Емельянов Л.А., Емельянова Т.Л.

Три загадочные точки в треугольнике

Вводная часть

Пусть в треугольнике ABC вписанная окружность, имеющая центром точку I, касается сторон BC, CA, AB в точках A', B', C' соответственно. Отразим точку I относительно сторон треугольника $A'B'C'$ и обозначим полученные точки L_1, L_2 и L_3 (рис. 1).

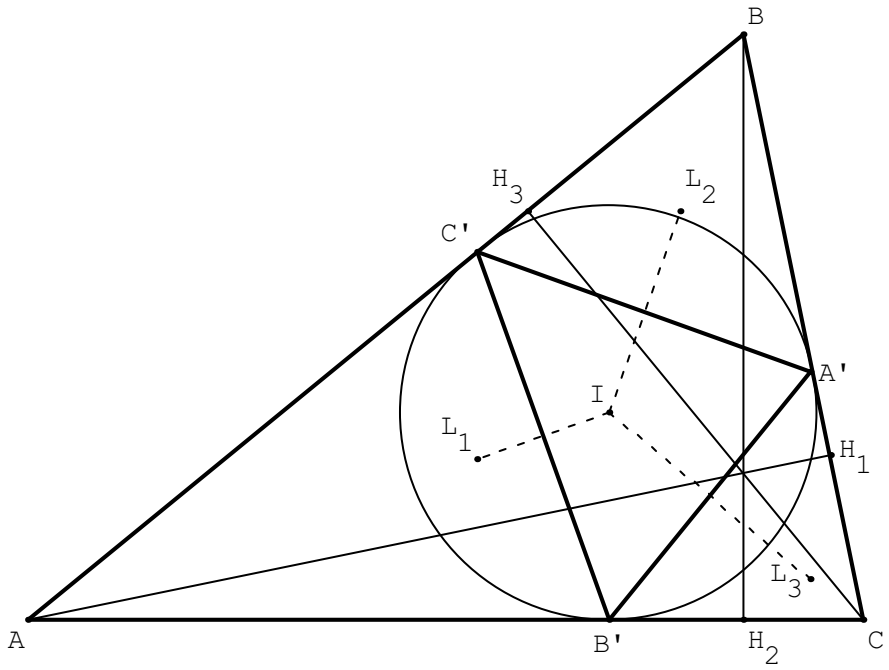

Рис. 1

В дальнейшем будем использовать следующие обозначения: основания высот ΔABC – H_1, H_2, H_3 (рис. 1); углы ΔABC – $\angle A = \alpha$, $\angle B = \beta$, $\angle C = \gamma$; стороны ΔABC – $AB = c$, $BC = a$, $AC = b$; окружность, проходящая через точки X, Y, Z – (XYZ), центр описанной окружности ΔABC – точка O. Треугольник $A'B'C'$ называется треугольником Жергонна.

Предлагаем доказать следующие факты, относящиеся к точкам L_1, L_2 и L_3.

1. Отразим центр описанной окружности произвольного треугольника относительно его сторон. Три полученные таким образом точки являются вершинами треугольника, центрально-симметричного исходному.

Следствие. $\Delta L_1L_2L_3$ центрально-симметричен $\Delta A'B'C'$.

2. L_1, L_2 и L_3 – ортоцентры треугольников $AB'C'$, $BC'A'$ и $CA'B'$ соответственно.

3. Биссектрисы ΔABC являются высотами $\Delta L_1L_2L_3$. Таким образом, центр I вписанной окружности – ортоцентр $\Delta L_1L_2L_3$. Аналогично, центр окружности $(L_1L_2L_3)$ – точка H' – ортоцентр треугольника Жергонна.

4. L_1, L_2 и L_3 – центры вписанных окружностей для треугольников AH_2H_3, BH_3H_1 и CH_1H_2 соответственно.

5. Общие попарные внешние касательные к окружностям, вписанным в треугольники AH_2H_3, BH_3H_1 и CH_1H_2, (отличные от сторон ΔABC) пересекаются в одной точке – центре окружности ($L_1L_2L_3$) (рис.2).

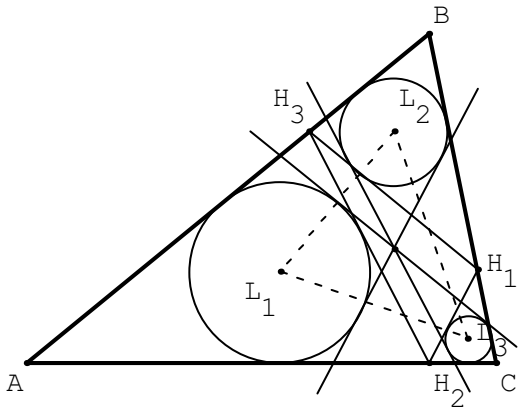

Рис. 2

6. Общие внешние касательные из задачи 5 параллельны сторонам ортотреугольника $H_1H_2H_3$.

7. Прямые L_1H', L_2H' и L_3H' (см. задачу 3) перпендикулярны сторонам ΔABC. (<u>*Определение*</u>: Если прямые, проведённые из вершин одного треугольника перпендикулярно соответствующим сторонам другого треугольника, пересекаются в одной точке, то второй треугольник называется *ортологичным* первому относительно этой точки.)

8. Точки A, B, L_1, L_2 лежат на одной окружности, назовём её ω_3. Аналогичный результат для четвёрок B, C, L_2, L_3 (окружность ω_1) и A, C, L_1, L_3 (окружность ω_2).

9. Треугольники $H_1H_2H_3$ и $L_1L_2L_3$ перспективны. (Перспективными называются треугольники, у которых прямые, соединяющие соответствующие вершины, пересекаются в одной точке.)

10. Пусть A_0, B_0 и C_0 – середины сторон BC, CA и AB соответственно. Треугольники $A_0B_0C_0$ и $L_1L_2L_3$ перспективны.