Решения задач цикла
«Числа Каталана и естественные отображения»

Явная формула

1. (Эйлер) Получим еще одно рекуррентное соотношение для чисел c_n. (В качестве интерпретации удобно выбрать количество триангуляций.) Рассмотрим множество пар (триангуляция, диагональ триангуляции). Ясно, что мощность этого множества равна $c_n \cdot (n-1)$. С другой стороны, есть ровно $n+2$ диагонали, отсекающие от нашего многоугольника i-угольник. Для такой диагонали существует $c_i c_{n-i}$ триангуляций, ее содержащих. При этом каждая пара посчитана дважды (для i-угольника и для $(n-i)$-угольника). Отсюда

$$(n-1)c_n = (n+2)(c_1 c_{n-1} + c_2 c_{n-2} + \cdots + c_{n-1} c_1)/2.$$

Легко видеть, что $c_1 c_{n-1} + \cdots + c_{n-1} c_1 = c_{n+1} - 2c_n$, so $(n-1)c_n = (n+2)(c_{n+1} - 2c_n)/2$. Это означает, что

$$\frac{c_{n+1}}{c_n} = \frac{2(2n+1)}{n+2},$$

откуда немедленно следует явная формула.

Это решение не является ни наиболее коротким из известных, ни наиболее «естественным». Решения, основанные на так называемом «принципе отражений» и на лемме Рени можно найти в [1].

Отображения

Ниже приводятся несколько отображений. Большинство из них довольно естественные; более того, они оказываются биекциями. (Большинство доказательств оставлены читателю.)

Некоторые множества объединены в блоки — это означает, что между ними существуют очевидные отображения. Я буду пользоваться следующими обозначениями: $\mathbb{B}_1$ для {2(c$_1$),2(c$_2$),2(d),3(l),3(n)}, $\mathbb{B}_2$ для {3(e$_1$),3(e$_2$)}, $\mathbb{B}_3$ для {3(i$_1$),3(i$_2$),3(k)} и $\mathbb{B}_4$ для {3(a),3(b)}.

Биекции внутри блоков

$\mathbb{B}_1$: 2(c$_1$) $\to$ 2(c$_2$) Очевидно.

2(d) $\to$ 2(c$_2$) Зафиксируем вершину v. Начнем двигаться из нее по часовой стрелке v, записывая в каждой вершине 1, если мы встречаем выходящую из нее хорду впервые, и -1 в противном случае.

2(c$_2$) $\to$ 3(l) Вычислим все частичные суммы.

2(c$_2$) $\to$ 3(n) Заменим k-е вхождение 1 на число $2k-1$, а k-е вхождение -1 на число $2k$.

$\mathbb{B}_2$: 3(e$_1$) $\to$ 3(e$_2$) Ограничим композицию отображений 3(c)$\to$ 2(c$_2$) $\to$ 2(c$_1$) на рассматриваемые деревья.

$\mathbb{B}_3$: 3(k) $\to$ 3(i$_1$) Вычислим *первые разности*: $a_i \mapsto a_{i+1} - a_i$.

3(k) $\to$ 3(i$_2$) $(a_1, \ldots, a_n) \mapsto (a_n, a_{n-1} - a_n, a_{n-2} - a_{n-1}, \ldots, a_2 - a_1)$

$\mathbb{B}_4$: 3(b) $\to$ 3(a) Сотрем все листья (вместе с выходящими из них ребрами).

Более хитрые биекции

Рассмотрим дерево T и его вершины v и w. Будем говорить, что v — *брат* w, если они являются сыновьями одной и той же вершины. *Алгоритмом поиска глубины один* $DFS(T)$ для (плоского) графа T назовем обход графа T, начинающийся и заканчивающийся в корне, проходящий через каждую вершину графа дважды и строящийся по следующим правилам:

- Если T состоит из одной вершины, то обход прекращается.
- Пусть v — самый левый сын корня (соединенный с корнем ребром e), T_v — поддерево с корнем v. Тогда пройдем по ребру e, выполним $DFS(T_v)$, затем поднимемся назад по ребру e и выполним алгоритм DFS для графа, полученного удалением из T подграфа T_v (вместе с ребром v).

Стандартной нумерацией вершин графа назовем их нумерацию в порядке первого появления при выполнении алгоритма *DFS*.

2(a) $\to$ 2(b) Пусть l — произвольная сторона многоугольника. Двигаясь от l против часовой стрелки, расставим на всех сторонах многоугольника, кроме l, метки. Для данной триангуляции найдем треугольник

ABC, на сторонах AB и BC которого стоят метки p и q соответственно. Удалим этот треугольник, а на стороне CA поставим метку (pq). Будем продолжать этот процесс до тех пор, пока на стороне l не появится метка. Эта метка и есть соответствующий способ расстановки скобок.

3(b) $\to$ 2(b) Двигаясь слева направо по листьям дерева, расставим на них метки. Каждую вершину, сыновья которой уже помечены, будем помечать произведением меток ее сыновей. Метка корня дерева будет соответствовать способу расстановки скобок.

2(b) $\to$ 2(c_2) *Первое отображение.* Сотрем все правые скобки и заменим каждую левую скобку на '`1`', а каждую букву (кроме последней) — на '`-1`'.

Второе отображение. Заменим все знаки умножения на '`1`', а все правые скобки на '`-1`'. (Это соответствует выполнению умножений на "стековом калькуляторе".)

3(j) $\to$ 2(c_1) Добавим в конец пути одно горизонтальное ребро и необходимое количество вертикальных, чтобы попасть в точку (n, n).

3(f) $\to$ 3(j) Заменим каждый шаг $(1,1)$ на шаг $(1,0)$.

3(b) $\to$ 3(p) Рассмотрим стандартную нумерацию вершин. Отнесем две вершины к одному блоку, если одна из них является правым сыном другой.

3(b) $\to$ 2(c_2) Будем выполнять алгоритм поиска глубины один, записывая '`1`' при первом проходе по каждому левому ребру и '`-1`' — при первом проходе по каждому правому ребру.

3(c) $\to$ 2(c_2) Будем выполнять алгоритм поиска глубины один, записывая '`1`' при проходе вниз по ребру, и '`-1`' — при проходе вверх по ребру.

3(k) $\to$ 2(c_2) Пусть $b_i = a_i - a_{i+1} + 1$ (положим $a_{n+1} = 0$). Заменим a_i на $\mathtt{1}\ \mathtt{-1}^{b_i}$ (где через a^n обозначено a, повторенное n раз).

3(c) $\to$ 3(i_2) Будем выполнять алгоритм поиска глубины один, записывая при первом проходе через вершину v число, на 1 меньшее числа сыновей v (для каждой вершины, кроме последней).

3(d) $\to$ 2(c_2) Для параллеломино со столбцами $C_1, \ldots, C_k$ обозначим через a_i число (единичных) квадратов в C_i, а через b_i — число общих строк в C_i и C_{i+1}. Рассмотрим такую последовательность:

$$\mathtt{1}^{a_1}\ \mathtt{-1}^{a_1-b_1+1}\ \mathtt{1}^{a_2-b_1+1}\ \mathtt{-1}^{a_2-b_2+1} \ldots \mathtt{1}^{a_k-b_{k-1}+1}\ \mathtt{-1}^{a_k-b_k+1}.$$

Большинство участников конференции, занимавшихся данным циклом задач, нашли другую биекцию между этими двумя множествами. Будем рисовать параллеломино следующим образом: первое ребро нижнего пути, первое ребро верхнего пути, второе ребро нижнего пути, второе ребро верхнего пути и т. д., записывая каждый раз число: для шага вверх (вправо) верхнего пути '`1`' ('`-1`'), а для нижнего пути — наоборот. Удалим первую '`1`' и последнюю '`-1`'.

3(g) $\to$ 2(c_2) Занумеруем точки числами $1, 2, \ldots, n+1$ слева направо. Пусть точка с номером i соединена с a_i точками, номера которых больше чем i. Рассмотрим такую последовательность:

$$\mathtt{1}^{a_1}\ \mathtt{-1}\ \mathtt{1}^{a_2}\ \mathtt{-1} \ldots \mathtt{1}^{a_{n+1}}\ \mathtt{-1}$$

3(q) $\to$ 2(c_2) Положим $a_i = 1$, если число i стоит в первой строке, и -1 в противном случае (это отображение достаточно очевидно, и потому 3(q) можно включить в $\mathbb{B}_1$).

3(m) $\to$ 2(c_1) Рассмотрим перестановку $a_1, \ldots, a_n$. Обозначим через b_i количество чисел $a_j < a_i$, таких что $j > i$. Пусть $p_1 < p_2 < \cdots < p_k$ — это все такие p, что $b_p \neq 0$. Построим путь на клетчатой бумаге следующим образом: двигаемся направо в точку $(b_{p_1} + p_1 - 1, 0)$, затем наверх в точку $(b_{p_1} + p_1 - 1, p_1)$, затем направо в точку $(b_{p_2} + p_2 - 1, p_1)$, затем вверх в точку $(b_{p_2} + p_2 - 1, p_2)$ и т. д. Окончание этого пути выглядит так: из точки $(b_{p_k} + p_k - 1, p_{k-1})$ вверх до точки $(b_{p_k} + p_k - 1, p_k)$, затем направо в точку (n, p_k) и, наконец, наверх в точку (n, n).

Замечание. На самом деле данное отображение является композицией отображений 3(m) $\to$ 3(w) $\to$ 2(c_1), где первое отображение есть $a_1, \ldots, a_n \mapsto b_1, \ldots, b_n$. Хотя это отображение ("код перестановки") было рассказано при представлении задач, некоторые участники предпочли включить 3(m) в граф биекций другим способом. Они предложили следующее отображение 3(m)$\to$ 3(h):

$$a_1, \ldots, a_n \mapsto \min_i a_i, \min_{i>1} a_i, \min_{i>2} a_i, \ldots.$$

2(c_1) $\to$ 3(h) рассмотрим путь L на клетчатой бумаге. Обозначим через a_i площадь фигуры, ограниченной прямыми $y = -1$, $x = i - 1$, $x = i$ и путем L.

3(v) $\to$ 3(h) Для данной вершины v рассмотрим единственный путь длины $n - 1$ (т. е. проходящий через n вершин $v_1, \ldots, v_n = v$) из корня в вершину v. Обозначим через b_i число сыновей вершины v_i. Положим $a_i = i + 2 - b_i$.

3(m) $\to$ 3(v) Построим дерево T_0 по следующим правилам. Вершины уровня $n - 1$ соответствуют перестановкам n элементов из 3(m). Две вершины (на уровнях j и $j + 1$) соединены ребром, если первая из соответствующих перестановок является подпоследовательностью второй. Тогда T_0 совпадает с деревом из задачи 3(v).

3(v) $\to$ 3(u) Пометим корень числом 0, а двух его сыновей — числами 0 и 1. Затем пометим рекурсивно все остальные вершины, руководствуясь следующим правилом. Пусть v — вершина на уровне n, помеченная числом j. Пусть братья вершины v, отмеченные числами, меньшими j, имеют метки $l_1, \dots, l_i$. Тогда вершина v имеет $i+2$ детей, и мы помечаем их числами $l_1, \dots, l_i, j, n$. Каждая вершина уровня $n-1$ соответствует последовательности меток на единственном пути длины $n-1$ из корня в эту вершину.

Упражнение. Докажите, что при таком способе расстановки меток количество вершин на уровне n, помеченных числом j, равно $c_j c_{n-j}$.

Замечание. Для большинства целочисленных последовательностей, рассматриваемых в задаче **3** можно проверить, что дерево перебора, соответствующее добавлению элементов по одному, совпадает с деревом из 3(v).

3(b) $\to$ 3(c) Склеим вершины v и w (удалив соединяющее их ребро), если v является правым сыном w.

3(e_2) $\to$ 3(c) Склеим корень с самым левым его сыном (удалив соединяющее их ребро).

2(a) $\to$ 3(a) Выберем произвольную сторону l многоугольника. Построим дерево, вершины которого соответствуют треугольникам триангуляции (причем корень соответствует треугольнику со стороной l), а ребрами соединены вершины, соответствующие треугольникам, имеющим общую сторону.

$[n+1]\times$3(s) $\to$ {все пути на клетчатой бумаге из $(0,0)$ в (n,n)}
Для каждого набора $A = [a_1, \dots, a_n]$ рассматриваемого типа определим его сдвиги

$$sh_i(a) = [(a_1+i) \bmod (n+1), \dots, (a_n+i) \bmod (n+1)] (1 \leqslant i \leqslant n).$$

Поскольку сумма элементов в $sh_i(a)$ сравнима с $-i$ по модулю $n+1$, мы видим, что каждый набор $[b_1, \dots, b_n]$, где $0 \leqslant b_i \leqslant n$, либо принадлежит к рассматриваемому множеству, либо является сдвигом одного из наборов этого множества. Такми образом, мы установили биекцию между $n+1$ копиями этого множества и множеством всех наборов $[b_1, \dots, b_n]$ длины n, где $0 \leqslant b_i \leqslant n$. Поскольку мы рассматривали неупорядоченные наборы, мы можем считать, что $b_1 \leqslant \ldots \leqslant b_n$. Чтобы придумать путь на клетчатой бумаге, вспомните обратное отображение к 2(c_1) $\to$ 3(h).

Замечание. Иначе говоря, последовательность из 3(s) соответствует классу последовательностей $b_1 \leqslant \ldots \leqslant b_n$, где $0 \leqslant b_i \leqslant n$, каждая такая последовательность соответствует пути на клетчатой бумаге, и в каждом классе есть единственная [1] последовательность, соответствующая пути из 3(c_1).

3(t) $\to$ 2(c_2) Рассмотрим последовательность $1, a_1, \dots, a_n, 1$. (Положим $a_0 = a_{n+1} = 1$.) Ясно, что равенство $a_i = a_{i+1}$ никогда не выполняется (иначе все a_j должны быть кратными a_i). Поэтому найдется хотя бы одно такое a_i, что $a_{i-1} < a_i > a_{i+1}$. Поскольку $a_{i-1} + a_{i+1}$ кратно a_i, оно должно быть равно a_i. Когда мы удалим из последовательности a_i мы получим последовательность на один элемент короче, которая тоже удовлетворяет условию делимости. И наоборот, всякую последовательность можно удлинить, добавив $a_i + a_{i+1}$ между a_i и a_{i+1}. Будем повторять эту операцию (стартовав с последовательности $1, 1$), но при добавлении $a_i + a_{i+1}$ между a_i и a_{i+1} будем вставлять флажок перед a_i и после этого изменять последовательность только справа от последнего флажка. Расположение n флажков полностью определяет последовательность $a_1, \dots, a_n$ и флажки предшествуют соответствующим числам. Заменим каждый флажок на '`1`', а каждое число a_j $(1 \leqslant j \leqslant n)$ — на '`-1`'.

2(a) $\to$ 3(t) (Эта материализация рассуждения из предыдущего отображения предложена Р. Травкиным.) Выберем сторону AB многоугольника. Пометим A и B числом 1. Рассмотрим некоторую триангуляцию. Если в треугольнике PQR вершины P и Q помечены числами x и y соответственно, пометим вершину R числом $x+y$. Так будем действовать, пока не пометим все вершины. Прочтем метки последовательно по часовой стрелке, начиная с вершины A, чтобы получить последовательность из 3(t).

3(r) $\to$ 3(i_1) Выберем произвольную вершину v. Начнем двигаться из нее по часовой стрелке, записывая в каждой вершине

- 1, если она помечена или если она является концом ранее не встречавшейся хорды,
- $-1-p$, если это второй конец хорды и на соответствующей дуге ω отмечено ровно p точек, не принадлежащих другим дугам, содержащимся в ω (мы рассматриваем только дуги, соответствующие хордам),
- 0 в ином случае.

3(c_2) $\to$ 3(r) Начнем с одной Очень Полезной Биекции: мы отождествим 3(c_2) с множеством последовательностей длины $n-1$ из чисел ± 2 и "± 0" (скажем, раскрашенных в красный и синий цвета) с неотрицательными частичными суммами. А именно, удалим первую '`1`' и последнюю '`-1`', разрежем последовательность на подслова длины 2 и заменим каждое такое подслово суммой чисел в нем. (Чтобы различать '`1 -1`' и '`-1 1`', мы должны покрасить нули.) Это отображение является биекцией (чтобы убедиться, что частичные

[1] Это следует из леммы Рени [1].

суммы неотрицательны, заметим, что нечетные частичные суммы последовательности из $2(c_2)$ положительны). Теперь отметим точки, помеченные '`+0`', и соединим точки, помеченные ± 2 как в 2(d). (С точками, помеченными '`-0`', ничего делать не нужно.)

3(a) $\to$ 3(o) *Указание.* Модифицируйте отображение 3(b)$\to$ 3(p).

3(w) См. обсуждение "321-избегающих" перестановок из 3(m).

3(x) Последовательности $a_n-1,\dots,a_1-1$ — это просто коды "312-избегающих" перестановок из 3(y). Можно иначе: построим бинарное дерево $T(a_1,\dots,a_n)$ по следующим правилам. Положим $T(\emptyset)=\emptyset$. Если $n>0$, определим левое корневое поддерево дерева $T(a_1,\dots,a_n)$ как $T(a_1,\dots,a_{n-a_n})$, а правое — как $T(a_{n-a_n+1},\dots,a_n)$.

Таким образом, установлена биекция с 3(a).

См. также замечание к отображению 3(v)$\to$ 3(u).

3(y) *Указание.* Сначала установим биекцию с "231-избегающими" перестановками:

$$a_1,\dots,a_n\mapsto n+1-a_n,\dots,n+1-a_1.$$

Определим алгоритм *стековой сортировки (SS)* последовательности A:

- $SS(\emptyset)=\emptyset$
- $SS(A_1xA_2)=SS(A_1)SS(A_2)x$, если x — наибольший элемент в последовательности A_1xA_2

Перестановку A (рассматриваемую как последовательность) назовем *поддающейся сортировке*, если $SS(A)=1,2,\dots,n$. Тогда "231-избегающие" перестановки оказываются поддающимися сортировке, и наоборот.

См. также замечание к отображению 3(v)$\to$ 3(u).

3(q) $\to$ 3(z) Рассмотрим таблицу из 3(q). Вычеркнув из нее числа от $n+1$ до $2n$, получим первую из пары таблиц в 3(z). Если вычеркнуть, наоборот, числа от 1 до n, повернуть таблицу на 180°, и заменить каждое число i на $2n+1-i$, то получим вторую таблицу пары.

3($\hbar$) $\to$ $2(c_1)$ Рассмотрим путь указанного вида. Заменим каждое подслово '`-1 1`', касающееся диагонали, на '`1 -1`' и удалим первое (правое) и последнее (верхнее) звено.

$3(c_2)$ $\to$ 3($\wp$) (Предложено Е. Поршневым) Заменим в последовательности из $2(c_2)$ каждое подслово '`1 -1`' на '`0`'. Получившаяся последовательность из 1, -1 и 0 обладает следующими свойствами:

- количество чисел 1 равно количеству чисел -1;
- общее количество единиц и нулей равно n;
- все частичные суммы неотрицательны.

(Приведенное отображение — биекция между множеством $2c(_2)$ и множеством таких последовательностей.)

Объясним, как построить из такой последовательности разбиение из 3($\wp$). Сначала откроем новый блок ('откроем' означает 'создадим'; последний открытый блок, который не был открыт, называется текущим) и запишем в этот блок 1. Далее будем действовать так. Возьмем следующий элемент a_i.

- Если $a_i=0$, закроем текущий блок (имеется в виду, что последний элемент, записанный до этого в блок, будет последним элементом блока) и откроем новый блок с первым элементом $i+1$.
- Если $a_i=1$, откроем новый блок с первым элементом $i+1$.
- Если $a_i=-1$, закроем текущий блок и запишем $i+1$ в тот блок, который стал текущим.

$3(c_2)$$\to$ $3(\mathring{v})$ Сначала отождествим пути из $3(\mathring{v})$ с последовательностями чисел ± 1 обычным образом. Теперь вспомним Очень Полезную Биекцию, описанную в пункте 3(r). Заменим '`+0`' $\leftrightarrow$ '`1 -1`', '`-0`' $\leftrightarrow$ '`1 1 -1 -1`', '`+2`' $\leftrightarrow$ '`1 1 -1`', и '`-2`' $\leftrightarrow$ '`1 -1 -1`'.

4. Будем рассматривать пути как последовательности букв E (как в East), соответствующих шагу $(1,0)$, и N (как в North), соответствующих шагу $(0,1)$. Определим по пути L новый путь следующим образом:

- $s(\emptyset)=\emptyset$
- $s(L_1X)=L_1s(X)$
- $s(\bar{L}_1X)=Es(X)NL_1^*$,

где L_1 — это путь положительной длины с концами на диагонали, все остальные точки которого лежат строго ниже диагонали, $\bar{L}_1$ — это путь, полученный из L_1 заменой $E \leftrightarrow N$, L_1^* — это L_1 без первой E и последней N. Тогда s устанавливает биекцию между рассматриваемыми путями и путями из 2(с$_1$) (где n заменено на $2n$).

5. (Такой план предложен А. Каменовым) *Указание.* Обозначим через A_n и B_n утверждения "Для $k = 2n+1$ первое и последнее число принадлежат одной группе" и "Не существует разбиения $1, 2, \ldots, 2n+2$ на $n+1$ блок, удовлетворяющего нашему условию" соответственно. (Утверждение задачи следует из B_n.) А дальше по индукции:

$$A_1 \Rightarrow B_1 \Rightarrow A_2 \Rightarrow B_2 \Rightarrow \ldots$$

6. Это вариация доказательства из [3], основанная на идеях из работ Д. Бугаева, И. Семушина и Р. Травкина. Пусть последовательность $A = (a_1, \ldots, a_{2n})$ удовлетворяет условиям 3(с$_2$). Рассмотрим последовательность $1, a_1, \ldots, a_n$. Обозначим через b_i количество единиц между $(i-1)$-й и i-й -1 $(1 \leqslant i \leqslant n)$. Будем считать последовательности $A' = (1, a_1, \ldots, a_{2n})$ and $B = (b_1, \ldots, b_n)$ *циклическими*[2]. Лемма Рени [1] показывает, что соответствие $A \leftrightarrow A'$ устанавливает биекцию между множеством последовательностей из 2(с$_2$) и множеством циклических последовательностей из $n+1$ чисел 1 и n чисел -1; ясно так же, что соответствие $A' \leftrightarrow B$ устанавливает биекцию между последним множеством и множеством циклических последовательностей из n неотрицательных целых чисел с суммой $n+1$. Очевидно, что наименьший период (на окружности) такой последовательности равен n (иначе и n, и $n+1$ кратно периоду, что невозможно). Таким образом, количество этих циклических последовательностей равно N/n, где N — число обычных последовательностей рассматриваемого вида. Рассмотрим только пути с k подсловами '`1 -1`'. Для таких последовательностей среди чисел $b_1, \ldots, b_n$ найдется ровно k ненулевых. Итак, поэтому нам нужно подсчитать количество целочисленных последовательностей $c_1, \ldots, c_n$ где $c_1 + \cdots + c_n = n+1$, $c_i \geqslant 0$ и ровно k элементов отлично от нуля. Это число равно $\binom{n}{k}\binom{n}{k-1}$ (первый множитель отвечает за выбор мест для ненулевых элементов, а второй — за разбиения числа $n+1$ в упорядоченную сумму k ненулевых слагаемых), откуда и получается требуемая формула.

7. Например, из 3(г) можно получить тождество Тушара[3]

$$\sum_{k \leqslant n/2} \binom{n}{2k} 2^{n-2k} c_k = c_{n+1}.$$

Литература

[1] Р. Грэхем, Д. Кнут, О. Паташник. Конкретная математика.

[2] N. Sloane. On-line encyclopedia of integer sequences. `www.research.att.com/~njas/sequences`

[3] Р. Стенли. Перечислительная комбинаторика.

[2]Это означает, что члены последовательности записаны по кругу, и нам важен только их порядок, но не начало и конец последовательности.

[3]Оно было известно уже в 20-е годы XX века, биективное доказательство было получено Л. Шапиро в середине 70-х годов.