Числа Каталана и естественные отображения: после промежуточного финиша

3.

(w) Последовательности целых чисел $a_1, \dots, a_n$, где $0 \leqslant a_i \leqslant n - i$ и если одновременно $i < j, a_i > 0, a_j > 0$ и $a_{i+1} = \dots = a_{j-1} = 0$, то $a_i + i < a_j + j$

`0 0 0    0 1 0    1 0 0    2 0 0    1 1 0`

(x) Последовательности целых чисел $a_1, \dots, a_n$ где $1 \leqslant a_i \leqslant i$ и если $a_i = j$, то $a_{i-p} \leqslant j - p$ при $1 \leqslant p \leqslant j - 1$

`1 1 1    1 1 2    1 1 3    1 2 1    1 2 3`

(y) Перестановки $a_1, \dots, a_n$ чисел $1, 2, \dots, n$, такие что не существует $i < j < k$ с $a_j < a_k < a_i$ («312-избегающие» перестановки)

`1 2 3    1 3 2    2 1 3    2 3 1    3 2 1`

Определение. *Стандартная n-таблица Юнга — это таблица с невозрастающими длинами строк, заполненная числами $1, \dots, n$ (каждое встречается один раз), причем числа в строках и столбцах возрастают.*

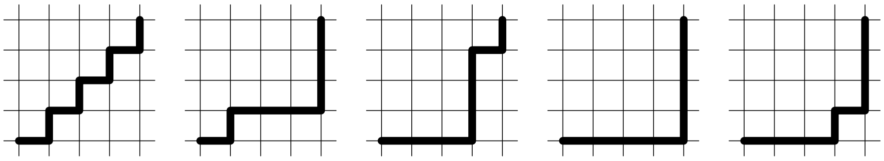
Примеры стандартных 6-таблиц Юнга:

```
1 2 3        1 2 4 5        1 2
4 5          3 6            3 5
6                           4 6
```

(z) Пары (P, Q) стандартных n-таблиц Юнга одинаковой формы с не более чем двумя строками

1 2 3	1 2 3	1 2	1 2	1 2	1 3	1 3	1 2	1 3	1 3
		3	3	3	2	2	3	2	2

($\hbar$) Пути на клетчатой бумаге из $(0, 0)$ в $(n+1, n+1)$, удовлетворяющие условию $2(c_1)$ и такие, что никакой горизонтальный отрезок пути не заканчивается на прямой $y = x - 2$



5. Докажите, что если существует способ разбить числа $1, 2, \dots, k$ на $n+1$ незацепленных групп, ни одна из которых не содержит двух последовательных чисел,[1] то $k \leqslant 2n + 1$.

Определение. *Числа Нараяны $N_{n,k}$ определяются формулой*[2]

$$N_{n,k} = \frac{1}{n}\binom{n}{k}\binom{n}{k-1}.$$

6. Докажите, что количество последовательностей из $2(c_2)$ ровно с k фрагментами '`1 -1`' состоит из $N_{n,k}$ элементов.

7. Из предыдущей задачи ясно, что для каждого n

$$\frac{1}{n}\binom{n}{1}\binom{n}{0} + \frac{1}{n}\binom{n}{2}\binom{n}{1} + \dots + \frac{1}{n}\binom{n}{n}\binom{n}{n-1} = c_n.$$

Выведите из построенных биекций еще какие-нибудь тождества про числа $\binom{n}{k}, c_n, \dots$

---

[1] Как в 3(p)

[2] Мы используем стандартное обозначение $\binom{n}{k} = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$