Емельянов Л.А., Емельянова Т.Л.

Три загадочные точки в треугольнике

Решения задач вводной части

1. Пусть K_0 и M_0 – середины сторон MN и KN ΔKMN, Q – центр описанной окружности, K_1 и M_1 – точки, симметричные точке Q относительно MN и KN (рис. 3).

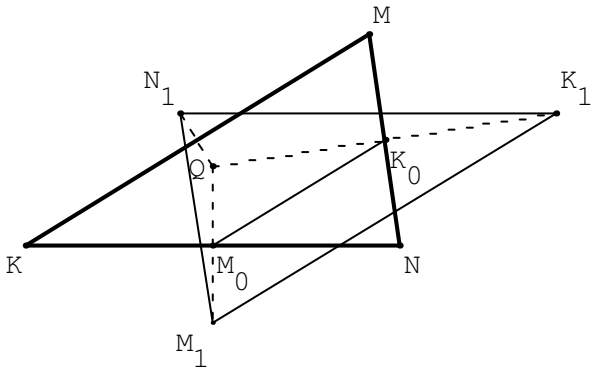

Рис. 3

Отрезок K_0M_0 – общая средняя линия треугольников KMN и K_1QM_1, следовательно, отрезки K_1M_1 и KM равны и параллельны, что в данном случае означает их центральную симметричность. Аналогично для других пар сторон.

2. Проведём доказательство для $\Delta AB'C'$ (рис. 4).

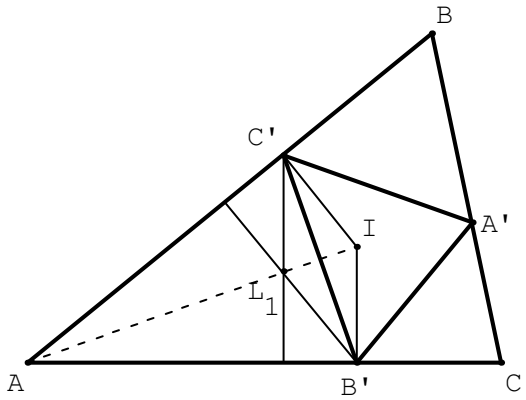

Рис. 4

$\angle L_1C'I = \angle IC'B' = \angle IB'C'$, следовательно, $C'L_1 \parallel IB'$, значит, $C'L_1 \perp AB'$. Аналогично, $B'L_1 \perp AC'$. Следовательно, L_1 – ортоцентр $\Delta AB'C'$.

3. Биссектриса AL_1 перпендикулярна $B'C'$, а также и L_2L_3, т.е. AL_1 – высота $\Delta L_1L_2L_3$. Для BL_2 и CL_3 – аналогично.

4. Докажем утверждение для L_1 (рис. 5).

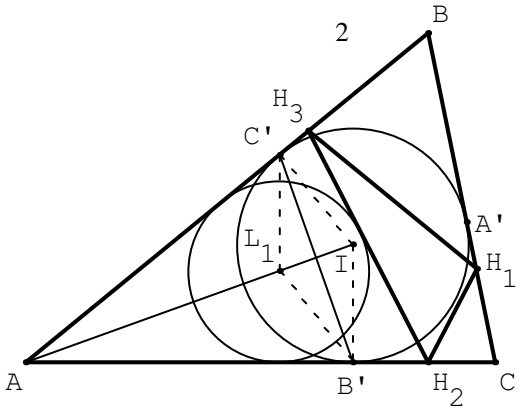

Рис. 5

Точки B, C, H_2, H_3 лежат на окружности с диаметром BC. Следовательно, $\angle AH_3H_2 = \angle ACB$. Значит, треугольники AH_2H_3 и ABC подобны с коэффициентом $\frac{AH_3}{AC} = \cos\alpha$. Из подобия следует, что расстояния от точки A до центра вписанной окружности ΔAH_2H_3 равно $AI\cos\alpha$. С другой стороны

$$AL_1 = AI - IL_1 = AI - 2IB'\sin\frac{\alpha}{2} = AI - 2AI\sin^2\frac{\alpha}{2} = AI\cos\alpha.$$

Таким образом, L_1 – центр вписанной окружности ΔAH_2H_3.

5. (Рис. 6)

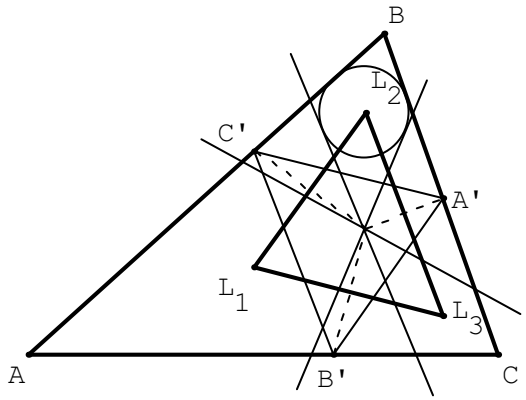

Рис. 6

Треугольники $A'B'C'$ и $L_1L_2L_3$ центрально-симметричны. Точки L_1, L_2 и L_3 получены отражением центра описанной окружности $\Delta A'B'C'$ относительно его сторон. Значит, точки A', B' и C' являются отражениями центра описанной окружности $\Delta L_1L_2L_3$ относительно его сторон, т.е. относительно линий центров определённых в условии задачи окружностей. Точки A', B' и C' лежат на сторонах ΔABC, т.е. на попарных касательных к этим окружностям, следовательно, центр описанной окружности $\Delta L_1L_2L_3$ лежит на вторых касательных к окружностям.

6. $\angle AH_3H_2 = \angle ACB$ (см. решение задачи 4), следовательно, при отражении относительно биссектрисы угла A прямая H_2H_3 перейдёт в параллельную BC прямую. С другой стороны вторая касательная к окружностям, вписанным в треугольники BH_3H_1 и CH_1H_2, симметрична BC относительно L_2L_3, которая перпендикулярна биссектрисе угла A, поэтому эта касательная при отражении относительно биссектрисы также перейдёт в прямую, параллельную BC. Значит, вторая касательная и прямая H_2H_3 параллельны. (Рис. 7)

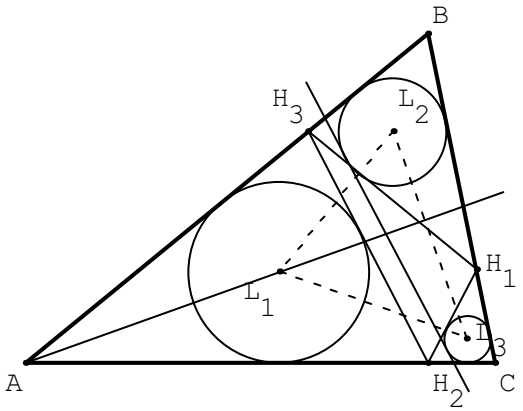

Рис. 7

7. Обозначим P и Q точки пересечения с BC касательных, параллельных H_1H_2 и H_1H_3 (рис. 8). Прямая L_1H' – биссектриса угла между этими касательными.

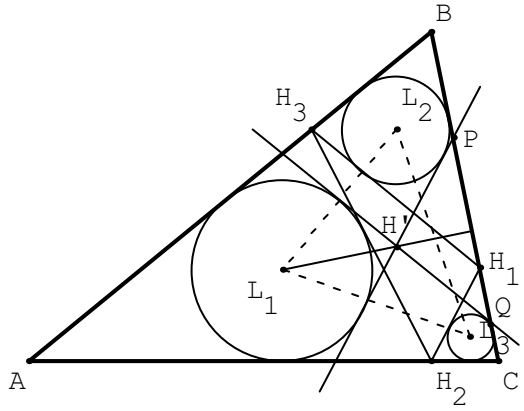

Рис. 8

$\angle H'PQ = \angle H_2H_1C = \angle H_3H_1B = \angle H'QP$, следовательно, $\Delta H'PQ$ равнобедренный, значит, L_1H' ещё и высота в этом треугольнике, т.е. $L_1H' \perp BC$.

8. Докажем, что точки B, C, L_2 и L_3 лежат на одной окружности. Пусть T – точка пересечения прямых AI и L_2L_3 (рис. 9).

$$\angle BL_2L_3 = \angle L_2IT + \angle L_2TI = \frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} + 90^\circ = 180^\circ - \frac{\gamma}{2}.$$

Значит, четырёхугольник BCL_3L_2 вписанный.

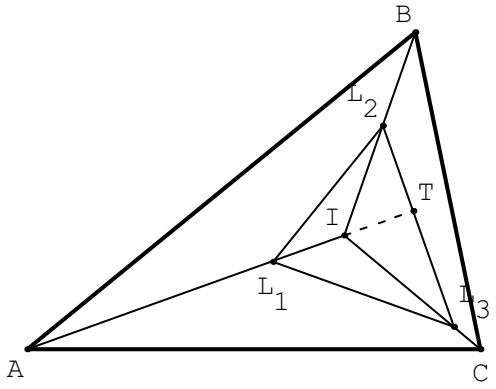

Рис. 9

9. Используем теорему Чевы для ортотреугольника $H_1H_2H_3$. Найдём, в каком отношении прямая H_1L_1 делит отрезок H_2H_3. На рис. 10 D – точка их пересечения, E и F – проекции точки D на H_1H_3 и H_1H_2, S и G – проекции точки L_1 на эти же прямые.

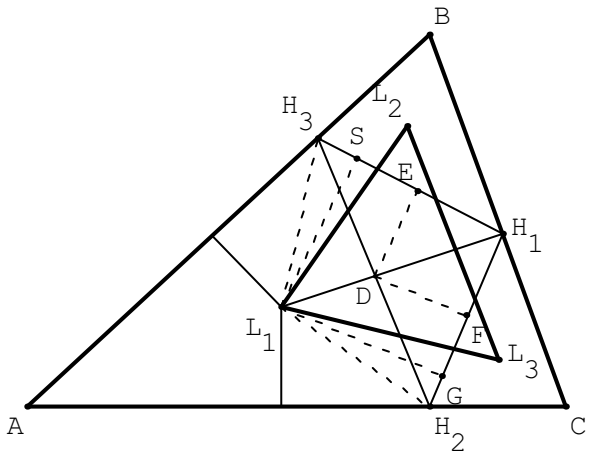

Рис. 10

Учитывая то, что $\angle H_1H_2H_3 = 180° - 2\beta$ и $\angle H_1H_3H_2 = 180° - 2\gamma$, получим

$$\frac{H_2D}{H_3D} = \frac{DF/\sin 2\beta}{DE/\sin 2\gamma} = \frac{L_1G\sin 2\gamma}{L_1S\sin 2\beta} = \frac{L_1H_2\sin\frac{3\beta}{2}\sin 2\gamma}{L_1H_3\sin\frac{3\gamma}{2}\sin 2\beta} = \frac{\sin\frac{\gamma}{2}\sin\frac{3\beta}{2}\sin 2\gamma}{\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{3\gamma}{2}\sin 2\beta}.$$

Отношения для остальных сторон ортотреугольника будут

$$\frac{\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{3\gamma}{2}\sin 2\alpha}{\sin\frac{\gamma}{2}\sin\frac{3\alpha}{2}\sin 2\gamma} \quad \text{и} \quad \frac{\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{3\alpha}{2}\sin 2\beta}{\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{3\beta}{2}\sin 2\alpha}.$$

Легко убедиться, что произведение этих трёх отношений равно 1, откуда и следует утверждение задачи.

10. Используем теорему Чевы для серединного треугольника $A_0B_0C_0$. Найдём, в каком отношении прямая B_0L_2 делит отрезок C_0A_0 (точка N на рис. 11).

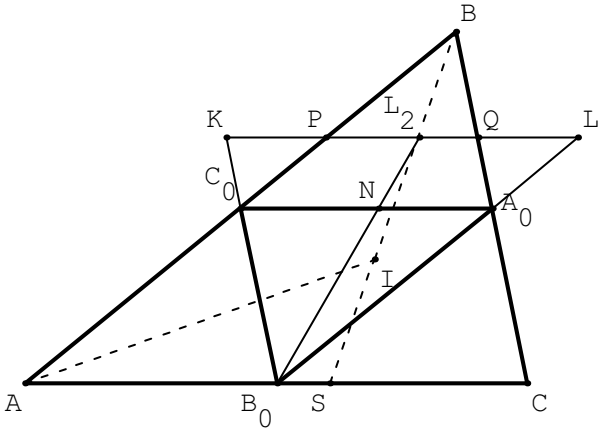

Рис. 11

Продолжим B_0C_0 и B_0A_0 до пересечения с прямой, проходящей через точку L_2 параллельно AC (точки K и L). Обозначим P и Q точки пересечения этой прямой с AB и BC. Пусть коэффициент подобия треугольников PBQ и ABC равен k, тогда треугольники PBQ и

$A_0B_0C_0$ подобны с коэффициентом $2k$, а равные треугольники KC_0P и QA_0L подобны треугольнику $A_0B_0C_0$ с коэффициентом $1-2k$.

$$\frac{C_0N}{A_0N}=\frac{KL_2}{LL_2}=\frac{KP+PL_2}{LQ+QL_2}=\frac{(1-2k)\cdot\frac{b}{2}+k\cdot\frac{cb}{a+c}}{(1-2k)\cdot\frac{b}{2}+k\cdot\frac{ab}{a+c}}=\frac{a+c-2ka}{a+c-2kc}.$$

Найдём k. Пусть S – основание биссектрисы BI треугольника ABC.

$$k=\frac{BL_2}{BS}=\frac{BL_2/BI}{BS/BI}=\frac{\cos\beta}{1+IS/BI}=\frac{\cos\beta}{1+AS/AB}=\frac{\cos\beta}{1+\frac{cb}{c(a+c)}}=\frac{(a+c)\cos\beta}{a+b+c}.$$

Учитывая, что $\cos\beta=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}$, получим

$$\frac{C_0N}{A_0N}=\frac{a+c-2\frac{(a+c)(a^2+c^2-b^2)}{2ac(a+b+c)}a}{a+c-2\frac{(a+c)(a^2+c^2-b^2)}{2ac(a+b+c)}c}=\frac{a(a+b)(c+b-a)}{c(b+c)(a+b-c)}.$$

Отношения для остальных сторон серединного треугольника будут

$$\frac{b(b+c)(a+c-b)}{a(c+a)(b+c-a)}\text{ и }\frac{c(c+a)(b+a-c)}{b(a+b)(c+a-b)}.$$

Легко убедиться, что произведение этих трёх отношений равно 1, откуда и следует утверждение задачи.