Числа Каталана и естественные отображения

Числа Каталана встречаются в математике при подсчёте количества тех или иных комбинаторных объектов. Результатом этого являются теоремы вида: «Количество элементов в множестве A равно количеству элементов в множестве $Б$». Однако желательно, раз уж эти теоремы верны, иметь для них внятные доказательства, которые могли бы заключаться в построении явных и в разумном смысле естественных взаимно однозначных соответствий[1] между множествами A и $Б$. Мне известны явные отображения между некоторыми парами множеств, причём композициями этих отображений можно получить отображение между почти любыми двумя. К сожалению, при этом некоторые отображения становятся чересчур искусственными. Возможно, какие-то достаточно явные отображения будут построены участниками Конференции. Для однозначной трактовки условий задачи снабжены примером: списком исследуемых объектов для $n = 3$. Порядок, в котором они выписаны, является случайным и не несёт никакой дополнительной информации.

Определение. *Числа Каталана* c_n $(n \geqslant 0)$ *однозначно определяются рекуррентным соотношением* $c_{n+1} = c_0c_n + c_1c_{n-1} + \dots + c_nc_0$ $(n \geqslant 0)$ *и «начальным условием»* $c_0 = 1$.

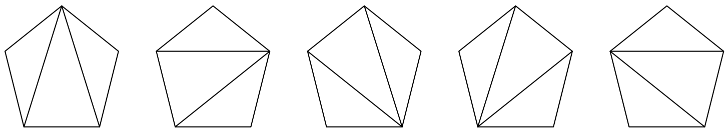
Знать явную формулу для построения отображений совершенно незачем, тем не менее узнать её не вредно.

1. (Явная формула) Докажите, что $c_n = \dfrac{(2n)!}{n!(n+1)!}$.

Следующая задача содержит несколько стандартных комбинаторных интерпретаций c_n.

2. Докажите (по возможности построив биекции), что каждое из этих множеств состоит из c_n элементов.

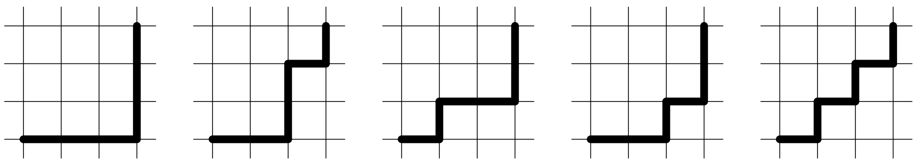
(a) *Триангуляции* (разрезания на n треугольников непересекающимися диагоналями) выпуклого $(n+2)$-угольника



(b) Неассоциативные произведения $n+1$ букв (иначе говоря, надо расставить скобки, чтобы порядок умножений был однозначно определён)

`a(b(cd))`   `(ab)(cd)`   `((ab)c)d`   `a((bc)d)`   `(a(bc))d`

(c$_1$) Пути из точки $(0,0)$ в точку (n,n) по линиям клетчатой бумаги, идущих вверх и вправо, не поднимающиеся выше прямой $y = x$



(c$_2$) Последовательности длины $2n$, в которых n раз встречается 1, n раз встречается -1, и все частичные суммы[2] неотрицательны

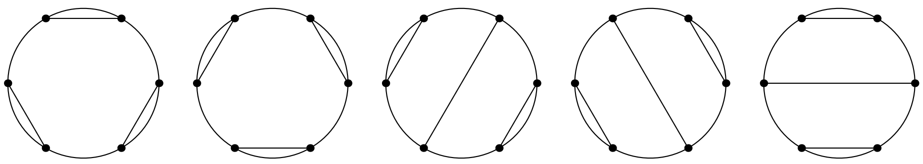
`1 1 1 -1 -1 -1`   `1 1 -1 1 -1 -1`   `1 -1 1 1 -1 -1`   `1 -1 1 -1 1 -1`   `1 1 -1 -1 1 -1`

---

[1] Иногда вместо слов «взаимно однозначное соответствие» используют менее ясное слово «биекция»

[2] k-ой частичной суммой последовательности $a_1, \dots, a_p (k \leqslant p)$ называется $a_1 + \dots + a_k$

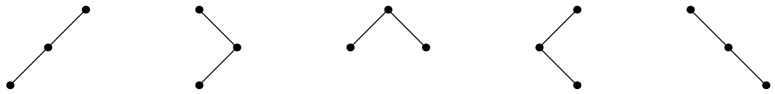
(d) Способы соединить $2n$ точек на окружности n непересекающимися хордами (из любой точки выходит одна хорда)



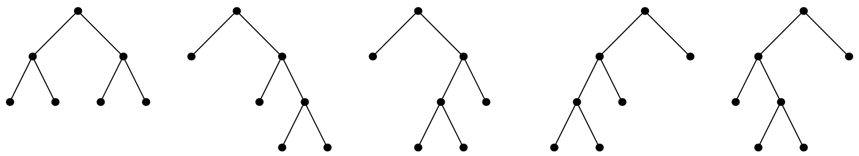
Далее следуют ещё несколько интерпретаций.

3. Докажите (по возможности построив биекции), что каждое из этих множеств состоит из c_n элементов.

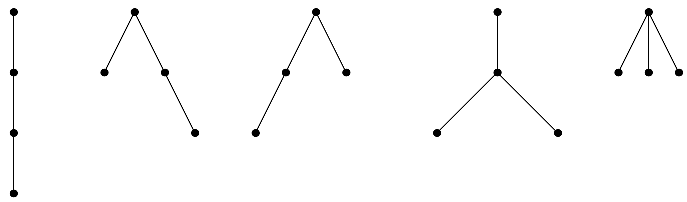
(a) *Плоские корневые двоичные деревья* (у каждой вершины не более двух сыновей [«правый» или «левый»] и один предок [кроме корня, у которого нет предков]) с n вершинами



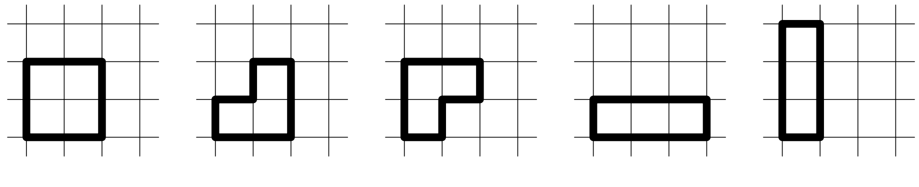
(b) *Плоские корневые строго двоичные деревьея* (у каждой вершины либо два сына, либо ни одного [и тогда это по определению лист]) с $n+1$ листьями



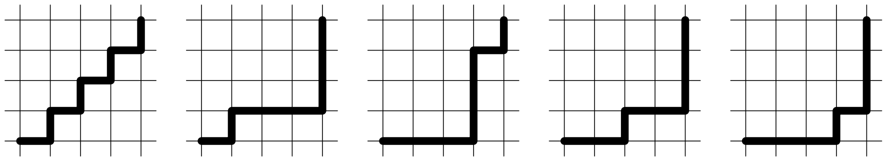
(c) *Плоские корневые деревья* с $n+1$ вершинами



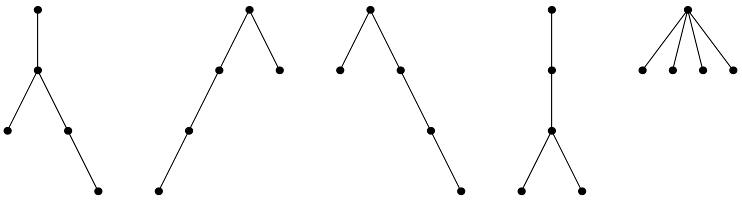
(d) *«Параллеломино»* (пары путей на клетчатой бумаге с началом $(0,0)$ и концом в одной и той же точке, идущих только вверх и вправо и не имеющих общих точек, кроме начала и конца) периметра $2n+2$



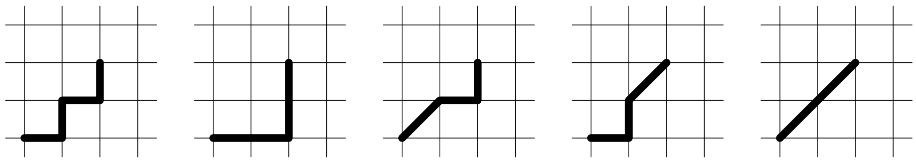
(e_1) Пути по линиям клетчатой бумаги из точки $(0,0)$ в точку $(n+1,n+1)$, идущие только вправо или вверх, не поднимающиеся выше прямой $y=x$ и такие, что любая вертикальная сторона с концом на этой прямой имеет нечётную длину



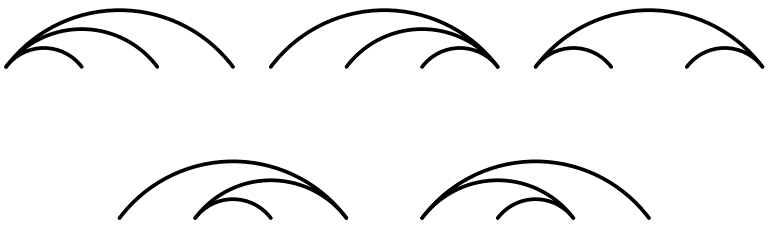
(e_2) Плоские корневые деревья с $n+2$ вершинами, такие что для любого поддерева корня «самый правый путь» из корня этого поддерева (в каждой вершине выбирающий самое правое ребро вниз) имеет четную длину



(f) Пути из точки $(0,0)$ в точку $(n-1,n-1)$, идущие вправо, вверх или по диагонали вправо вверх, не поднимающиеся выше прямой $y=x$ и такие, что идти по диагонали можно только вдоль прямой $y=x$



(g) Способы соединить $n+1$ точек на прямой n непересекающимися дугами так, чтобы не было циклов и из каждой точки дуги выходили только влево или только вправо



(h) Последовательности натуральных чисел $1 \leqslant a_1 \leqslant \ldots \leqslant a_n$, где $a_i \leqslant i$

`1 1 1     1 1 2     1 1 3     1 2 2     1 2 3`

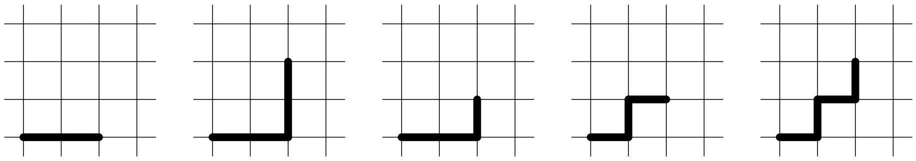
(i) Последовательности целых чисел $a_1, \ldots, a_{n-1}$, такие что $a_i \leqslant 1$ и все частичные суммы неотрицательны

`0 0     0 1     1 0     1 1     1 -1`

(i_1) Последовательности целых чисел $a_1, \ldots, a_n$, такие что $a_i \geqslant -1$, все частичные суммы неотрицательны и $a_1 + \cdots + a_n = 0$

`0 0 0     0 1 -1     1 0 -1     1 -1 0     2 -1 -1`

(j) Пути на клетчатой бумаге с началом в точке $(0,0)$, идущие вправо или вверх, не поднимающиеся выше прямой $y = x$, причём единичных шагов вправо должно быть $n-1$



(k) Последовательности целых чисел $a_1, \ldots, a_n$, такие что $a_1 = 0$ и $0 \leqslant a_{i+1} \leqslant a_i + 1$

`0 0 0` `0 0 1` `0 1 0` `0 1 1` `0 1 2`

(l) Последовательности целых чисел $a_1, \ldots, a_{2n}$, такие что $a_1 = 1, a_{2n} = 0$ и $a_i - a_{i+1} = \pm 1$

`1 2 3 2 1 0` `1 2 1 2 1 0` `1 2 1 0 1 0` `1 0 1 2 1 0` `1 0 1 0 1 0`

(m) Перестановки чисел $1, 2, \ldots, n$, у которых длина каждой убывающей подпоследовательности не более 2

`1 2 3` `2 1 3` `1 3 2` `3 1 2` `2 3 1`

(n) Перестановки чисел $1, 2, \ldots, 2n$, такие что все чётные числа встречаются в порядке возрастания, все нечётные числа встречаются в порядке возрастания и для каждого k число $2k-1$ встречается раньше, чем $2k$

`1 2 3 4 5 6` `1 2 3 5 4 6` `1 3 2 4 5 6` `1 3 2 5 4 6` `1 3 5 2 4 6`

(o) Способы разбить все натуральные числа от 1 до n на несколько «незацепленных» групп (нельзя при $a < b < c < d$ отнести a и c к одной группе, а b и d — к другой)

`123` `12-3` `13-2` `23-1` `1-2-3`

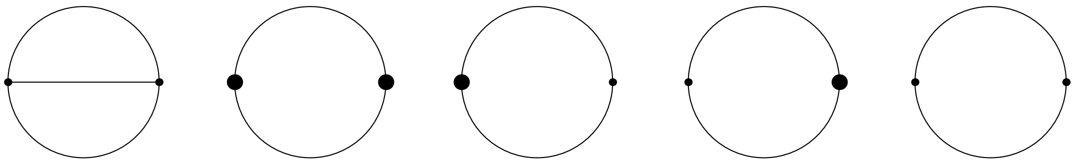
(p) Способы разбить все натуральные числа от 1 до $2n+1$ на $n+1$ «незацепленных» (см. (o)) групп, ни одна из которых не содержит двух последовательных чисел

`137-46-2-5` `1357-2-4-6` `157-24-3-6` `17-246-3-5` `17-26-35-4`

(q) Таблицы $2 \times n$, заполненных натуральными числами от 1 до $2n$, причём числа в каждой строке и в каждом столбце возрастают

1	2	3		1	2	4		1	3	4		1	2	5		1	3	5
4	5	6		3	5	6		2	5	6		3	4	6		2	4	6

(r) Способы провести несколько непересекающихся хорд между $n-1$ точками на окружности и объявить некоторые из оставшихся точек отмеченными



(s) Множество наборов из n целых чисел от 0 до n, сумма которых делится на $n+1$ (числа могут повторяться, порядок чисел в наборе неважен)

```
0 0 0    0 1 3    0 2 2    1 1 2    2 3 3
```

(t) Последовательности натуральных чисел $a_1, \ldots, a_n$ ($a_k \geqslant 2$), такие что в строке

$$1, a_1, \ldots, a_n, 1$$

любое a_i является делителем суммы двух соседей

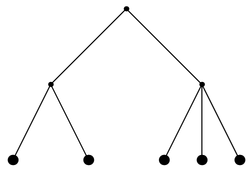
```
4 3 2    3 5 2    3 2 3    2 5 3    2 3 4
```

(u) Последовательности целых чисел $a_1, \ldots, a_n$, такие что a_i равно количеству $j < i$, для которых $a_j < a_i$

```
0 0 0    0 0 2    0 1 0    0 1 1    0 1 2
```

(v) Вершины на уровне $n-1$ у дерева, определяемого так:

- У корневой вершины (единственной вершины на уровне 0) два сына
- Если у вершины (на уровне q) k сыновей, то у её сыновей (на уровне $q+1$) $2, 3, \ldots, k+1$ сыновей соответственно



4. Докажите(по возможности построив биекцию), что множество всех путей на клетчатой бумаге из точки $(0,0)$ в точку $(2n, 2n)$, идущих лишь вверх или вправо и не проходящих через точки вида $(2k-1, 2k-1)$, состоит из c_{2n} элементов.