САМОЗАКЛИНИВАЮЩИЕСЯ СТРУКТУРЫ. РЕШЕНИЯ.

А1. Докажем несколько более сильное утверждение: что некоторую фигуру можно выдвинуть, если разрешено двигать фигуры только вверх, перпендикулярно оси OX. Будем считать, что фигура A *накрывает* фигуру B, если фигуру B нельзя параллельно перенести вертикально вверх, не задев фигуры A. Нетрудно убедиться в том, что тогда фигура B аналогичному выдвижению вверх фигуры A не мешает, в силу выпуклости. Допустим, ни одну фигуру выдвинуть вертикально вверх нельзя. Тогда для каждой фигуры существует накрывающая. Поскольку фигур конечное число, то найдется цикл из фигур, такой, что каждая из фигур накрывается следующей. Из всех таких циклов возьмем тот, в котором наименьшее число фигур. Рассмотрим три фигуры из этого цикла: A накрывает B, B накрывает C. Если бы A накрывала C, то тогда цикл можно было бы сократить, что невозможно в силу минимальности цикла. Значит, в нашем цикле каждая фигура накрывается только следующей за ней фигурой. Рассмотрим теперь проекции фигур цикла на проведенную над всей конструкцией горизонтальную прямую. Получится система отрезков, причем каждый отрезок имеет общие точки только с соседними отрезками, отвечающими предыдущей и следующей фигуре цикла. Но тогда первый отрезок не может иметь общих точек с последним, значит первая фигура не может накрывать последнюю. Получили противоречие.

А2-А3. Проведем плоскость вне системы шаров. Теперь выберем шар, центр которого ближе всего к плоскости. Ясно, что его можно выдвинуть по направлению к этой плоскости. Данное решение непосредственно переносится на случай многомерного пространства.

А4. Для каждой точки определим *ближайшую* шоколадку как такую окружность, расстояние до которой по касательной минимально. Для некоторых точек возможно несколько ближайших окружностей. Рассмотрим разбиение всех точек торта на классы ближайших к окружностям. Если шоколадки две, тогда, легко видеть, граница раздела идет по радиальной прямой между двумя окружностями. Добавление окружности приводит к проведению еще нескольких радиальных прямых раздела, по числу уже имеющихся окружностей. Легко видеть, что множество ближайших точек к любой окружности будет пересечением нескольких полуплоскостей, образуемых радиальными прямыми. Значит, это множество будет выпуклым. Таким образом, требуемое разбиение построено.

А5. Для треугольных шоколадок утверждение неверно. Пример представлен на рисунке 1. Никакая выпуклая часть торта не может содержать центр квадрата (точка O) и ещё только одну шоколодку — отрезок, соединяющий вершину любой шоколадки (жирные точки) с точкой O, обязатльно «заденет» соседнюю шоколадку.

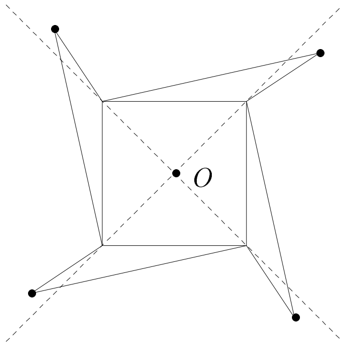
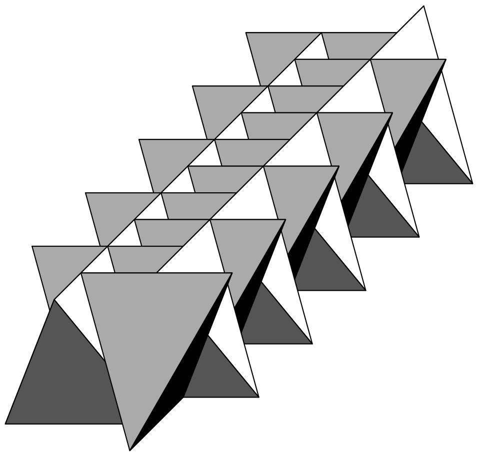


Рисунок 1.

А6. Решение задачи А4 легко обобщается на пространственный случай.

А7. Требуемое расположение показано на рисунке. Слой состоит из тетраэдров. Выдвижению тетраэдра вверх мешают левый и правый соседние тетраэдры, а выдвижению вниз — верхний и нижний. Обратите внимание на сечение слоя, в котором получается квадратное сечение. Если мысленно продвигать сечение вверх, оставляя его параллельным самому себе, квадраты решетки претерпевают изменения, одна пара противоположных сторон расходится, а другая сходится, пока квадрат не вырождается в отрезок. Собственно, это расхождение сторон и создает наклон граней, из-за которого происходит заклинивание тел.



А8. Предыдущий пример (задача А7) подходит и к данной задаче. В любом конечном множестве тетраэдров из слоя найдется самый крайний слева. Но он не может быть выдвинут вверх из-за зацепления со своим соседом слева. Аналогично, крайний сверху тетраэдр зацеплен со своим верхним соседом.

А9. Проведем гомотетию, увеличив размеры тел и расстояния между ними в 100 раз. Ясно, что каждое тело содержит свой прообраз при этом преобразовании. Теперь восстановим размеры тел, уменьшив каждое до его прообраза.

Легко видеть, что композиция этих двух преобразований увеличила расстояния между телами, сохранив их размеры.

A10. Решение аналогично предыдущему, так как звездчатые фигуры также обладают свойством содержать свой прообраз при гомотетии относительно центральной точки.

B1. Возьмем два одинаковых слоя из задачи A7. Расположим из друг над другом. Теперь удалим из верхнего слоя два соседних тетраэдра. В нем образуется дыра в форме многоугольника. Теперь расположим точно между слоям призму с верхней и нижней гранями в форме многоугольника-дыры и точно под дырой. Получится, что призму можно будет вынуть из межслойного пространства. Но мы повернем призму внутри на некоторый угол вокруг оси направленной вертикально вверх. Теперь призму параллельным переносом вынуть нельзя, а тетраэдры заклинены. Однако, призму можно повернуть и вынуть.

B2. Требуемая конструкция получается из сочетания конструкций B1 и F2. Аналогичным образом мы можем создать в выпуклом многограннике составленном из выпуклых тел дыру, а внутрь поместить призму и повернуть. Тогда призму будет нельзя вынуть при помощи параллельного переноса, но можно вынуть движением.

C1-C3. Мы рассматриваем случай, когда коэффициенты a, b, c не все равны нулю. В этом случае уравнение $ax + by + cz = d$ можно переписать в виде: $a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0) = 0$. Ясно, что тогда точка $A_0(x_0, y_0, z_0)$ удовлетворяет уравнению, а условие означает равенство нулю скалярного произведения векторов A, B, C и $(x - x_0, y - y_0, z - z_0)$, то есть перпендикулярность вектора $\vec{A_0X}$ вектору $\vec{V}$. Ясно, что если от A_0 откладывать вектора перпендикулярно $\vec{V}$ то их концы заметают плоскость. Легко видеть, что для любой плоскости α можно взять произвольную точку $A_0 \in \alpha$ и вектор V перпендикулярен α. Тогда множество точек плоскости будет совпадать с множеством концов векторов, перпендикулярных к V с началом в точке A_0, что равносильно тому, что множество точек α удовлетворяет условию $a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0) = 0$. Задачи C1-C3 решены.

C4. Поскольку любой выпуклый многогранник M лежит по одну сторону от каждой своей грани, то он содержится в пересечении указанных полупространств, $M \subset \Pi$. Покажем, что он совпадает с этим пересечением. Пусть $X \in \Pi, X \notin M, Y \in M$. Грань Γ пересекает отрезок $[x, y]$. Тогда точки X и Y лежат по разные стороны от Γ, следовательно, X и M тоже лежат по разные стороны от Γ, тогда $X \notin \Pi$. Получили противоречие.

C5. Примеры таких многоугольников изображены на рисунке 2. Аналогичное верно для любого центрально-симметричного многоугольника.

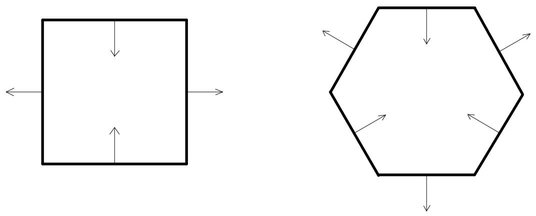


Рисунок 2.

Что касается эволюции отрезка на прямой, то его длина меняется с постоянной скоростью V и тогда либо $V > 0$ либо $-V > 0$ и в одном из этих случаев длина отрезка не уменьшается и он не может выродиться в точку.

C6. Многоугольник M может выродиться:

1) В отрезок. Ясно, что отрезок образуется в результате сближения двух параллельных сторон.

2) В точку. Пусть вырождение произошло в момент времени t. В момент $t-\delta t$ если δt достаточно мало, образуется многоугольник малого размера. Если у него есть параллельные стороны, то они сближаются в процессе эволюции и мы получаем утверждение задачи. Если же таковых нет, то утверждение вытекает из следующей леммы:

Лемма 1. Пусть M — выпуклый многоугольник, среди сторон которого нет параллельных. Тогда он содержится внутри треугольника, образованного продолжением его сторон.

В самом деле, пусть l_1, l_2, l_3 — такие прямые. Тогда им соответствует вырождающий треугольник.

Доказательство леммы. При выбрасывании стороны M продолжения оставшихся ее соседей добавляют к многограннику конечную область. При этом получается новый выпуклый многоугольник с меньшим числом сторон. Применяя индукцию, получаем доказательство леммы.

C7. Многогранник M вырождается тогда и только тогда, когда продолжения нескольких его граней образуют поверхность цилиндра над симплексом, который вырождается. Применительно к трехмерному случаю, это означает, что имеет место одна из следующих возможностей:

1) Какие-то две параллельные грани M сближаются.

2) Три грани M параллельны одной прямой и образуют вырождающуюся поверхность трехгранной призмы.

3) Четыре грани M образуют тетраэдр, вырождающийся в процессе эволюции.

Доказательство повторяет доказательство C6. Новым является рассмотрение случая, когда M вырождается в отрезок. Вместо леммы 1 используется лемма 2:

Лемма 2. Пусть M — выпуклый многогранник без параллельных граней, никакие три грани которого не параллельны одной прямой. Тогда M содержится в тетраэдре образованном продолжением граней M.

C8. Если n — четно, то сильно вырождающий набор уже указан в C4. Поскольку октаэдр и куб имеют хотя бы две пары параллельных граней, то для них сильно вырождающие наборы строятся аналогично. Для треугольника сильно вырождающего набора не существует. Для правильного n-угольника M, где $n > 5$, можно указать две тройки строк, образующие треугольники, содержащие M. Пусть одна тройка расширяется, а другая — сужается.

Для правильного пятиугольника сильно вырождающий набор скоростей указан на рисунке 3.

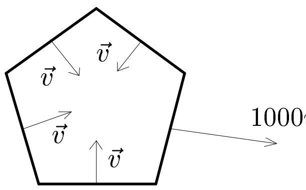


Рисунок 3.

C9. Каждой грани $\varGamma_i$ блока (многогранника входящего в слой) соответствует полупространство направлений векторов, отвечающих движениям блока от массива за этой гранью. Это полупространство направлений, разрешенных $\varGamma_i$ и оно задается условием $a_iV_1 + b_iV_2 + c_iV_3 < 0$.

Блок движется в направлении, разрешенной каждой его гранью, и вектор направления удовлетворяет системе неравенств: $a_iV_1 + b_iV_2 + c_3V_3 < 0, V_3 < 0$. Остается показать, что грани, не имеющие общего ребра с $\varGamma$ на возможные перемещения влияния не оказывают. Это следует из утверждения:

Лемма 3. Пусть K — конус с началом в точке O, $\varPi$ — полупространство, плоскость которого сечет K по ограниченной области и $\varPi \cap K$ неограничено, $\varGamma' \not\parallel \varGamma$ и $O \in \varGamma'$; тогда $K \cap \varPi' = K$.

$$\cos\varphi_i = \frac{c_i}{\sqrt{a_i^2 + b_i^2 + c_i^2}}, \quad \sin\varphi_i = \frac{\sqrt{a_i^2 + b_i^2}}{\sqrt{a_i^2 + b_i^2 + c_i^2}}$$

C10. Утверждение задачи вытекает из следующего факта, проверяемого путем непосредственных вычислений.

Пусть φ — угол между плоскостями α и β и плоскость α движется со скоростью v то скорость движения пересечения $\alpha \cap \beta$ равна $v \operatorname{ctg} \varphi$.

C11. Условие $a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$ равносильно тому, что полупространства допустимых направлений имеют нулевое пересечение. Поскольку $\varPi$ и полупространства $\varPi_i$, отвечающие граням блока параллельны полупространствам имеющим нулевое пересечение, продолжения граней блока образуют ограниченную фигуру, сечение которой горизонтальной плоскостью при ее движении вниз вырождается.

D1-D6. В данных задачах требуется построить различные кладки. Все они представлены на рисунках (см. в конце текста). Условие заклиненности следует из критерия заклиненности блока, обсуждаемого в цикле C.

E1. Ответ: Решетка из правильных 3-х и 6-и угольников.

Решение следует из двух лемм.

Лемма 4. Сечение единичного куба $0 \le x, y, z \le 1$ плоскостью $x+y+z = 3/2$ есть правильный 6-и угольник, а его сечение плоскостями $x + y + z = 1/2$ и $x + y + z = 3/2$ суть правильные треугольники.

Лемма 5. а) Пусть α-плоскость с уравнением $ax + by + cz = d$. Тогда при сдвиге начала координат на вектор (v_1, v_2, v_3) ее уравнение в новых координатах будет иметь вид $ax + by + cz = d - (av_1 + bv_2 + cv_3)$.

б) Если $a = b = c = 1$ и плоскость α пересекает единичный куб $0 \le x, y, z \le 1$ то $0 < d < 1$.

E2. Ответ: Решетка из правильных тетраэдров и октаэдров Решение вытекает из пространственного аналога леммы 2 и следующего утверждения:

Лемма 6. Сечение единичного куба $0 \le x, y, z, t \le 1$ плоскостью $x + y + z + t = 2$ есть правильный октаэдр, а его сечение плоскостями $x + y + z = 1$ и $x + y + z = 3$ суть правильные тетраэдры.

F1. Рассмотрим некоторую фигуру A, примыкающую своей стороной a к краю слоя, такую, что ее примыкающая справа к a сторона имеет наименьший угол с горизонталью (рисунок 4). Это возможно, так как видов фигур конечное число, и углов у каждой конечное число. Если A нельзя выдвинуть из слоя, то продолжения боковых сторон пересекаются выше края слоя. Сторона b разделяет фигуры A и B. Теперь рассмотрим сторону c у фигуры B, соседнюю справа к примыкающей к краю стороне B. Ее угол с горизонталью не может быть меньшим, чем угол с горизонталью другой боковой стороны b. Но тогда фигуру B можно выдвинуть из слоя. Противоречие.

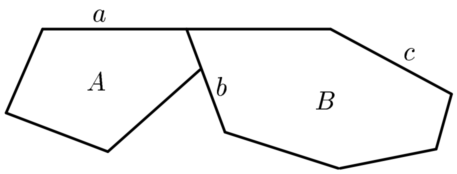


Рисунок 4.

F2. Покроем сферу достаточно мелкой сеткой из квадратов и шестиугольников и рассмотрим многогранник, образуемый вершинами узлов сетки. Теперь нанесем на ребра многогранника разметку, аналогичную эволюции квадратной сетки при построении заклиненного слоя из тетраэдров. На каждом ребре ставим стрелку, направленную внутрь или вовне соответствующего многоугольника так, чтобы каждый многоугольник вырождался при эволюции определяемой разметкой. Направив наклоны граней согласно нанесенной разметке, мы получим заклиненный внешний слой большого многогранника. Его внутренность можно заполнить произвольными выпуклыми телами.

F3. Рассмотрим сначала плоский аналог задачи. Из точки A, расположенной на достаточно далеком расстоянии от сегмента, проведем прямые, рассекающие сегмент (рисунок 5). Проведем также еще несколько поперечных линий. Назовем *нижним слоем* фигуры, касающиеся нижнего края сегмента. Ясно, что из-за того, что крайние фигуры нижнего слоя принадлежат верхнему слою и зафиксированы, нижний слой заклинен относительно движений направленных вовне от сегмента. Таким образом, при зафиксированном верхнем слое вся система заклинена. Ясно, что эта конструкция легко обобщается на пространственный случай.

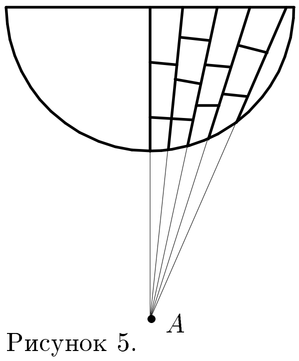


Рисунок 5.

F5. Построение слоя из звездчатых фигур для задачи F1 показано на рисунке 5. Остальные утверждения остаются в силе.

F6–F7. Построим слой с требуемым свойством. Поскольку из слоев легко составляется полупространство, мы можем обойтись одним построением для обоих задач F6 и F7.

Сначала составим из выпуклых тел куб, воспользовавшись методом, используемым при решении задачи F2. Впишем в куб многогранник M, с гранями представляющими собой прямоугольники, шестиугольники и восьмиугольники (рисунок 6). На ребра многогранника M нанесем заклинивающую разметку, аналогичную построенной в решении задачи F2. Направив наклоны граней внутрь многогранника согласно нанесенной разметке, получим заклинивающийся внешний слой. Теперь вспомним про срезанные части, дополняющие M до куба. Будем считать эти тела частями тех тел разбиения многогранника M, к которым они приложены. Ясно, что выпуклости полученных склеенных тел можно добиться за счет наклона граней, идущих внутрь многогранника M (тех, которые обеспечивают заклинивание).

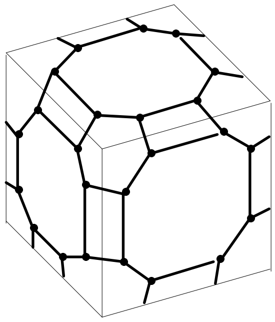
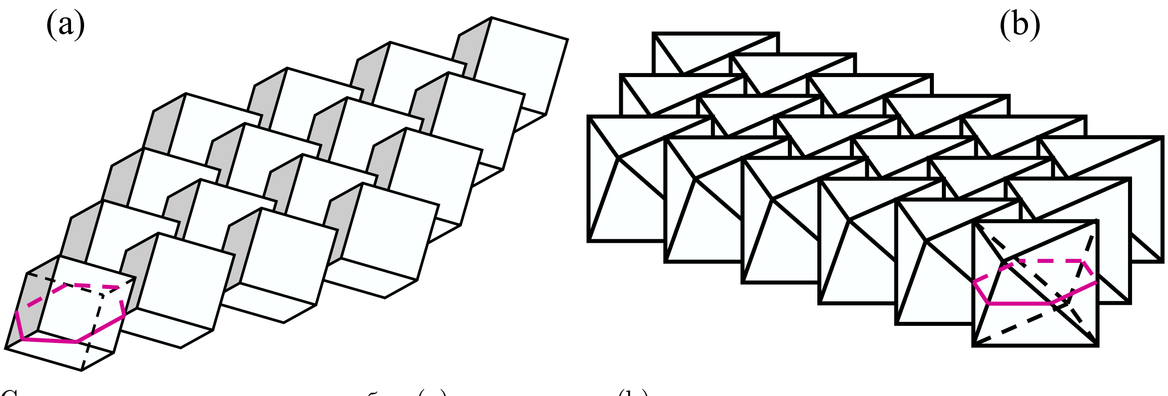


Рисунок 6.

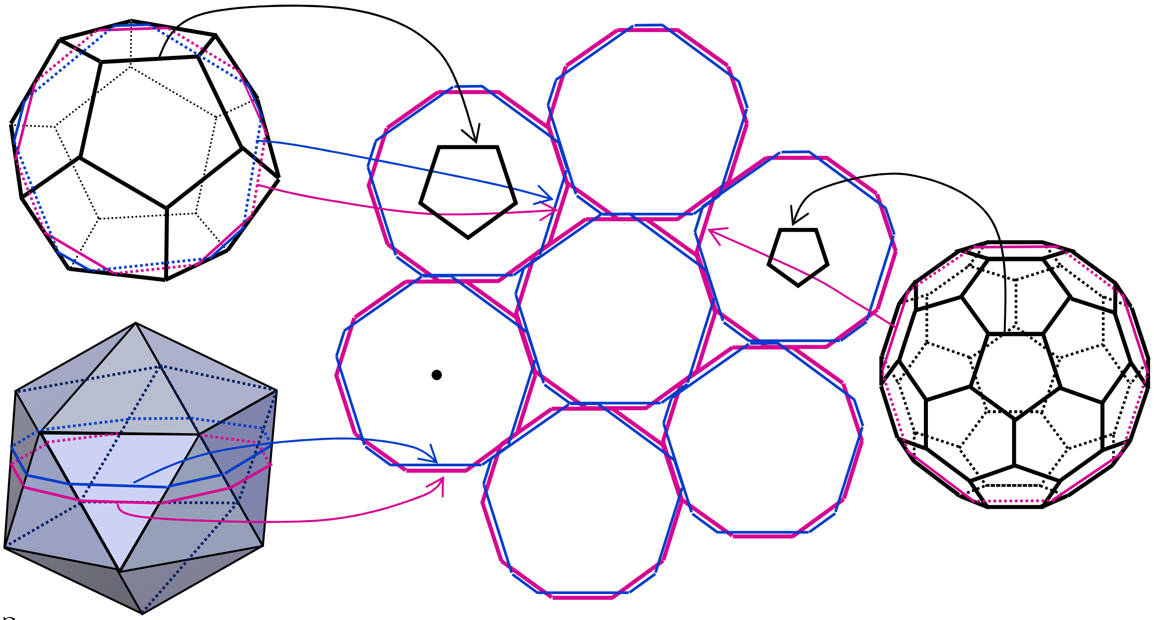
Отметим, что при удалении тела, грани которого на рисунке заштрихованы, свойство заклиненности внешнего слоя куба сохраняется, так как за счет большого количества сторон у граней можно обеспечить избыточное заклинивание. Внутренность многогранника M заполняем выпуклыми телами таким образом, чтобы даже при отсутствии тела T, через получающуюся дыру внутренние тела достать было бы нельзя.

Сложим теперь слой из составленных таким образом кубов согласно обычной квадратной сетке. Удалим из каждого куба четыре тела T в ребрах на боковых сторонах. Теперь вставим подходящие по размеру параллелепипеды в дыры так, что каждый куб окажется связанным со двумя своими соседями по диагонали, а именно левым верхним и правым нижним. Таким образом, слой построен.

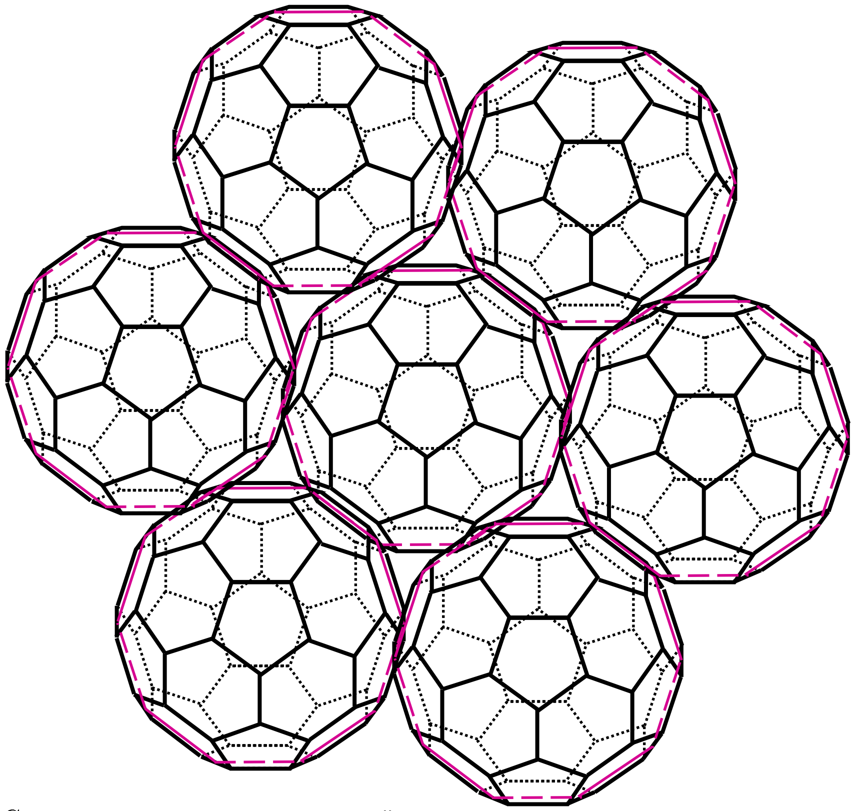
Пусть из слоя удалены все тела внутри некоторого параллелепипеда, а остальные избежали удаления. Рассмотрим рамку из кубов, ограничивающих этот параллелепипед. Ясно, что вставленные параллелепипеды скрепляют кубы достаточным образом, чтобы их нельзя было достать из слоя как по одному, так и по несколько сразу.



Самозаклиненные системы кубов (a) и октаэдров (b).



Заклинивание на основе правильного десятиугольника.



Самозаклиненная система усечённых икосаэдров.

Примечание: рисунки самозаклинивающихся тел выполнены М. Пановым, А. Дыскиным, Е. Пастернак.