Емельянов Л.А., Емельянова Т.Л.

Три загадочные точки в треугольнике

Решения задач основной части

11. Пусть $H_1'H_2'H_3'$ – ортотреугольник треугольника Жергонна (рис. 15).

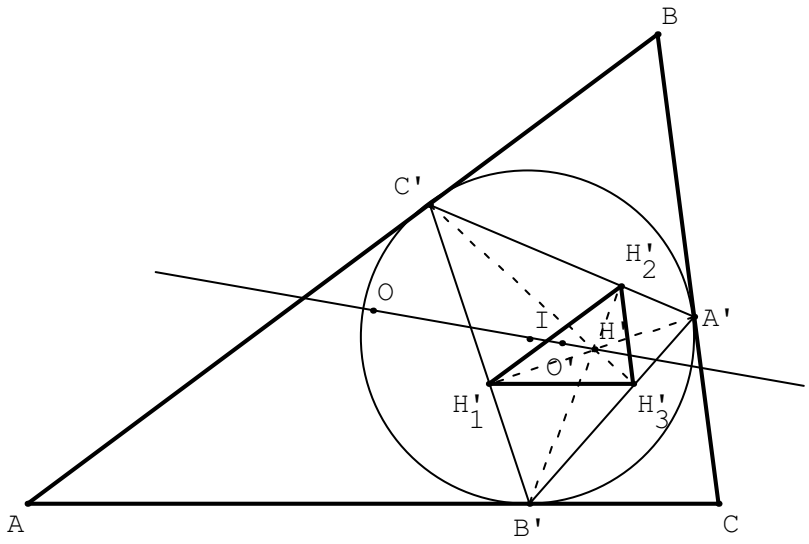

Рис. 15

Сравнением углов нетрудно показать, что $H_1'A'$, $H_2'B'$ и $H_3'C'$ – биссектрисы $\Delta H_1'H_2'H_3'$, и точка H' – его центр вписанной окружности. Кроме того, $\Delta H_1'H_2'H_3'$ гомотетичен ΔABC. При этой гомотетии $H' \to I$ как центры вписанных окружностей этих треугольников, а $O' \to O$, где O' – центр описанной окружности $\Delta H_1'H_2'H_3'$ (окружности девяти точек треугольника Жергонна). Таким образом, точки H' и I, а также O' и O лежат на одной прямой с центром гомотетии. Поскольку O' лежит на прямой $H'I$ – прямой Эйлера $\Delta A'B'C'$, то и точка O лежит на этой прямой.

Другое решение задачи 11 (А. Ганбат)

При инверсии относительно вписанной окружности треугольника ABC точки A, B, C переходят соответственно в середины отрезков $B'C'$, $C'A'$, $A'B'$. Следовательно, описанная окружность треугольника ABC переходит в окружность девяти точек треугольника Жергонна. Отсюда следует, что центр O окружности (ABC), центр O' окружности девяти точек треугольника Жергонна и центр I вписанной окружности треугольника ABC лежат на одной прямой. Но $O'I$ – прямая Эйлера треугольника $A'B'C'$.

12 а) Пусть A'', B'' и C'' – середины сторон $\Delta A'B'C'$ (рис. 16).

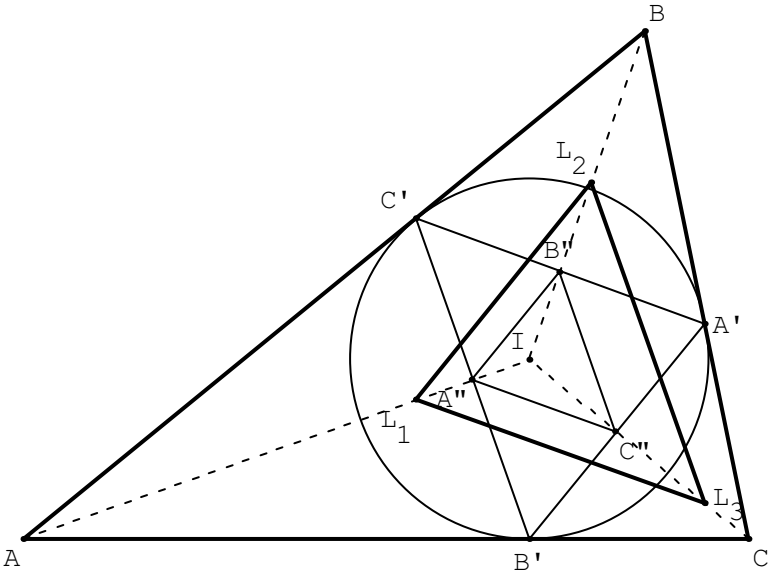

Рис. 16

$\Delta A''B''C''$ гомотетичен $\Delta A'B'C'$ относительно его центра тяжести M' с коэффициентом $-\frac{1}{2}$. С другой стороны, $\Delta A''B''C''$ гомотетичен $\Delta L_1L_2L_3$ относительно точки I с коэффициентом $\frac{1}{2}$. А $\Delta A'B'C'$ и $\Delta L_1L_2L_3$ гомотетичны с коэффициентом -1. Произведение трёх попарных коэффициентов гомотетии положительно, следовательно, три центра гомотетии лежат на одной прямой. То есть, центр гомотетии $\Delta L_1L_2L_3$ и $\Delta A'B'C'$ лежит на прямой IM' – прямой Эйлера $\Delta A'B'C'$, она же прямая IO.

б) Центры описанных окружностей двух гомотетичных треугольников лежат на одной прямой с центром гомотетии. I – центр описанной окружности $\Delta A'B'C'$. Из а) следует, что центр описанной окружности $\Delta L_1L_2L_3$ также лежит на прямой IO.

Другое решение задачи 12. $\Delta L_1L_2L_3$ и $\Delta A'B'C'$ центрально-симметричны. Ортоцентр одного из них является центром описанной окружности другого. Следовательно, у этих треугольников общая прямая Эйлера, а их центр симметрии – середина отрезка $H'I$, что является центром окружности девяти точек $\Delta A'B'C'$ и $\Delta L_1L_2L_3$.

13. Точки O_2 и O_3 лежат на одном серединном перпендикуляре к AL_1 (рис. 17), следовательно, $O_2O_3 \parallel B'C' \parallel L_2L_3$. Аналогично, $O_1O_3 \parallel L_1L_3$, $O_1O_2 \parallel L_1L_2$. Значит, $\Delta O_1O_2O_3$ и $\Delta L_1L_2L_3$ гомотетичны.

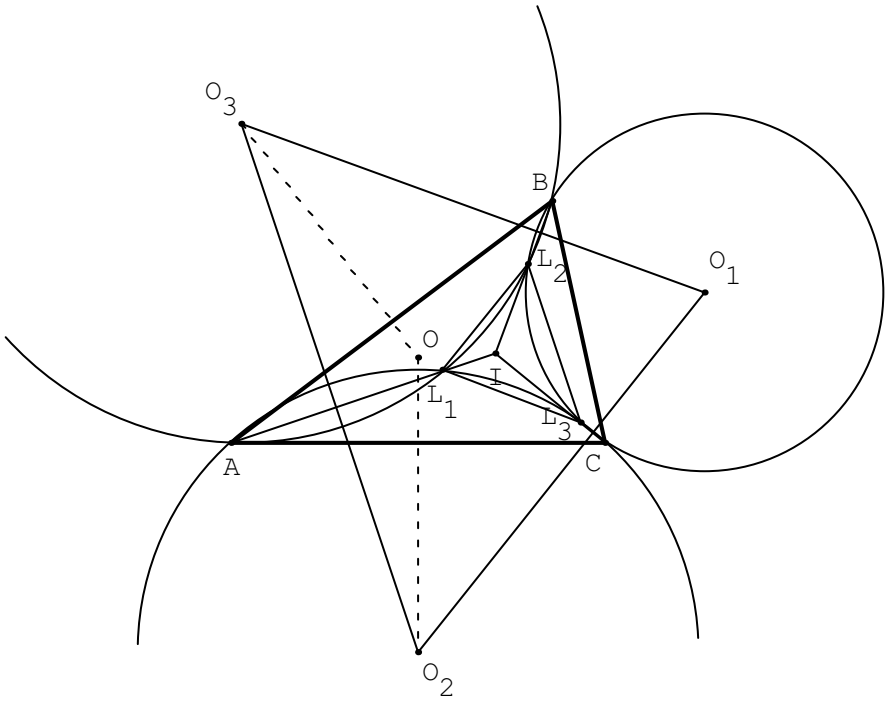

Рис. 17

14. Точки O_3 и O лежат на одном серединном перпендикуляре к AB, точки O_2 и O лежат на одном серединном перпендикуляре к AC (рис. 17).

$\angle O_2OO_3 = 180° - \alpha = \beta + \gamma$, отсюда следует, что $\angle O_2O_1O_3 = \angle B'A'C' = \dfrac{\beta+\gamma}{2} = \dfrac{1}{2}\angle O_2OO_3$. Аналогично, $\angle O_1O_2O_3 = \dfrac{1}{2}\angle O_1OO_3$ и $\angle O_2O_3O_1 = \dfrac{1}{2}\angle O_2OO_1$. Следовательно, точки O_1, O_2 и O_3 лежат на окружности с центром O.

15. $\Delta A'B'C'$ и $\Delta O_1O_2O_3$ гомотетичны с положительным коэффициентом и центром, лежащем на линии центров их описанных окружностей, т.е. на IO.

$\Delta A'B'C'$ и $\Delta L_1L_2L_3$ гомотетичны с коэффициентом –1 и центром на IO (задача 12).

$\Delta O_1O_2O_3$ и $\Delta L_1L_2L_3$ гомотетичны с отрицательным коэффициентом. Из теоремы о трёх центрах гомотетии следует, что центр этой гомотетии также лежит на IO.

16. $\Delta A'B'C'$ и $\Delta O_1O_2O_3$ имеют общие высоты, т.к. A' и O_1 лежат на серединном перпендикуляре к L_2L_3, следовательно, и общий ортоцентр H', который и является их центром гомотетии. Коэффициент гомотетии равен $k = \dfrac{H'O}{H'I} = 1 + \dfrac{IO}{H'I}$.

Центр O' окружности девяти точек $\Delta A'B'C'$ делит пополам расстояние между его ортоцентром H' и центром I описанной окружности. Из решения задачи 11 следует, что $\dfrac{IO}{H'O'}$ – коэффициент гомотетии ΔABC и $\Delta H_1'H_2'H_3'$. Он равен отношению радиусов их описанных окружностей $\dfrac{R}{r/2}$.

Итак, $k = 1 + \dfrac{IO}{H'I} = 1 + \dfrac{IO}{2H'O'} = 1 + \dfrac{R}{r} = \dfrac{r+R}{r}$. Следовательно, радиус окружности, описанной около $\Delta O_1O_2O_3$, равен $R + r$.

17. (О. Гольберг) Докажем, например, что $A_1B_1 \parallel AB$. AB – радикальная ось (ABC) и ω_3, а (ABC) и $(O_1O_2O_3)$ имеют общий центр, следовательно, $A_1B_1 \parallel AB$.

Докажем теперь, что A_1 лежит на прямой AI. A_1 – радикальный центр ω_2, ω_3 и $(O_1O_2O_3)$, т.к. является точкой пересечения двух радикальных осей ω_2 и $(O_1O_2O_3)$, ω_3 и $(O_1O_2O_3)$. Следовательно, A_1 лежит на радикальной оси ω_2 и ω_3 – прямой AI.

Найдём коэффициент гомотетии как отношение расстояний от центра гомотетии I до B_1C_1 и BC (последнее расстояние равно r). Обозначим W точку пересечения B_1C_1 и OO_1, T – проекцию I на OO_1 (рис. 18).

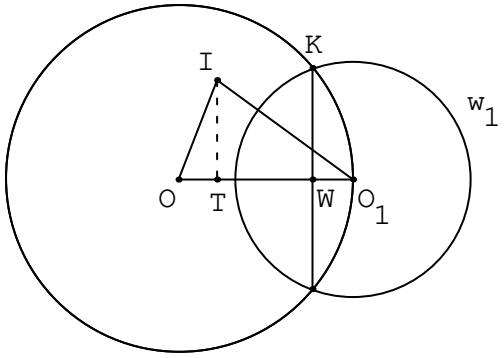

Рис. 18

Пусть $O_1W = m$, $WO = n$, $\pm WT = t$, где «+» берётся, если $T \in [WO)$ и «–», если $T \in [WO_1)$. Тогда расстояние от I до B_1C_1 равно $|t|$.

$$IO_1^2 - IO^2 = O_1T^2 - OT^2 = (m+t)^2 - (n-t)^2 = (m^2 - n^2) + 2(m+n)t,$$

$$m^2 - n^2 = KO_1^2 - KO^2 = R_1^2 - (R+r)^2, \text{ где } R_1 \text{ – радиус } \omega_1,$$

$$IO_1^2 - IO^2 = R_1^2 - (R+r)^2 + 2(m+n)t,$$

$$IO_1^2 - R_1^2 - IO^2 + (R+r)^2 = 2(m+n)t.$$

$IO_1^2 - R_1^2$ есть степень точки I относительно ω_1. I есть радикальный центр окружностей ω_1, ω_2 и ω_3 и, следовательно, имеет одну и ту же степень относительно этих окружностей. Нетрудно подсчитать, что она равна $IL_1 \cdot IA = 2r^2$. Тогда $2(m+n)t = 2r^2 - IO^2 + (R+r)^2$. Учитывая, что $IO^2 = R^2 - 2Rr$ (*Эйлер*), получим

$$t = \frac{2r^2 + (R+r)^2 - (R^2 - 2Rr)}{2(m+n)} = \frac{3r^2 + 4Rr}{2(m+n)}.$$

Следовательно, коэффициент гомотетии равен

$$\frac{t}{r} = \frac{3r + 4R}{2R + 2r} = \frac{3 + 4\,R/r}{2 + 2\,R/r} = 2 - \frac{1}{2 + R/r}.$$

Поскольку множеством значений отношения $\dfrac{R}{r}$ является промежуток $[2, \infty)$ (следует из формулы Эйлера), коэффициент гомотетии изменяется в пределах $\left[\dfrac{11}{6};\ 2\right)$

18. (Рис. 19)

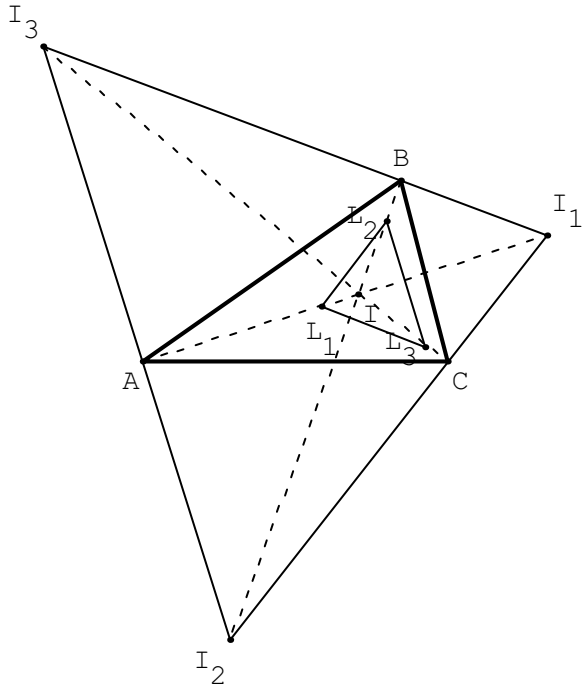

Рис. 19

$I_2I_3 \perp AI$ как внешняя и внутренняя биссектрисы ΔABC. Следовательно, $I_2I_3 \parallel L_2L_3$. Значит, треугольники $I_1I_2I_3$ и $L_1L_2L_3$ гомотетичны.

Точки L_1 и I_1 лежат на прямой AI, следовательно, I – центр гомотетии.

19. Треугольники $I_1I_2I_3$ и $O_1O_2O_3$ гомотетичны, т.к. каждый из них гомотетичен $\Delta L_1L_2L_3$. Треугольники $I_1I_2I_3$ и $L_1L_2L_3$ гомотетичны с центром I и отрицательным коэффициентом, $\Delta O_1O_2O_3$ и $\Delta L_1L_2L_3$ гомотетичны с отрицательным коэффициентом и центром на IO (задача 15). Треугольники $I_1I_2I_3$ и $O_1O_2O_3$ гомотетичны с положительным коэффициентом и центром на IO (по теореме о трёх центрах гомотетии).

20. Обозначим M_1, M_2 и M_3 попарные центры гомотетиии трёх окружностей (рис. 20). Прямая L_2L_3 – радикальная ось окружностей $(L_1L_2L_3)$ и ω_1. Прямая BC – радикальная ось окружностей (ABC) и ω_1. Следовательно, точка M_1 пересечения этих двух радикальных осей является радикальным центром окружностей $(L_1L_2L_3)$, (ABC) и ω_1, то есть лежит на радикальной оси окружностей $(L_1L_2L_3)$ и (ABC). Аналогично, M_2 и M_3 лежат на той же радикальной оси. Как известно, радикальная ось перпендикулярна линии центров. Следовательно, прямая t перпендикулярна $H'O$ (она же IO).

Другое решение задачи 20 (Куликов А.) По теореме о трёх центрах гомотетии точки M_1, M_2 и M_3 лежат на одной прямой (рис. 20).

Попарные касательные пересекаются в точке H' (задача 5), лежащей на IO. Покажем, что $M_1M_2 \perp IH'$. По обратной теореме Пифагора это равносильно тому, что $H'M_2^2 - H'M_1^2 = IM_2^2 - IM_1^2$. Преобразуем правую часть этого равенства.

$$IM_2^2 - IM_1^2 = \left(B'I^2 + B'M_2^2\right) - \left(A'I^2 + A'M_1^2\right) = B'M_2^2 - A'M_1^2.$$

B' и H' симметричны относительно L_1L_3 (задача 5), следовательно, $B'M_2 = H'M_2$. Аналогично получим, что $A'M_1 = H'M_1$. Таким образом, $B'M_2^2 - A'M_1^2 = H'M_2^2 - H'M_1^2$. Значит, $M_1M_2 \perp IH'$.

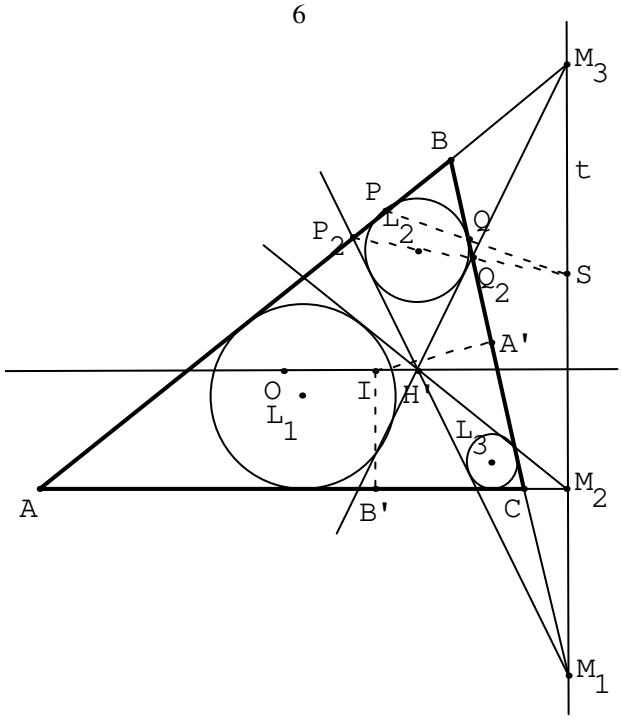

Рис. 20

Главные диагонали описанного шестиугольника пересекаются в одной точке (*Брианшон*). Следовательно, прямые M_1M_3, PQ и P_2Q_2 пересекаются в одной точке (точка *S* на рис. 20) как главные диагонали описанного шестиугольника $M_1P_2PM_3Q_2Q$.

22. *Лемма.* Пусть точки *X, Y, Z, X′, Y′, Z′* таковы, что сумма $(XZ',YZ')+(YX',ZX')+(ZY',XY')$ кратна π. Тогда окружности *(XYZ′), (YZX′), (ZXY′)* имеют общую точку. (Здесь за (a,b) обозначен *направленный угол* между прямыми *a, b.* Направленным углом между прямыми *a, b* называется угол, на который нужно повернуть прямую *a* против часовой стрелки, чтобы она совпала с прямой *b.* Угол (a,b) определен с точностью до πk. Основные свойства: $(a,b)=-(b,a)$, $(a,b)+(b,c)=(a,c)$; если *A* и *B* - фиксированные точки, то окружность, проходящая через *A* и *B*, есть множество точек *X*, для которых (AX,BX) равен постоянной величине.)

Доказательство леммы.

Если две из окружностей совпадают, то все ясно.

Обозначим за *P* вторую точку окружностей *(XYZ′)* и *(YZX′).* Тогда $(XP,YP)=(XZ',YZ')$ и. $(YP,ZP)=(YX',ZX')$. (Если *P* совпадает с одной из точек *X*, *Z*, то доказывать нечего; если окружности *(XYZ′)* и *(YZX′)* касаются в точке *Y*, то полагаем *P=Y* , при этом прямая *YP* означает общую касательную к окружностям *(XYZ′)* и *(YZX′)*, проходящую через точку *Y.*)

Поэтому $(XP,ZP)=(XP,YP)+(YP,ZP)=(XZ',YZ')+(YX',ZX')=-(ZY',XY')=(XY',ZY')$.Это означает, что точки *X, Y′, Z, P* лежат на одной окружности.

Решение задачи. $(A'L_3,L_3B')+(B'L_1,L_1C')+(C'L_2,L_2A')=(A'I,IB')+(B'I,IC')+(C'I,IA')=2\pi$, отсюда по лемме следует, что окружности $(L_1B'C')$, $(L_2C'A')$ и $(L_3A'B')$ имеют общую точку. Теперь докажем, что окружности $(L_1L_2L_3)$, $(L_2C'A')$ и $(L_3A'B')$ имеют общую точку:

$$(L_3L_1,L_1L_2)+(L_2C',C'A')+(A'B',B'L_3)=\left(\frac{\beta+\gamma}{2}\right)+\left(\pi-\frac{\beta}{2}\right)+\left(\pi-\frac{\gamma}{2}\right)=2\pi.$$

Таким же образом получим, что и оставшиеся две тройки окружностей имеют общую точку.

Итак, каждая из четырех троек окружностей имеет по общей точке. Если некоторые две окружности касаются или совпадают, то легко видеть, что все четыре окружности имеют общую точку. Иначе из доказательства леммы следует, что окружности $(L_1B'C')$, $(L_2C'A')$ и $(L_3A'B')$ имеют общую точку *P*, которая отлична от *A′*, *B′*, *C′*. Если $(L_1L_2L_3)$ не проходит через *P*, то она должна проходить через *A′*, *B′*, *C′*, т.е. все четыре данные окружности совпадают.

Таким образом, в любом случае все четыре указанные окружности имеют общую точку.

Из центральной симметрии треугольников $L_1L_2L_3$ и $A'B'C'$ следует второе утверждение задачи.

23. $\left(H_1L_3, L_3H_2\right)+\left(H_2L_1, L_1H_3\right)+\left(H_3L_2, L_2H_1\right)=\left(\pi-\frac{\alpha+\beta}{2}\right)+\left(\pi-\frac{\beta+\gamma}{2}\right)+\left(\pi-\frac{\gamma+\alpha}{2}\right)=2\pi$, отсюда по лемме следует, что окружности $\left(L_1H_2H_3\right)$, $\left(L_2H_3H_1\right)$ и $\left(L_3H_1H_2\right)$ пересекаются в одной точке. Теперь докажем, что окружности $\left(L_1L_2L_3\right)$, $\left(L_2H_3H_1\right)$ и $\left(L_3H_1H_2\right)$ пересекаются в одной точке.

$$\left(L_3L_1, L_1L_2\right)+\left(L_2H_3, H_3H_1\right)+\left(H_1H_2, H_2L_3\right)=\left(\frac{\beta+\gamma}{2}\right)+\left(\pi-\frac{\gamma}{2}\right)+\left(\pi-\frac{\beta}{2}\right)=2\pi.$$

Таким же образом получим, что и оставшиеся две тройки окружностей имеют общую точку.

Далее, рассуждениями, использованными в решении задачи 22, показываем, что на самом деле все четыре окружности имеют общую точку.

24. Воспользуемся тем, что точки A' и H' симметричны относительно L_2L_3.

$$\left(A'L_2, A'L_3\right)=\left(H'L_3, H'L_2\right)=2\cdot\left(L_1L_3, L_1L_2\right)=\beta+\gamma.$$

$$\left(H_1L_2, H_1L_3\right)=\pi-\frac{\alpha}{2}-\frac{\alpha}{2}=\beta+\gamma.$$

Следовательно, точка H_1 лежит на окружности $A'L_2L_3$. Аналогично $H_2\in\left(B'L_1L_3\right)$ и $H_3\in\left(C'L_1L_2\right)$.

Три указанные окружности имеют общую точку, лежащую на вписанной окружности (задача 22). Покажем, что эта точка также лежит на окружности девяти точек.

$$\left(L_1L_3, L_3H_2\right)+\left(H_2H_1, H_1H_3\right)+\left(H_3L_2, L_2L_1\right)=\frac{\pi}{2}-\alpha+2\alpha+\frac{\pi}{2}-\alpha=\pi$$

Из леммы следует, что окружности $\left(H_2L_1L_3\right)$, $\left(H_3L_1L_2\right)$ и $\left(H_1H_2H_3\right)$ имеют общую точку. Это точка Фейербаха, единственная общая точка вписанной окружности и окружности девяти точек.

25. Докажем, например, что $\left(BA, BC\right)=\left(S_2S_3, S_2S_1\right)$ (рис. 21).

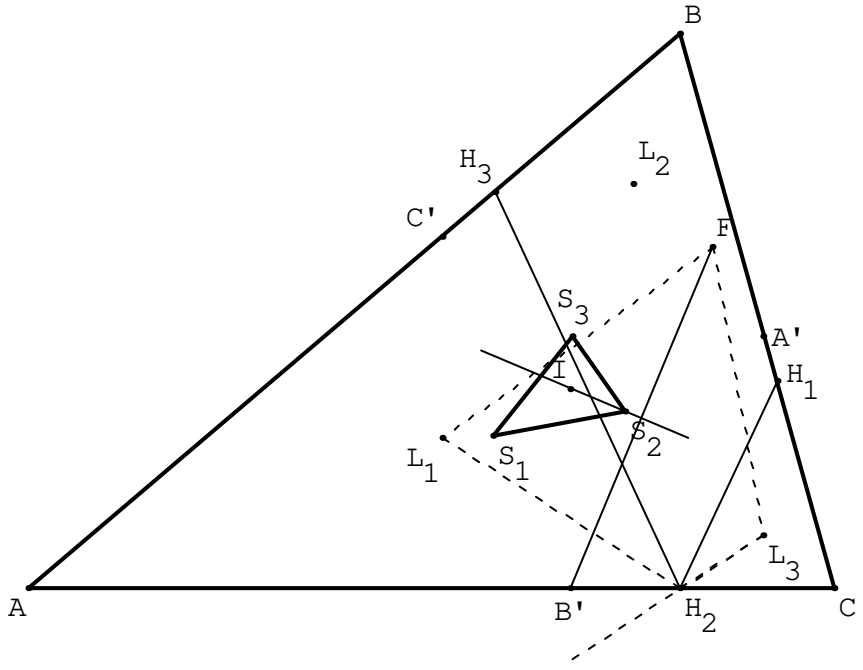

Рис. 21

Прямая FL_1 является радикальной осью окружностей $(L_1H_3L_2)$ и $(L_1H_2L_3)$, следовательно, $FL_1 \perp S_2S_3$. Аналогично, $FL_3 \perp S_1S_2$. Значит,

$$(S_2S_3, S_2S_1) = (FL_1, FL_3) = (H_2L_1, H_2L_3) = (H_2C, H_2L_3) + (H_2L_1, H_2A).$$

L_1 и L_3 – центры вписанных окружностей треугольников AH_3H_3 и CH_2H_1, следовательно,

$$(H_2C, H_2L_3) + (H_2L_1, H_2A) = \frac{1}{2}(H_2C, H_2H_1) + \frac{1}{2}(H_2H_3, H_2A) = (BA, BC).$$

26. (Рис. 21) $B'L_1 = B'L_3$ (оба расстояния равны r), следовательно, FB' – биссектриса угла (FL_1, FL_3). Отрезок FB' является общей хордой окружности $(L_1H_2L_3)$ и вписанной окружности. Серединный перпендикуляр к этому отрезку проходит через центры этих окружностей – точки S_2 и I. Из решения задачи 25 следует, что биссектрисы углов (S_2S_3, S_2S_1) и (FL_1, FL_3) перпендикулярны. Следовательно, серединный перпендикуляр к отрезку FB' и является биссектрисой угла (S_2S_3, S_2S_1). Поскольку он проходит через точку I, она является центром вписанной окружности $\Delta S_1S_2S_3$.

27. <u>*Лемма*</u> Для треугольника $X_1X_2X_3$ существует не более одной точки P, отличной от X_1, X_2, X_3, такой, что (PX_1, PX_2) и (PX_2, PX_3) имеют заданные величины.

<u>*Доказательство леммы.*</u> Очевидно, что геометрическое место точек, таких, что (PX_1, PX_2) имеет заданную величину, является окружностью без точек X_1 и X_2. Аналогично, геометрическое место точек, таких, что (PX_2, PX_3) имеет заданную величину, есть окружность без точек X_2 и X_3. Эти две окружности пересекаются в двух точках, одна из которых выколота.

<u>*Решение задачи*</u>. Пусть E – центр описанной окружности $\Delta A_0B_0C_0$ (она же $(H_1H_2H_3)$). В случае, если *E* совпадает с одной из точек S_1, S_2, S_3, нетрудно показать, что S_1, S_2, S_3 совпадают.

Рассмотрим случай несовпадения точек. Рассмотрим окружности $(H_1H_2H_3)$, $(H_1L_2L_3)$ и $(H_2L_1L_3)$. Их радикальные оси – H_1F, H_2F и L_3F.

$$(ES_1, ES_2) = (FH_1, FH_2) = (H_3H_1, H_3H_2) = (H_3H_1, H_3B) + (H_3A, H_3H_2) =$$
$$= 2(CB, CA) = 2(C_0B_0, C_0A_0) = (EB_0, EA_0).$$

Аналогично, $(EC_0, EA_0) = (ES_1, ES_3)$. Поскольку треугольники $A_0B_0C_0$ и $S_1S_2S_3$ подобны, в силу леммы, следует, что точка E совпадает с центром описанной окружности треугольника $S_1S_2S_3$.

<u>*Дополнение к задачам 25, 26, 27*</u>

Нетрудно найти и преобразование, переводящее треугольник ABC в $S_1S_2S_3$. Это композиция гомотетии с центром в точке I и коэффициентом $-\frac{1}{2} \cdot \sqrt{1 - 2\frac{r}{R}}$ и симметрии относительно биссектрисы угла OIF.

Добавка. Список результатов.

28. (*Куликов А.*) $\overline{IX} = -\frac{2r}{R-r} \cdot \overline{IO}$, где X – искомый центр гомотетии.

29. (*Ширяев Д.*) Точка Шиффлера ΔABC – это точка, изогонально сопряжённая центру окружности девяти точек $\Delta A^*B^*C^*$ с вершинами в точках пересечения биссектрис ΔABC с описанной окружностью относительно $\Delta A^*B^*C^*$.

32. Прямые, проходящие через вершины ΔABC перпендикулярно соответствующим сторонам $\Delta L_1L_2L_3$, пересекаются в точке I.

33. Прямые, проходящие через вершины $\Delta L_1L_2L_3$ перпендикулярно соответствующим сторонам ΔABC, пересекаются в центре окружности девяти точек треугольника Жергонна.

34. Прямые, проходящие через вершины $\Delta L_1L_2L_3$ перпендикулярно соответствующим сторонам треугольника Нагеля, пересекаются в точке H.

35. Прямые, проходящие через вершины треугольника Нагеля перпендикулярно соответствующим сторонам $\Delta L_1L_2L_3$, пересекаются в точке, симметричной ортоцентру треугольника Жергонна относительно точки Спикера. (*Точка Спикера* – это центр окружности, вписанной в серединный треугольник.)