}\sum_{r=0}^{p} C_p^r \sum_{i\neq j} a_i^r a_j^{p-r} = \\
&= \frac{1}{2}\sum_{r=0}^{p} C_p^r \big(s_r(A)s_{p-r}(A) - s_p(A)\big) = \frac{1}{2}\sum_{r=1}^{p-1} C_p^r s_r(A)s_{p-r}(A) + (n-2^{p-1})s_p(A)\,,
\end{aligned}
\tag{3}
$$

в последнем равенстве мы воспользовались тем, что $s_0(A)=n$. По предположению индукции все слагаемые в первой сумме в правой части однозначно определяются степенными суммами набора $A^{(2)}$. Поэтому $s_p(A)$ при $n\neq 2^{p-1}$ тоже однозначно определяется степенными суммами набора $A^{(2)}$.

Итак, мы проверили, что степенные суммы $s_1(A)$, $s_2(A)$, ... , $s_n(A)$ однозначно определяются набором $A^{(2)}$. Но тогда и исходные числа, составляющие набор A, также определяются набором $A^{(2)}$ однозначно. Действительно, обозначим

$$\sigma_k(A) = \sum_{1\leqslant i_1<\dots<i_n\leqslant n} a_{i_1}a_{i_2}\dots a_{i_n}$$

k-ю элементарную симметрическую функцию набора A. Тогда нетрудно проверить равенство (формула Ньютона)

$$n\sigma_n = \sigma_{n-1}s_1 - \sigma_{n-2}s_2 + \sigma_{n-3}s_3 - \dots + (-1)^n\sigma_1 s_{n-1}\,,$$

которое позволяет по числам $s_1(A)$, $s_2(A)$, ... последовательно находить числа $\sigma_1(A)$, $\sigma_2(A)$, ... Зная же все числа $\sigma_i(A)$, мы найдем элементы набора A как корни уравнения

$$x^n - \sigma_1 x^{n-1} + \sigma_2 x^{n-2} - \dots + (-1)^{n-2}\sigma_{n-2}x^2 + (-1)^{n-1}\sigma_{n-1}x + (-1)^n\sigma_n = 0\,. \tag{4}$$

Отметим, что задача 1.2 была существенной подсказкой для изобретения этого решения.

1.6. а) Наборы, имеющие совпадающие множества 2-сумм, должны состоять из 2^k элементов. То, что не существует таких наборов из четырех чисел, — это утверждение следующего пункта задачи. Вот пример наборов из 8 чисел ([10])

$$\{\pm1,\pm9,\pm15,\pm19\},\quad \{\pm2,\pm6,\pm12,\pm22\},\quad \{\pm3,\pm7,\pm13,\pm21\}.$$

Вообще [9], если $X_1=\{a,b,c,d\}$ — произвольный набор чисел, то наборы $X=X_1\cup(-X_1)$, $Y=Y_1\cup(-Y_1)$, $Z=Z_1\cup(-Z_1)$, где

$$
\begin{aligned}
Y_1 &= \big\{\tfrac{1}{2}(-a+b+c+d), \tfrac{1}{2}(a-b+c+d), \tfrac{1}{2}(a+b-c+d), \tfrac{1}{2}(a+b+c-d)\big\},\\
Z_1 &= \big\{\tfrac{1}{2}(a+b+c+d), \tfrac{1}{2}(a+b-c-d), \tfrac{1}{2}(a-b+c-d), \tfrac{1}{2}(a-b-c+d)\big\}\,,
\end{aligned}
$$

имеют одинаковые наборы 3-сумм. Предыдущий пример — частный случай этой конструкции для $X_1=\{-1,9,15,-19\}$.

б) Мы следуем рассуждениям из [9]. Пусть A — набор из четырех чисел. Мы всегда можем сдвинуть наши наборы по числовой оси, поэтому без потери общности можно считать, что $s_1(A)=0$. Воспользуемся тогда формулами (3) при $n=4$:

$$
\begin{aligned}
&s_1(A^{(2)}) = 0\\
&s_2(A^{(2)}) = 2s_2(A)\\
&s_3(A^{(2)}) = 0\\
&s_4(A^{(2)}) = -4s_4(A) + 3s_2^2(A)\\
&s_5(A^{(2)}) = -12s_5(A) + 10s_2(A)s_3(A)\\
&s_6(A^{(2)}) = -24s_6(A) + 15s_2(A)s_4(A) + 10s_3^2(A)
\end{aligned}
$$

Как видим, величины $s_1(A)=0$, $s_2(A)$, $s_4(A)$ однозначно определяются суммами $s_p(A^{(2)})$. Заметим, что последнее уравнение является квадратным относительно $s_3(A)$. Действительно, величину $s_6(A)$ можно представить как полином от $s_1(A)$, $s_2(A)$, $s_3(A)$, $s_4(A)$, причем в этот полином $s_3(A)$ входит в степени не выше 2. На самом деле

$$s_6 = \frac{3}{4}s_4s_2 + \frac{3}{4}s_4s_1^2 + \frac{1}{3}s_3^2 + 0s_3s_2s_1 - \frac{2}{3}s_3s_1^3 - \frac{1}{8}s_2^3 - \frac{3}{8}s_2^2s_1^2 + \frac{3}{8}s_2s_1^4 - \frac{1}{24}s_1^6 = \tag{5}$$

$$= \frac{3}{4}s_4s_2 + \frac{1}{3}s_3^2 - \frac{1}{8}s_2^3. \tag{6}$$

Здесь равенство (5) — это общий факт, который трудно установить, не пользуясь теорией симметрических функций или компьютером, а вот равенство (6) — его редукция к случаю $s_1 = 0$, которая, собственно, нам и требуется, — уже может быть получено "голыми руками". Таким образом величину $s_3(A)$ можно найти, решая квадратное уравнение. Поэтому величина $s_3(A)$ может принимать не более двух различных значений, и, следовательно, существует не более двух наборов с заданным семейством 2-сумм.

Конечно, можно было бы не пользоваться столь высокими материями при решении этой задачи. Располагая набором из четырех чисел $a_1 \leqslant a_2 \leqslant a_3 \leqslant a_4$ и пытаясь придумать еще один набор с наименьшим числом $a_1 + x$, читатель с легкостью догадается, наблюдая за наибольшими и наименьшими из попарных сумм, что остальные числа конструируемого набора суть $a_2 - x$, $a_3 - x$, $a_4 + x$. Отсюда легко получить описание общих наборов с одинаковыми семействами 2-сумм:

$$X = \{a, b, c, d\} \quad \text{и} \quad Y = \left\{\tfrac{1}{2}(-a+b+c+d), \tfrac{1}{2}(a-b+c+d), \tfrac{1}{2}(a+b-c+d), \tfrac{1}{2}(a+b+c-d)\right\}.$$

Конструкция набора Y напоминает эрудированному читателю о том, что если уж какое-нибудь натуральное число (в данном случае, $s_2(A)$) нам случилось представить в виде суммы четырех квадратов, то это представление далеко не единственно.

в) Решение этой задаче аналогично решению предыдущего пункта, только значительно более громоздкое.

1.7. Задачу предложили А. Храбров и Н. Гуревич. Ответ: да, исходные числа всегда можно определить. Пусть a_1, a_2, a_3 — модули задуманных чисел. Добавим к набору из 12 сумм/разностей три раза число 0. Полученный набор из 15 чисел — это множество попарных сумм для набора чисел a_1, a_2, a_3, $-a_1$, $-a_2$, $-a_3$. Как мы знаем, для шести чисел множество попарных сумм однозначно определяет исходные числа. Но Надя не знает деталей этого соответствия, сумеет ли она их найти? Да, сумеет. Например, она может внимательно прочитать решение задачи 1.5 и найти величины s_1, s_2, … , s_6 для Сашиного набора. После этого Надя найдет и симметрические функции $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_6$ для Сашиного набора, а потом и сам набор — как набор корней (на самом деле, бикубического) уравнения (4). Последнее можно совершить, пользуясь формулой Кардано.

1.8. Упоминается как тривиальность в [7].

Докажем индукцией по n, что количество различных 2-сумм набора из $n \geqslant 2$ попарно различных чисел может быть любым натуральным числом из диапазона $[2n-3, C_n^2]$.

База. $n = 2$ — очевидно.

Переход. Пусть утверждение верно для $n = k$. Докажем его при $n = k+1$.

Пусть $a \in [2k-1, C_{k+1}^2]$. Рассмотрим два случая:

Случай 1. $2k-1 \leqslant a \leqslant 3k-3$. Искомым множеством является $A = [1,k] \cup \{a-k+2\}$. Очевидно, множество 2-сумм набора A есть $B = [3, a+2]$ и множество B состоит из a элементов.

Случай 2. $3k-2 \leqslant a \leqslant C_{k+1}^2$. По предположению индукции существует набор A такой, что множество 2-сумм этого набора состоит из $a-k$ элементов. Пусть $c > 2\max A$, $B = A \cup \{c\}$. Тогда множество 2-сумм набора B состоит из a элементов ($a-k$ сумм исходного набора и k сумм с участием c).

2 Суммы большей кратности

Роль уравнений (1), (2) в задаче о наборах 3- и 4-сумм впервые отметили Selfridge J.L. и Straus E.G. [12] в 1958 г. Они решили эти уравнения и доказали, что набор может быть исключительным только для n, равных корням этих уравнений. Фомин и Ижболдин [3] независимо установили этот факт в начале 90-х и дали пример исключительных наборов для случая тройных сумм при $n = 27$ и $n = 486$.

2.1. а) Достаточно проверить, что числа $2^{2\cdot 3^{m-2}} - 1 = \left(2^{3^{m-2}} - 1\right)\left(2^{3^{m-2}} + 1\right)$ и $\left(2^{3^{m-1}} - 1\right)$ не делятся на 3^m. Выражения в скобках, где вычитается единица, не делятся даже на 3. Докажем индукцией по m, что $2^{3^{m-2}} + 1$ делится на 3^{m-1}, но не на 3^m. Действительно,

$$2^{3^{m-2}} + 1 = \left(2^{3^{m-3}} + 1\right)\left(2^{2\cdot 3^{m-3}} - 2^{3^{m-3}} + 1\right).$$

Здесь первый множитель делится на 3^{m-2} и не делится на 3^{m-1} по предположению индукции. Второй множитель делится на 3, но не делится на 9.

б) [12] Запишем уравнение в виде

$$n + \frac{2\cdot 3^{p-1}}{n} = 2^p + 1\,.$$

Тогда, по теореме Виета, n и $\frac{2\cdot 3^{k-1}}{n}$ — корни нашего квадратного уравнения, значит, они имеют вид $n_1 = 2^a 3^b$, $n_2 = 2^{1-a}3^{p-b-1}$, где $a = 0$ или 1. Мы можем считать, что $n_1 \leqslant n_2$, тогда $b \leqslant p - b - 1$ и

$$2^p \equiv -1 \pmod{3^b}.$$

Поскольку 2 — первообразный корень по модулю 3^b,

$$p \equiv 3^{b-1} \pmod{2\cdot 3^{b-1}}. \tag{7}$$

Тогда $3^{p-b-1} \leqslant n_2 < 2^p < 3^{2p/3}$, следовательно, $p < 3(b+1)$. Теперь из (7) получаем

$$3^{b-1} \leqslant p < 3(b+1)\,.$$

Следовательно, $b < 4$.

При $b = 3$ $p \equiv 9 \pmod{18}$ и $p < 12$, значит, $p = 9$. При $b = 2$ $p \equiv 3 \pmod 6$ и $p < 9$, значит, $p = 3$. При $b = 1$ $p \equiv 1 \pmod 2$ и $p < 6$, значит, $p = 1, 3, 5$. При $b = 0$ $p < 3$.

Для полноты картины приведем разложения на множители квадратных трехчленов для случая целых корней.

$$\begin{array}{llll} p=1 & \frac{1}{2}(n-1)(n-2)\,, & p=2 & \frac{1}{2}(n-2)(n-3)\,,\\ p=3 & \frac{1}{2}(n-3)(n-6)\,, & p=5 & \frac{1}{2}(n-6)(n-27)\,,\\ p=9 & \frac{1}{2}(n-27)(n-486)\,. & & \end{array} \tag{8}$$

2.2. [12, 3]. Как и в задаче 1.5, пусть A — исходный набор из n чисел, $A^{(3)}$ — набор его 3-сумм, $s_p(x_1, x_2, \dots)$ — степенные суммы. Тогда

$$\begin{aligned} 6s_k(A^{(3)}) &= \sum_{i_1,i_2,i_3=1}^{n} (x_{i_1} + x_{i_2} + x_{i_3})^k - 3\sum_{i_1,i_2=1}^{n} (2x_{i_1} + x_{i_2})^k + 2\sum_{i=1}^{n} (3x_i)^k = \\ &= \sum_{i_1,i_2,i_3=1}^{n} \sum_{\ell_1+\ell_2+\ell_3=k} \frac{k!}{\ell_1!\ell_2!\ell_3!} x_{i_1}^{\ell_1} x_{i_2}^{\ell_2} x_{i_3}^{\ell_3} - 3\sum_{i_1,i_2=1}^{n} \sum_{\ell=0}^{k} C_k^\ell (2x_{i_1})^\ell x_{i_2}^{k-\ell} + 2\cdot 3^k \sum_{i=1}^{n} x_i^k = \\ &= \sum_{\ell_1+\ell_2+\ell_3=k} \frac{k!}{\ell_1!\ell_2!\ell_3!} s_{\ell_1} s_{\ell_2} s_{\ell_3} - 3\sum_{\ell=0}^{k} C_k^\ell 2^\ell s_\ell s_{k-\ell} + 2\cdot 3^k s_k\,. \end{aligned}$$

Сокращая на 3 и пользуясь тем, что $s_0 = n$, находим, что коэффициент при $s_k(A)$ в правой части равен

$$f(n,k) = n^2 - (2^k+1)n + 2\cdot 3^{k-1}\,. \tag{9}$$

Таким образом, правая часть этого равенства имеет вид $f(n,k)s_k(A) + G$, где G — выражение, зависящее от n и $s_i(A)$, $i<k$. Как установлено в предыдущей задаче, $f(n,k)\neq 0$ при $n\neq 3$, 6, 27, 486. Поэтому, как и в задаче 1.5, мы получаем, что степенные суммы набора A однозначно определяются степенными суммами набора $A^{(3)}$. Поэтому в этом случае набор A однозначно восстанавливается по $A^{(3)}$.

2.3. а) [3], [9]. Для каждого набора $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ вычислим его среднее $\bar a = (a_1 + a_2 + \ldots + a_n)/n$ и построим симметричный набор

$$A' = \{2\bar a - a_1, 2\bar a - a_2, \ldots, 2\bar a - a_n\}\,.$$

Будем говорить, что набор A несимметричен, если $A\neq A'$. Если наборы m-сумм A и A' совпадают, будем называть набор A m-самосопряженным.

Докажем, что если набор A из $2k$ чисел несимметричен, то наборы A и A' имеют одинаковые наборы k-сумм. Действительно, для каждых k элементов $a_{i_1}, \ldots, a_{i_k}$ набора A возьмем те k элементов $b_{j_1}, \ldots, b_{j_k}$ набора A', для которых множество индексов $\{j_1, \ldots, j_k\}$ представляет собой дополнение множества индексов $\{i_1, \ldots, i_k\}$ до всего множества $\{1, 2, \ldots, 2k\}$. Тогда

$$b_{j_1} + \ldots + b_{j_k} = (2\bar a - a_{j_1}) + \ldots + (2\bar a - a_{j_k}) = 2k\bar a - (a_{j_1} + \ldots + a_{j_k}) = a_{i_1} + \ldots + a_{i_k}\,.$$

б) Если у двух наборов совпадают наборы k-сумм, то, как мы убедились в задаче 1.5, суммы чисел в этих наборах равны. Пусть S — эта сумма чисел. Тогда наборы k-сумм и $(n-k)$-сумм, получаются друг из друга симметрией относительно числа $S/2$.

2.4. В обоих пунктах задачи ответ — нет.

Следующие примеры приведены в [3]. Достаточно предъявить несимметричный 3-самосопряженный набор из 27 и из 486 элементов. Вот они:

$$n = 27: \quad A = \{0^5, 1^{10}, 2^{10}, 3^2\}\,, \qquad n = 486: \quad B = \{0^{22}, 1^{176}, 2^{231}, 3^{56}, 4^1\}\,.$$

Проверим, например, что набор A 3-самосопряжен. Действительно, нетрудно проверить, что его 3-суммы представляют собой следующий набор:

$$A^{(3)} = \{0^{10}, 1^{100}, 2^{325}, 3^{640}, 4^{725}, 5^{640}, 6^{325}, 7^{100}, 8^{10}\}.$$

Например, число 3 можно получить как сумму $0+0+3$ (20 вариантов), $1+1+1$ ($C_{10}^3 = 120$ вариантов) или $0+1+2$ (500 вариантов) — всего 640 вариантов. Далее, как мы видим, набор 3-сумм симметричен относительно числа 4, а среднее арифметическое всех чисел набора A равно $4/3$. Поэтому набор A', симметричный набору A, имеет тот же набор 3-сумм. В самом деле,

$$(2\cdot\frac{4}{3} - a_1) + (2\cdot\frac{4}{3} - a_2) + (2\cdot\frac{4}{3} - a_3) = 8 - (a_1 + a_2 + a_3)\,.$$

Еще примеры. Следующее рассуждение и примеры мы взяли в [6]. Как показывает решение задачи 2.2, мы можем пытаться восстановить по набору $A^{(3)}$ набор A, последовательно выражая степенные суммы $s_k(A)$ через степенные суммы $s_k(A^{(3)})$. Это всегда будет удаваться, если коэффициент $f(n,k)$, заданный формулой (9), не равен нулю. Из разложений (8) мы видим, что наименьшее k, при котором $f(n,k) = 0$, — это $k = 5$.

Попробуем найти набор A из 27 чисел, не симметричный относительно нуля, и такой, чтобы симметричный ему набор $-A$ имел то же семейство 3-сумм. Если бы это удалось, то из соотношений $s_k(A^{(3)}) = s_k\big((-A)^{(3)}\big)$ следовало бы, что при при нечетных k $s_k(A^{(3)}) = 0$ и, следовательно, $s_1(A) = s_3(A) = 0$. Далее, нам было бы проще искать набор, если в нем числа повторяются по нескольку раз. Пусть, скажем, у нас имеется всего три различных числа: число a_i входит в набор с кратностью n_i, $i = 1, 2, 3$. Тогда мы получаем систему уравнений

$$\begin{aligned} n_1 + n_2 + n_3 &= 27 \\ n_1a_1 + n_2a_2 + n_3a_3 &= 0 \\ n_1a_1^3 + n_2a_2^3 + n_3a_3^3 &= 0 \end{aligned}$$

В качестве a_i будем подбирать целые числа. Если попробовать в качестве a_n взять арифметическую прогрессию, то небольшие эксперименты с системой показывают, что разность этой прогрессии должна делиться на 3. Возьмем $a_1 = -4$, $a_2 = -1$, $a_3 = 2$, тогда $n_1 = 1$, $n_2 = 16$, $n_3 = 10$. Найденный набор $A = \{-4, -1^{16}, 2^{10}\}$ действительно подходит, поскольку набор $A^{(3)}$ — симметричный:

$$A^{(3)} = \{-6^{120}, -3^{720}, 0^{1245}, 3^{720}, 6^{120}\}.$$

Вот еще примеры наборов: $\{-5^2, -2^{10}, 1^1 0, 4^5\}$ (этот пример только масштабированием и сдвигом отличается от примера, разобранного в начале решения), $\{-7^1, -4^5, -1^{10}, 2^6, 5^5\}$, $\{-8^2, -5^4, -2^6, 1^8, 4^3, 7^4\}$, и даже $\{-14^2, -11^1, -8^3, -5^3, -2^3, 1^6, 4^2, 7^3, 10^1, 13^3\}$.

Аналогично, отталкиваясь от прогрессии $a_1 = -7$, $a_2 = -4$, $a_3 = -1$, $a_4 = 2$, $a_5 = 5$ и системы уравнений

$$\begin{aligned}
n_1 + n_2 + n_3 + n_4 + n_5 &= 486\\
(-7)n_1 + (-4)n_2 + (-1)n_3 + 2n_4 + 5n_5 &= 0\\
(-7)^3 n_1 + (-4)^3 n_2 + (-1)^3 n_3 + 2^3 n_4 + 5^3 n_5 &= 0\\
(-7)^5 n_1 + (-4)^5 n_2 + (-1)^5 n_3 + 2^5 n_4 + 5^5 n_5 &= 0\\
(-7)^7 n_1 + (-4)^7 n_2 + (-1)^7 n_3 + 2^7 n_4 + 5^7 n_5 &= 0,
\end{aligned}$$

мы найдем решение $n_1 = 1$, $n_2 = 56$, $n_3 = 231$, $n_4 = 176$, $n_5 = 22$. Н-да, 7^7, а что поделаешь. Итак, мы нашли набор $B = \{-7, -4^{56}, -1^{231}, 2^{176}, 5^{22}\}$. То, что этот пример подходит, устанавливается рутинной проверкой с выписыванием семейства 3-сумм:

$$B^{(3)} = \{-15^{1540}, -12^{40656}, -9^{392161}, -6^{1800568}, -3^{4358893}, 0^{??}, 3^{4358893}, 6^{1800568}, 9^{392161}, 12^{40656}, 15^{1540}\}$$

(кратность нуля в этом наборе несущественна).

2.5. [3], [12] Разложим на множители данные полиномы при $p \leqslant 7$:

$$\begin{aligned}
&p = 1 \quad \frac{1}{6}(n-1)(n-2)(n-3), && p = 2 \quad \frac{1}{6}(n-2)(n-3)(n-4),\\
&p = 3 \quad \frac{1}{6}(n-3)(n-4)(n-8), && p = 4 \quad \frac{1}{6}(n-4)(n^2-23n+96),\\
&p = 5 \quad \frac{1}{6}(n-8)(n^2-43n+192), && p = 6 \quad \frac{1}{6}(n-12)(n^2-87n+512),\\
&p = 7 \quad \frac{1}{6}(n-8)(n^2-187n+3072),
\end{aligned}$$

Далее будем считать, что $p \geqslant 8$. Запишем изучаемое уравнение в виде

$$n\big(n - (3 \cdot 2^{p-1} + 3)\big) + (2 + 3 \cdot 2^{p-1} + 2 \cdot 3^p) = \frac{6 \cdot 4^{p-1}}{n}. \tag{10}$$

Нетрудно проверить, что $2 + 3 \cdot 2^{p-1} + 2 \cdot 3^p$ не делится на 16. Тогда либо n, либо $6 \cdot 4^{p-1}/n$ не делится на 16.

Случай 1. n не делится на 16. Так как $6 \cdot 4^{p-1}$ делится на n, то $n = 2^m$ или $n = 3 \cdot 2^m$. Поскольку n не делится на 16, $n \in \{1, 2, 4, 8, 3, 6, 12, 24\}$. Но при $n = 6$ или $n = 24$ равенство (10) не может быть верно, потому что при этом левая часть дает остаток 2 по модулю 3, а правая — остаток 1.

Случай 2. $6 \cdot 4^{p-1}/n$ не делится на 16. Число $6 \cdot 4^{p-1}/n$ является делителем числа $6 \cdot 4^{p-1}$, и потому оно равно 2^m или $3 \cdot 2^m$, и, как и в предыдущем случае, $6 \cdot 4^{p-1}/n \leqslant 24$. Следовательно, $n > 6 \cdot 4^{p-1}/24 > 6 \cdot 2^{p-1}$ (поскольку $p \geqslant 8$). Тогда

$$6 \cdot 4^{p-1} = 6 \cdot 2^{p-1}(6 \cdot 2^{p-1} - 5 \cdot 2^{p-1}) < n(n - 5 \cdot 2^{p-1}) < n\big(n - (3 \cdot 2^{p-1} + 3)\big) = \frac{6 \cdot 4^{p-1}}{n} - (2 + 3 \cdot 2^{p-1} + 2 \cdot 3^p) < 6 \cdot 4^{p-1}.$$

Противоречие.

Значительно более скучными рассуждениями и с использованием компьютера в [5] доказано, что уравнение

$$n^4 - (2^{p+1} + 6)n^3 + (4 \cdot 3^p + 3 \cdot 2^{p+1} + 11)n^2 - (4 \cdot 3^p + 3 \cdot 2^{2p+2} + 6)n + 24 \cdot 5^{p-1} = 0$$

не имеет решений в натуральных числах и тем самым наборы чисел однозначно определяются наборами своих 5-сумм.

2.6. Ответ: нет, неверно. Такие четыре набора существуют [8]. Например, $X = \{-8, -3, 1, 2, 3, 5\}$, $Y = \{-7, -3, 0, 1, 2, 7\}$, $-X$ и $-Y$.

2.7. [8] Очень громоздко. В стиле решения задачи 1.6.

2.8. Мы взяли это утверждение из [12]. Воспользуемся формулой из задачи 3.2. Домножим обе части на $k!$

$$k!f(n,k) = \sum_{i=1}^{k}(-1)^{i-1}i^{p-1}k!C_n^{k-i}\,.$$

Заметим, что при $i \neq k$ слагаемое в правой части делится на n, а при $i = k$ слагаемое по модулю равно $k^{p-1}k!$. Следовательно, выражение $f(n,k)$ может быть равно нулю только в том случае, если $k^{p-1}k!$ делится на n. И наоборот: если $k^{n-1}k!$ не делится на n, то $f(n,k) \neq 0$ при $p = 1,\ 2,\ \dots,\ n$. Таким образом, если $k^{n-1}k!$ не делится на n, то в силу утверждения задачи 3.2 и аналогично задаче 1.5 значения симметрических многочленов $s_p(A)$ однозначно определяются значениями симметрических многочленов $s_p(A^{(k)})$, при $p = 1$, $2,\ \dots,\ n$, откуда следует, что набор A определен однозначно.

2.9. Фомин и Ижболдин [3], теорема 5.1, сформулировали это утверждение для набора B с линейно независимыми над $\mathbb{Q}$ элементами. Но на самом деле их доказательство (которое мы здесь приводим) использует только более слабое свойство набора B из нашей формулировки.

Для каждого множества чисел X пусть Σ_X обозначает сумму элементов множества X.

Зафиксируем два числа $x, y \in A$. Существует C_{n-2}^{k-1} пар множеств (X, Y) таких, что $X, Y \subset A$, множества X и Y содержат по k элементов, а их симметрическая разность $X \triangle Y = \{x, y\}$. При этом для любой такой пары $x - y = \Sigma_X - \Sigma_Y = \Sigma_{X\setminus Y} - \Sigma_{Y\setminus X}$.

Заметим, кстати, что для любой пары подмножеств $X, Y \in B$, зная разность $\Sigma_X - \Sigma_Y$, можно однозначно восстановить и множество $X \setminus Y$, и множество $Y \setminus X$.

Для каждой пары (X, Y) мы имеем соответствующие подмножества X', Y' в множестве B с теми же суммами чисел, т.е. $x - y = \Sigma_X - \Sigma_Y = \Sigma_{X'} - \Sigma_{Y'} = \Sigma_{X'\setminus Y'} - \Sigma_{Y'\setminus X'}$. Поскольку числа x и y фиксированы, множества $S = X' \setminus Y' \subset B$ и $S = Y' \setminus X' \subset B$ на самом деле не зависят от выбора пары (X, Y). Значит, для любой пары k-элементных подмножеств $U \subset A$, $V \subset A$ с разностями $U \setminus V = \{x\}$, $V \setminus U = \{y\}$ (существует C_{n-2}^{k-1} таких пар) выполнено $U' \setminus V' = S$, $V' \setminus U' = T$. Допустим, что множество S состоит из p элементов. Тогда можно сконструировать C_{n-2p}^{k-p} пар подмножеств множества B с указанными разностями подмножеств. Так как $C_{n-2p}^{k-p} < C_{n-2}^{k-1}$ при $p > 1$, то $p = 1$.

Итак, мы получили соответствие, которое каждой (упорядоченной) паре чисел (x, y) из множества A сопоставляет такую пару (p, q) из B, что $x - y = p - q$. В силу свойств множества B, это соответствие взаимно однозначно. Возьмем теперь три пары (x, y), (y, z) и (x, z), пусть им соответствуют пары (p, q), (r, s), (u, v). Тогда $x - y = p - q$, $y - z = r - s$, $x - z = u - v$, следовательно, $u - v = p + r - q - s$. Значит, пары (p, q) и (r, s) должны иметь непустое пересечение.

Рассмотрим теперь все пары (x, y_i), $i = 1,\ 2,\ \dots,\ n-1$, и соответствующие им пары в множестве B. Будем считать, что $n > 4$. (Случай $n = 4$ — это простая задача, которую можно решить рассуждениями похожими на решение задачи 1.1.) При $n > 4$ очевидна следующая “теорема Хелли”: если $n-1$ пар выбраны в множестве из n элементов так, что любые две пары имеют пересечение, то все эти пары имеют общую точку. Таким образом, все рассматриваемые пары из множества B имеют общий элемент $\bar{x}$. Очевидно, он занимает одно и то же место во всех этих упорядоченных парах.

Итак, все двойственные пары должны иметь вид а) $(\bar{x}, y_i')$ или б) $(y_i', \bar{x})$.

В случае а) $\sum(x - x_i) = \sum(\bar{x} - y_i')$, следовательно, $nx - \Sigma_A = n\bar{x} - \Sigma_B$, откуда $x = \bar{x}$ и поэтому $y_i = y_i'$, т.е. $A = B$.

В случае б) $\sum(x - x_i) = \sum(y_i' - \bar{x})$, следовательно, $nx - \Sigma_A = \Sigma_B - n\bar{x}$, откуда $x + \bar{x} = \frac{2\Sigma}{n}$, где $\Sigma = \Sigma_A = \Sigma_B$ и $y_i + y_i' = x + \bar{x} = \frac{2\Sigma}{n}$, т.е. наборы A и B симметричны друг другу относительно точки Σ/n. Если $n > k$, но $n \neq 2k$, рассмотрим произвольный k-элементный набор $X \subset A$. Пусть $\bar{X} \subset B$ —набор, симметричный набору X относительно точки Σ/n, тогда $\Sigma_{\bar{X}} = \frac{2k\Sigma}{n} - \Sigma_X$. Пусть $X' \subset B$ — набор, двойственный к X. Заметим, что

$$\Sigma_{B\setminus\bar{X}} - \Sigma_{X'} = \frac{n-2k}{n}\Sigma\,, \tag{11}$$

причем после приведения подобных членов слагаемые в левой части входят в сумму только с коэффициентами ± 1. В силу свойства набора B, выражение в левой части не зависит от выбора набора X. Покажем, что это может быть только в том случае, когда $2k = n$ (и $X' = B \setminus \bar{X}$), это завершит доказательство. Действительно, если сумма в левой части (11) содержит хотя бы одно ненулевое слагаемое, скажем, $-b$, то рассмотрим произвольный k-элементный набор $Y' \subset B$, не содержащий число b. Если при построении равенства (11) в качестве набора X взять набор, двойственный к Y', то левая часть этого равенства не будет содержать слагаемого $-b$. Аналогично, если сумма в левой части (11) содержит ненулевое слагаемое с коэффициентом $+1$, скажем, $+b$, то в качестве набора X рассмотрим произвольный набор, содержащий точку $\frac{2\Sigma}{n} - b$.

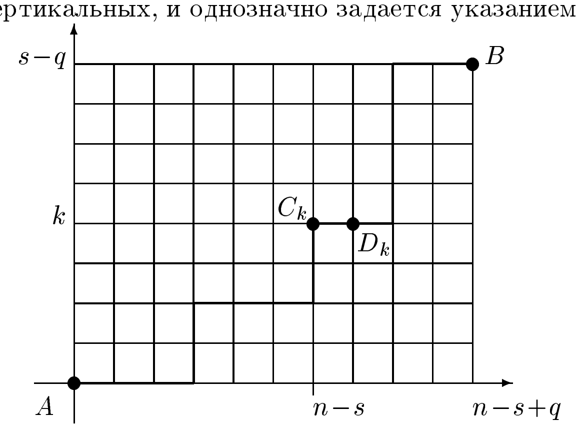
3 Добавление после промежуточного финиша

3.1. а) Этот сюжет разобран в [1], глава 6. Если бы нас не беспокоило, есть пустые конверты или нет, мы имели бы r^k способов разложить фотографии. Заметим тогда, что существует ровно $(r-m)^k$ способов разложить фотографии по конвертам так, чтобы m данных конвертов оказались пустыми. Поскольку выбрать m конвертов из r можно C_r^m способами, окончательную формулу получаем, пользуясь принципом включения-исключения.

б) Этот сюжет разобран в [1], глава 5. Для удобства введем новый параметр суммирования $k = s - v$, тогда нам нужно доказать, что

$$C_n^{s-q} = \sum_{v=q}^{s} C_{n-v}^{n-s} C_{v-1}^{q-1} = \sum_{k=0}^{s-q} C_{n-s+k}^{n-s} C_{s-k+1}^{q-1}\,. \tag{12}$$

Рассмотрим пути, идущие из точки $A(0,0)$ по линиям сетки вправо или вверх в точку $B(n-s+q, s-q)$. Количество таких путей равно C_n^{s-q}, поскольку каждый такой путь составлен из n отрезков, горизонтальных и вертикальных, и однозначно задается указанием, какие $s-q$ из этих отрезков являются вертикальными.



Подсчитаем количество этих путей другим способом. Проведем вертикальную прямую $x = n - s$ и на каждом пути отметим самую высокую точку, принадлежащую этой прямой. Для каждой точки $C_k(n-s, k)$ рассмотрим все пути, на которых она отмечена. Чтобы получить такой путь, нужно от точки A произвольным способом дойти до точки C_k (всего существует C_{n-s+k}^{n-s} таких путей, поскольку длина такого пути равна $n-s+k$ и он содержит $n-s$ горизонтальных отрезков), потом пройти по горизонтальному отрезку C_kD_k, и далее — произвольным образом от точки $D_k(n-s+1, k)$ до точки B (C_{s-k-1}^{q-1} способов выбора). Таким образом, существует $C_{n-s+k}^{n-s} C_{s-k-1}^{q-1}$ путей, у которых точка C_k — отмеченная. Суммируя по k, получаем как раз выражение в правой части (12).

в) [8] Из очевидного тождества

$$s_{\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_m} = s_{\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_{m-1}} \cdot s_{\alpha_m} - s_{\alpha_1+\alpha_m,\alpha_2,\ldots,\alpha_{m-1}} - s_{\alpha_1,\alpha_2+\alpha_m,\ldots,\alpha_{m-1}} - s_{\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_{m-1}+\alpha_m}$$

по индукции сразу получаем, что при натуральных α_1, α_2, ... , α_m коэффициент при $s_{\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_m}$ в выражении $s_{\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_m}$ через симметрические функции s_i равен $(-1)^m(m-1)!$.

Далее, если коэффициенты p_k могут принимать нулевые значения, то

$$s_{p_1,\ldots,p_{k-1},0} = (n-k+1)s_{p_1,\ldots,p_{k-1}}\,. \tag{13}$$

Если теперь ровно t чисел среди p_1, ... , p_k равны нулю, то не умаляя общности, мы можем полагать, что $\{p_1,\ldots,p_k\} = \{\ell_1,\ldots,\ell_{k-t},0,\ldots,0\}$, где все ℓ_i положительны. Последовательно применяя (13), находим, что

$$s_{p_1,\ldots,p_k} = (n-k+1)(n-k+2)\ldots(n-k+t)s_{\ell_1,\ldots,\ell_{k-t}}$$

Осталось воспользоваться наблюдением из первого абзаца решения.

3.2. [8].

$$k!s_p(A^{(k)}) = \sum_{*}(a_{i_1}+\ldots+a_{i_k})^p = \sum_{*}\sum_{\diamond}\frac{p!}{p_1!\ldots p_k!}\,a_{i_1}^{p_1}\ldots a_{i_k}^{p_k} =$$

$$= \sum_{\diamond}\frac{p!}{p_1!\ldots p_k!}\sum_{*}a_{i_1}^{p_1}\ldots a_{i_k}^{p_k} = \sum_{\diamond}\frac{p!}{p_1!\ldots p_k!}\,s_{p_1,\ldots,p_k}(A)\,, \quad (14)$$

где сумма, помеченная звездочкой, обозначает суммирование по всевозможным упорядоченным наборам $\{i_1, i_2, \ldots, i_k\} \subset A$, а сумма, помеченная ромбиком, обозначает суммирование по всевозможным упорядоченным наборам неотрицательных чисел $(p_1, \ldots, p_k)$, $\sum p_i = p$. Как мы знаем из задачи 3.1в), коэффициент K при $s_p(A)$ в самой правой части (14) равен

$$K = \sum_{t=0}^{k-1}\frac{(n-k+t)!}{(n-k)!}\cdot(-1)^{k-t-1}\cdot(k-t-1)!\sum_{\square}\frac{p!}{p_1!\ldots p_k!}\,,$$

где сумма, помеченная квадратиком, обозначает суммирование по всевозможным упорядоченным наборам неотрицательных чисел $(p_1, \ldots, p_k)$, $\sum p_i = p$, среди которых в точности t чисел равны нулю. В силу результата задачи 3.1а),

$$\sum_{\square}\frac{p!}{p_1!\ldots p_k!} = C_k^t\sum_{\ell=1}^{k-t}(-1)^{k-t-\ell}C_{k-t}^{\ell}\ell^k\,.$$

Подставляя это выражение в предыдущее равенство, находим

$$K = \sum_{t=0}^{k-1}\frac{(n-k+t)!}{(n-k)!}\cdot(-1)^{k-t-1}\cdot(k-t-1)!C_k^t\sum_{\ell=1}^{k-t}(-1)^{k-t-\ell}C_{k-t}^{\ell}\ell^k =$$

$$\underset{v:=k-t}{=}\sum_{v=1}^{k}\frac{(n-v)!}{(n-k)!}\cdot(-1)^{v-1}\cdot(v-1)!\frac{k!}{v!(k-v)!}\sum_{\ell=1}^{k-t}(-1)^{v-\ell}\frac{v!}{\ell!(v-\ell!)}\ell^k =$$

$$= k!\sum_{\ell=1}^{k}(-1)^{\ell-1}\ell^{k-1}\sum_{v=\ell}^{k}C_{n-v}^{k-v}C_{v-1}^{\ell-1} =$$

$$\underset{3.1б}{=} k!\sum_{\ell=1}^{k}(-1)^{\ell-1}\ell^{k-1}C_n^{k-\ell}\,.$$

3.3. При $p = 1$

$$f(n,k) = C_n^{k-1} - C_n^{k-2} + C_n^{k-3} - \ldots(-1)^{k-1}C_n^0\,.$$

Это выражение — многочлен от n, если мы под биномиальными коэффициентами понимаем выражения вида $C_n^m = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-m+1)}{m!}$. Заметим, что $n = 1$, $n = 2$, … , $n = k-1$ — корни этого многочлена. Это очевидно. Например, при $n = 4$ (если $k-1 \geqslant 4$) выражения C_n^{k-1}, … , C_n^5 равны нулю и

$$f(4,k) = \pm(C_4^4 - C_4^3 + C_4^2 - C_4^0 + C_4^0) = 0\,. \quad (15)$$

Итак, $f(n,k)$ — многочлен степени $k-1$ относительно n и мы знаем $k-1$ его корней. Значит,

$$f(n,k) = \frac{1}{(k-1)!}(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1) = C_{n-1}^{k-1}\,.$$

Нормировочный множитель подобран так, чтобы коэффициенты при n^{k-1} в левой и правой части совпадали.

3.4. Мы почерпнули этот вопрос в [3], а ответ на него — в [12]. При $p = 1$ мы в предыдущей задаче воспользовались равенством (15), которое получается из соотношения

$$(1-x)^m = C_m^m - C_m^{m-1}x + C_m^{m-2} - \ldots + (-1)^m C_m^0 x^m \quad (16)$$

подстановкой $x = 1$ (и $m = 4$). Дифференцируя (16) по x, мы получаем

$$m(1-x)^{m-1} = C_m^{m-1} - 2C_m^{m-2}x + 3C_m^{m-3}x^2\ldots + (-1)^{m-1}mC_m^0x^{m-1}\,. \quad (17)$$

Подставляя $x=1$, мы получаем, что при $m>1$

$$C_m^{m-1}-2C_m^{m-2}x+3C_m^{m-3}x^2\ldots+(-1)^{m-1}mC_m^0x^{m-1}=0\,.$$

Пользуясь этим равенством, мы аналогично предыдущей задаче найдем, что при $p=2$

$$f(n,k)=\frac{1}{(k-1)!}(n-2)(n-3)\ldots(n-k)=C_{n-2}^{k-1}\,.$$

Таким образом, при $p=2$ уравнение $f(n,k)=0$ не имеет интересных решений.

Аналогично при $p=3$ можно обнаружить, что $(k-1)!f(n,k)=(n-2k)\prod_{i=3}^{k}(n-i)$. Здесь уже имеется более интересный корень $n=2k$, следы которого нам встречались в задаче 2.3а). Теплее.

Разберем случай $p=4$. Домножим обе части равенства (17) на x, продифференцируем, и повторим эти операции еще раз, получится

$$C_m^{m-1}-2^3C_m^{m-2}x+3^3C_m^{m-3}x^2+\ldots+(-1)^{m-1}m^3C_m^0x^{m-1}=\frac{d}{dx}\Big(x\frac{d}{dx}\Big(xm(1-x)^{m-1}\Big)\Big)=(1-x)^{m-3}g(x)\,,$$

где $g(x)$ — некоторый квадратный трехчлен от x (с коэффициентами, зависящими от m). Подставляя $x=1$, получаем, что при $n>3$

$$C_m^{m-1}-2^3C_m^{m-2}+3^3C_m^{m-3}+\ldots+(-1)^{m-1}m^3C_m^0=0\,.$$

Пользуясь этим равенством, находим, что при $p=4$ выражение $(k-1)!f(n,k)$, рассматриваемое как многочлен от n, имеет корни $n=4$, $n=5$, … , $n=k$. Значит,

$$(k-1)!f(n,k)=(k-1)!(C_n^{k-1}-2^3C_n^{k-2}+3^3C_n^{k-3}-\ldots(-1)^{k-1}k^3C_n^0)=h(n)\prod_{i=4}^{k}(n-i)\,,\tag{18}$$

где $h(n)=n^2+an+b$ — квадратичный множитель. Подставляя $n=0$ в (18), находим, что $b=6k^2$, подставляя $n=1$, находим, что $a=1-6k$. Заметим еще, что тогда

$$h(n)=n^2-(6k-1)n+6k^2=\frac{1}{4}\big((2n-6k+1)^2-3(2k-1)^2+2\big)\,.$$

Итак, нетривиальные корни уравнения $f(n,k)=0$ являются корнями уравнения Пелля

$$(2n-6k+1)^2-3(2k-1)^2=-2\,.\tag{19}$$

Общее решение уравнения Пелля $u^2-3v^2=-2$ имеет вид $u+v\sqrt{3}=\pm(1+\sqrt{3})(2+\sqrt{3})^r$, $r=0,\pm1,\pm2,\ldots$ Но для наших целей достаточна более простая процедура, дающая, кстати, все положительные решения. Из задачи 1.5 мы уже знаем, что при $p=4$ пара $(n,k)=(8,2)$ является решением. Воспользуемся тем, что уравнение (19) квадратное и по n, и по s. Подставляя $n=8$ в (19), находим еще одно решение $(8,6)$. Кстати, о том, что набор из 8 чисел не восстанавливается по набору своих 6-сумм, мы уже знаем из задачи 2.3б). Подставляя $k=6$ в (19), находим еще одно решение $(27,6)$. Подставляя $n=27$, находим еще одно решение $(27,21)$. Подставляем $k=21$, находим $n=98$ и т. д. Мы получили серию решений

$$(8,2),\quad (8,6),\quad (27,6),\quad (27,21),\quad (98,21),\quad (98,77),\quad (363,77)\quad \ldots$$

Как отмечается в [12], при $p=5$ $f(n,k)=(n^2-(12n-5)k+12k^2)(n-2k)\prod_{i=5}^{k}(n-i)$ и возникающее здесь уравнение Пелля $u^2-6v^2=75$ приводит к серии решений $(16,2)$, $(147,14)$, $(1444,133)$, … или $(27,3)$, $(256,24)$, $(2523,232)$ … .

Отметим еще, что при $p=6$ поиск нетривиальных корней уравнения $f(n,k)=0$ сводится к решению уравнения 4 степени. Это уравнение приведено в следующей задаче.

3.5. Это уравнение не поддается столь простому анализу. Собственно говоря, вообще никакому не поддается. Компьютерный перебор показывает, что решений при $32<n<460$ нет.

3.6. Это утверждение тоже из [12]. При $k=2$ и всех p имеем

$$s_p(A^{[2]})=\sum_{1\leqslant i_1\leqslant i_2\leqslant n}(a_{i_1}+a_{i_2})^p=\frac{1}{2}\bigg(\sum_{i_1,i_2=1}^{n}(a_{i_1}+a_{i_2})^p+\sum_{i=1}^{n}(2a_i)^p\bigg)\,.$$

При $k = 3$

$$s_p(A^{[3]}) = \sum_{1\leqslant i_1\leqslant i_2\leqslant i_3\leqslant n} (a_{i_1} + a_{i_2} + a_{i_3})^p = \frac{1}{6}\left(\sum_{i_1,i_2,i_3=1}^{n} (a_{i_1} + a_{i_2} + a_{i_3})^p + 3\sum_{i_1,i_2=1}^{n} (2a_{i_1} + a_{i_2})^p + 2\sum_{i=1}^{n} (3a_i)^p \right).$$

И так далее при других k. Преобразовывая эти выражения аналогично задаче 2.2, мы обнаружим, что правые части этих равенств имеют вид $q(n,k)s_k(A) + G$, где G — выражение, зависящее от n и $s_i(A)$, $i < k$, причем коэффициент $q(n,k)$ положителен. Тогда аналогично задаче 1.5 степенные суммы набора A однозначно определяются степенными суммами набора $A^{[k]}$. Поэтому в этом случае набор A однозначно восстанавливается по набору $A^{[3]}$.

Но как обнаружили многие участники конференции, артиллерия не требуется для стрельбы по воробьям. Поскольку минимальное число набора $A^{[k]}$ — это число ka_1 (мы считаем что числа из набора A упорядочены по возрастанию), то мы сразу можем найти a_1. Уберем число ka_1 из набора $A^{[k]}$, тогда минимальное из оставшихся — это $(k-1)a_1 + a_2$ и мы сразу можем найти a_2. Уберем из набора $A^{[k]}$ числа вида $\alpha a_1 + \beta a_2$; минимальное число из оставшихся — это $(k-1)a_1 + a_3$ и мы сразу можем найти a_3 и т. д.

Литература

[1] Виленкин Н.Я. Комбинаторика. М., 1969.

[2] Гальперин Г.А., Толпыго А.К. Московские математические олимпиады. М., 1986.

[3] Фомин Д.В., Ижболдин О.Т. Наборы кратных сумм. Труды Санкт-Петербургского математического общества. Т. 3. С. 244–259.

[4] Фомин Д.В. Санкт-Петербургские математические олимпиады. СПб. 1994

[5] Amdeberhan T., Zeleke M. On injectivity of combinatorial Radon transform of order five. www.math.temple.edu/˜tewodros

[6] Boman J., Linusson S. Examples of non-uniqueness for the combinatorial Radon transform modulo the symmetric group. Math. Scand. V. 78 (1996). No. 2. 207–212.

[7] Erdős P. Some of my favorite unsolved problems. Math. Japonica V. 46. No. 3 (1997). P. 527–538.

[8] Ewell J.A. On the determination of sets by sets of sums of fixed order. Canad. J. Math., V. 20 (1968). P. 596–611.

[9] Gordon B., Fraenkel A.S., Straus E.G. On the determination of sets by the sets of sums of a certain order. Pacific J. Math. V. 12 (1962), P. 187–196.

[10] Guy R. Unsolved problems in number theory.

[11] Moser L. Amer. Math. Monthly. V. 64 (1957). No. 7. P. 507.

[12] Selfridge J.L., Straus E.G. On the determination of numbers of sets by the sets of their sums of a fixed order. Pacific J. Math. V. 8 (1958), P. 847–856.