Емельянов Л.А., Емельянова Т.Л.

# Три загадочные точки в треугольнике

## Основная часть

*Некоторые дополнительные сведения.*

- Гомотетией с центром $O$ и коэффициентом $k$ называется геометрическое преобразование, ставящее в соответствие каждой точке $M$ точку $M'$ по правилу: $\overline{OM'} = k \cdot \overline{OM}$.
- *Теорема о трёх центрах гомотетии*. Пусть фигура $F_1$ гомотетична фигуре $F_2$ с центром $O_{12}$ и коэффициентом $k_{12}$, фигура $F_2$ гомотетична фигуре $F_3$ с центром $O_{23}$ и коэффициентом $k_{23}$, фигура $F_3$ гомотетична фигуре $F_1$ с центром $O_{31}$ и коэффициентом $k_{31}$. Если произведение трёх коэффициентов гомотетии положительно, то три центра гомотетии лежат на одной прямой.
- Прямая, на которой лежат центр описанной окружности $O$, центр тяжести $M$ и ортоцентр $H$, называется прямой Эйлера этого треугольника. При этом выполняется соотношение $HM : MO = 2 : 1$.
- Окружностью девяти точек называется окружность, на которой лежат основания трёх высот треугольника, середины трёх его сторон и середины трёх отрезков, соединяющих его вершины с ортоцентром. Центр окружности девяти точек лежит на прямой Эйлера, точно в середине отрезка между ортоцентром и центром описанной окружности.
- Пусть на плоскости даны точка $P$ и окружность $\omega$. Проведём через $P$ произвольную прямую, пересекающую окружность в точках $M_1$ и $M_2$ (возможно совпадающих). Как известно, $\overline{PM_1} \cdot \overline{PM_2}$ не зависит от положения секущей и называется степенью точки $P$ относительно окружности $\omega$. Геометрическим местом точек, степени которых относительно двух неконцентрических окружностей равны, является прямая, называемая радикальной осью данных окружностей. Для пересекающихся окружностей радикальная ось проходит через точки их пересечения.
- Попарные радикальные оси трёх окружностей пересекаются в одной точке, называемой радикальным центром этих окружностей.
- Точкой Фейербаха треугольника называется точка касания вписанной окружности и окружности девяти точек.

*Задачи*

11. Прямая $IO$ является прямой Эйлера для $\Delta A'B'C'$.

12. а) Центр гомотетии $\Delta A'B'C'$ и $\Delta L_1L_2L_3$ лежит на прямой $IO$.
б) Центр описанной окружности $\Delta L_1L_2L_3$ лежит на прямой $IO$, которая, таким образом, является общей прямой Эйлера для $\Delta A'B'C'$ и $\Delta L_1L_2L_3$.

13. Центры окружностей $\omega_1$, $\omega_2$ и $\omega_3$ (эти окружности определены в задаче 8) – соответственно точки $O_1$, $O_2$ и $O_3$ – образуют треугольник, гомотетичный $\Delta L_1L_2L_3$.

14. Окружность, описанная около $\Delta O_1O_2O_3$, имеет центром точку $O$.

15. Центр гомотетии $\Delta O_1O_2O_3$ и $\Delta L_1L_2L_3$ лежит на прямой $IO$.

16. Радиус окружности, описанной около $\Delta O_1O_2O_3$, равен $R + r$, где $R$ и $r$ – радиусы описанной и вписанной окружностей $\Delta ABC$.

17. Радикальные оси окружности $(O_1O_2O_3)$ и $\omega_1$, $\omega_2$, $\omega_3$ (рис. 12) образуют $\Delta A_1B_1C_1$, гомотетичный $\Delta ABC$ с центром в точке $I$. Таким образом, $\Delta ABC$ и $\Delta A_1B_1C_1$ имеют общие биссектрисы, общий центр вписанной окружности. Попробуйте найти коэффициент гомотетии и границы его изменения.

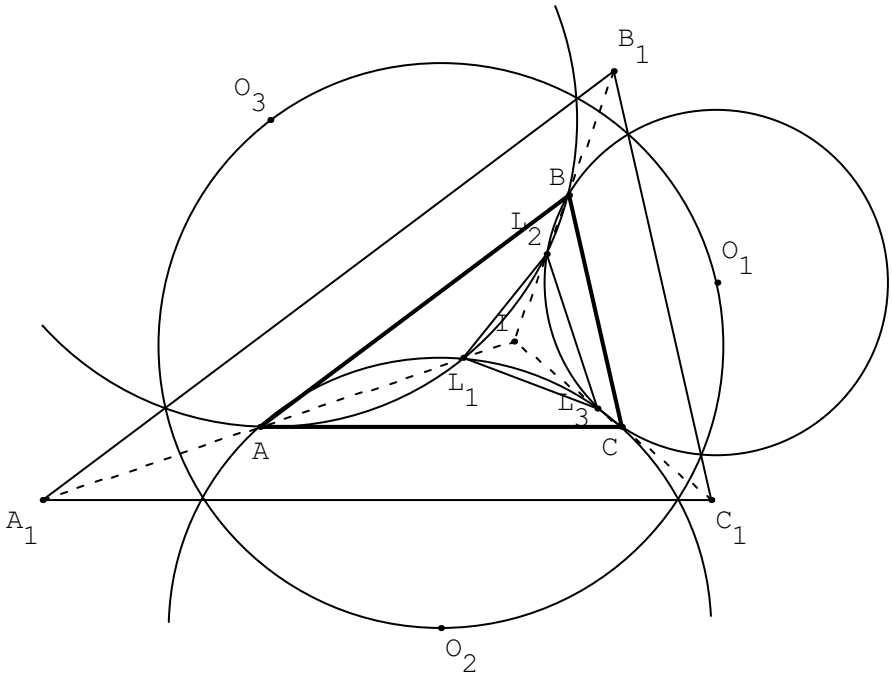


Рис. 12

18. Пусть $I_1$, $I_2$ и $I_3$ – центры вневписанных окружностей $\Delta ABC$. Треугольники $I_1I_2I_3$ и $L_1L_2L_3$ гомотетичны с центром в точке $I$.

19. Треугольники $I_1I_2I_3$ и $O_1O_2O_3$ гомотетичны с центром на прямой $IO$.

20. Попарные центры внешних гомотетий трёх окружностей из задачи 5 лежат на одной прямой (обозначим её $t$), перпендикулярной $IO$.

21*. Назовём попарные касательные из задачи 5 $l_{12}$, $l_{23}$ и $l_{31}$ (индексы прямых соответствуют номерам центров окружностей). Обозначим точки касания окружности, вписанной в треугольник $H_1BH_3$ с прямыми $AB$ и $BC$ через $P$ и $Q$, а с прямыми $l_{23}$ и $l_{12}$ через $P_1$ и $Q_1$. Пусть $P_2$ и $Q_2$ – точки пересечения $AB$ с $l_{23}$ и $BC$ с $l_{12}$ (рис. 13). Прямые $PQ$, $P_1Q_1$ и $P_2Q_2$ пересекаются в одной точке, находящейся на прямой $t$. Аналогичное утверждение верно для двух других окружностей.

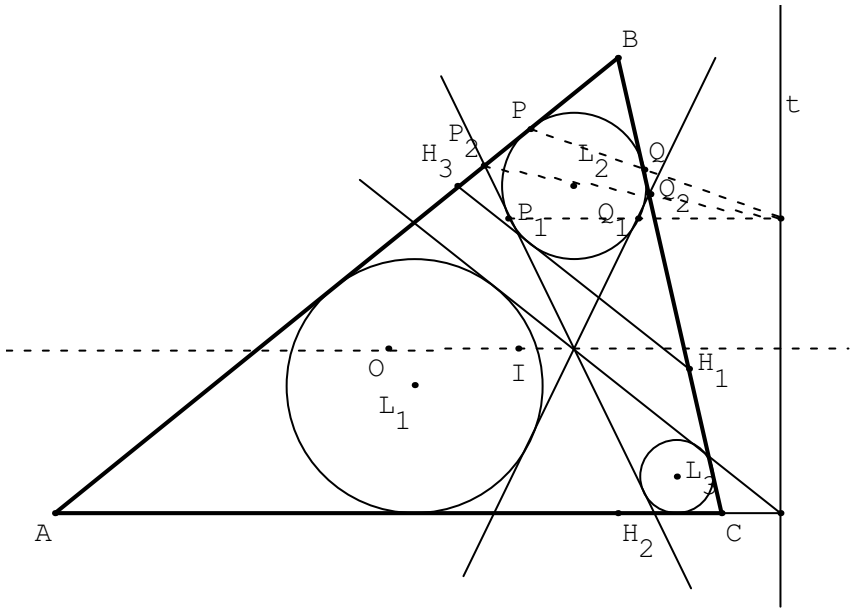


Рис. 13

22. Окружности $(L_1B'C')$, $(L_2C'A')$ и $(L_3A'B')$ пересекаются в одной точке, лежащей на окружности $(L_1L_2L_3)$. А также окружности $(A'L_2L_3)$, $(B'L_3L_1)$ и $(C'L_1L_2)$ пересекаются в одной точке, лежащей на вписанной окружности треугольника $ABC$.

23. Окружности $(L_1H_2H_3)$, $(L_2H_3H_1)$ и $(L_3H_1H_2)$ пересекаются в одной точке, лежащей на окружности $(L_1L_2L_3)$.

24. Точки $A'$, $H_1$, $L_2$ и $L_3$ лежат на одной окружности, проходящей через точку Фейербаха. Аналогично для четвёрок $B', H_2, L_1, L_3$ и $C', H_3, L_1, L_2$ (рис. 14).

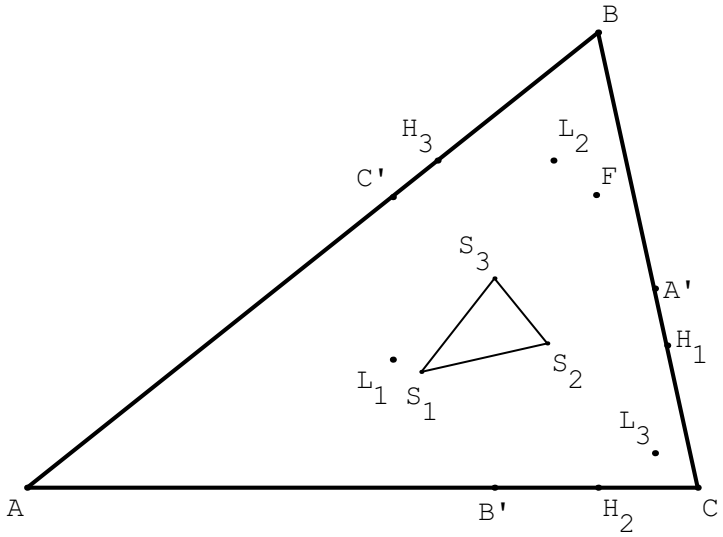


Рис. 14

25. Центры окружностей, определённых в задаче 24, образуют треугольник $S_1S_2S_3$, подобный $ABC$ (рис. 14).

26. Треугольники $S_1S_2S_3$ и $ABC$ (рис. 14) имеют общий центр вписанной окружности.

27. Треугольники $S_1S_2S_3$ и $A_0B_0C_0$ имеют общий центр описанной окружности.