САМОЗАКЛИНИВАЮЩИЕСЯ СТРУКТУРЫ.

В данном цикле задач обсуждаются плоские и пространственные конструкции из выпуклых тел, обладающие интересными свойствами и имеющие применение на практике.

Серия А. Подготовительные задачи.

А1. На столе лежит несколько выпуклых фигур. Доказать, что одну из них можно выдвинуть, не трогая остальных. (Здесь и далее будем считать, что фигуру/тело можно *выдвинуть* из системы тел, если можно параллельно перенести данную фигуру/тело на любое расстояние от системы, чтобы по ходу переноса не были задеты другие фигуры/тела системы.)

А2. В пространстве расположено несколько шаров. Доказать, что один из них можно выдвинуть.

А3. Аналогичный вопрос для n-мерного пространства. (В n-мерном пространстве расположены шары. Докажите, что один из них можно выдвинуть.)

А4. На круглом торте лежит несколько неперекрывающихся круглых шоколадок. Доказать, что торт можно разрезать на выпуклые части так, чтобы в каждой части было по одной шоколадке.

А5. Верно ли аналогичное утверждение для треугольных шоколадок?

А6. В выпуклой булке запечено несколько изюминок в форме шаров. Верно ли, что булку можно разрезать на выпуклые части так, чтобы в каждой части было по одной изюминке?

А7. Можно ли так расположить одинаковые выпуклые тела в слое между двумя параллельными плоскостями, чтобы ни одно из них нельзя было выдвинуть?

А8. Можно ли так расположить одинаковые выпуклые тела в слое между двумя параллельными плоскостями, чтобы никакой конечный набор из них нельзя было выдвинуть (каждое тело из набора выдвигается своим переносом)?

А9. Доказать, что любую систему из конечного числа выпуклых тел можно раздвинуть (то есть выдвинуть каждое тело так, чтобы попарные расстояния между телами стали больше любого наперед заданного числа), если разрешить всем телам двигаться одновременно.

А10. Тот же вопрос для звездчатых тел. Тело называется *звездчатым*, если вся его поверхность видна из некоторой точки внутри тела.

Серия В. Переносы и повороты.

Будем считать, что система тел *трансляционно заклинена*, если ни одно из них нельзя выдвинуть. Будем считать, что система *поворотно заклинена*, если ни одно тело нельзя выдвинуть, даже если разрешается использовать и повороты, и переносы (в любом порядке).

В1. Существует ли система выпуклых тел, трансляционно заклиненных, но не поворотно заклиненных?

В2. Тот же вопрос, если выпуклые тела составляют выпуклое тело.

Серия С. Блоки.

В основе этой серии лежит критерий заклиненности блока. Чтобы его сформулировать, нужны некоторые элементарные факты геометрии, которые предлагаются в виде нескольких предварительных задач.

C1. Докажите, что любая прямая на плоскости Oxy состоит из таких точек (x, y), что $ax + by = c$ для некоторых чисел a, b, c.

C2. Докажите, что любая плоскость в пространстве состоит из таких точек (x, y, z), что $ax + by + cz = d$ для некоторых чисел a, b, c, d.

C3. Докажите, что вектор (a, b) перпендикулярен прямой $ax + by = c$, а вектор (a, b, c) перпендикулярен плоскости $ax + by + cz = d$.

C4. Докажите, что любой выпуклый многогранник есть пересечение полупространств, границы которых — плоскости, содержащие грани многогранника, а любой выпуклый многоугольник есть пересечение полуплоскостей, границы которых — прямые, содержащие стороны многоугольника.

Пусть каждая из прямых, составляющих многоугольник на плоскости, двигается в перпендикулярном себе направлении, оставаясь параллельной самой себе. Вследствие этого движения, многоугольник некоторым образом эволюционирует. У него может измениться количество сторон, а в некоторый момент он вообще может стать точкой или отрезком (в этот момент эволюция заканчивается). Пусть скорость i-ой прямой есть V_i (при $V_i > 0$ прямая движется «наружу» многоугольника, а при $V_i < 0$ — «внутрь»).

C5. Приведите пример, когда эволюция со скоростями V_i переводит многоугольник в точку или отрезок (то есть многоугольник вырождается) и при этом эволюция со скоростями $-V_i$ также приводит многоугольник к вырождению. Возможно ли такое для эволюции отрезка на прямой?

C6. Докажите, что многоугольник M вырождается во время некоторой эволюции тогда и только тогда, когда имеет место одна из следующих ситуаций:

1) Некоторый треугольник, стороны которого суть продолжения сторон M, во время этой эволюции вырождается.

2) Во время эволюции расстояние между некоторой парой параллельных прямых, являющихся продолжениями сторон M, уменьшается.

C7. Сформулируйте и докажите утверждения, аналогичные **C6**, для многогранников в пространстве размерности 3 и выше.

Пусть дан некоторый многоугольник/многогранник. Будем называть набор скоростей V_i *вырождающим*, если многоугольник/многогранник при данном наборе скоростей вырождается (в точку или отрезок). Назовем набор *сильно вырождающим*, если, к тому же, противоположный набор скоростей $-V_i$ тоже вырождающий.

C8. Укажите сильно вырождающие наборы скоростей для:

а) квадрата; б) пятиугольника; в) правильного n-угольника; г) куба; д) октаэдра.

Пусть Π есть полупространство точек (x, y, z), таких что $z \geq 0$ и все это полупространство заполнено выпуклыми многогранниками. Пусть M — выпуклый многогранник, который лежит в Π, и одна из граней Γ которого лежит в плоскости $z = 0$. Нас интересуют возможные направления сдвига многогранника.

Пусть $a_i x + b_i y + c_i z = d_i$ — уравнение плоскости α_i i-ой грани M, имеющей общее ребро e_i с гранью Γ (точки M удовлетворяют условиям $a_i x + b_i y + c_i z \leq d_i$). Пусть φ_i — угол между Γ и α_i.

C9. Докажите, что множество векторов (V_1, V_2, V_3) допустимого перемещения M задается системой неравенств $V_3 \leq 0$, $a_i V_1 + b_i V_2 + c_i V_3 \leq 0$. (В частности, если указанная система неравенств не имеет решений, то говорят, что многогранник M заклинен.) Вычислите $\cos\varphi_i, \sin\varphi_i$ через a_i, b_i, c_i.

C10. Рассмотрим многогранник M', все плоскости граней которого совпадают с плоскостями граней M, кроме плоскости грани Γ. Плоскость новой грани Γ' получается путем параллельного переноса плоскости грани Γ вниз (в отрицательном направлении оси Oz) на расстояние Δt. Докажите, что грань Γ' равна многоугольнику, который получается из Γ путем сдвига сторон (i-ая сторона сдвигается на величину $\Delta t \operatorname{ctg}\varphi_i$).

C11. Рассмотрим многоугольник Γ, стороны которого движутся со скоростями $V_i = \operatorname{ctg}\varphi_i$ (направления скоростей определяются в соответствии с предыдущей задачей). Докажите, что M заклинен тогда и только тогда, когда в процессе эволюции Γ вырождается.

Серия D. Правильные многогранники.

Можно ли так расположить в слое между двумя параллельными плоскостями следующие многогранники, чтобы:

задача a) ни одно тело не выдвигалось;

задача b) никакой конечный набор тел нельзя было выдвинуть (каждое тело из набора выдвигается своим переносом)?

Решить эти задачи для следующих многогранников:

D1. Тетраэдров.

D2. Октаэдров.

D3. Кубов.

D4. Икосаэдров.

D5. Усеченных икосаэдров (футбольных мячей).

D6. Додекаэдров.

D7. Можно ли в слое между параллельными трехмерными гиперплоскостями так расположить четырехмерные кубы, чтобы ни один не выдвигался?

Серия E. Решетки.

E1. Дана обычная кубическая решетка с проведенной через центр одного из кубов плоскостью, перпендикулярной его главной диагонали. Что получается в сечении решетки плоскостью?

E2. Тот же вопрос для решетки из четырехмерных кубов.

Серия F. Основные конструкции.

F1. Можно ли слой между двумя параллельными прямыми на плоскости заполнить выпуклыми фигурами из множества, в котором лишь конечное число попарно различных фигур, так, чтобы ни одна не выдвигалась?

F2. Можно ли из конечного числа выпуклых трехмерных тел собрать выпуклое тело так, чтобы ни одно из составляющих тел не выдвигалось?

F3. Рассмотрим сегмент шара, содержащийся в нижнем полушарии. Пусть он разбит на выпуклые многогранники. Назовем *верхним слоем* те многогранники, которые своими гранями составляют верхнее круглое сечение шара — границу сегмента. Можно ли составить такой сегмент из конечного числа выпуклых трехмерных тел, диаметр которых меньше $1/1000$ от высоты сегмента, так, чтобы верхний слой тел, будучи закрепленным, не давал выпасть остальным?

F4. Та же задача для сегмента, содержащего нижнее полушарие.

F5. Аналогичные вопросы для системы звездчатых фигур на плоскости.

Далее обсуждаются вопросы устойчивой кладки.

F6. Можно ли заполнить полупространство семейством выпуклых тел из множества, в котором лишь конечное число попарно различных тел, так, чтобы:

1) ни одно не выдвигалось;

2) если удалить конечное число тел, то из оставшейся системы можно было выдвинуть лишь конечное число частей?

F7. Аналогичная **F6** задача для слоя между двумя параллельными плоскостями.

Пункты, добавленные после промежуточного финиша:

Самозаклинивающеся структуры. Бесконечно тонкий слой.

В этой серии изучается заклинивание в “бесконечно тонком слое”. Рассматривается слой L между двумя параллельными плоскостями α_1 и α_2, такой что для любого его подслоя все свойства заклиненности сохраняются. В этом случае мы говорим о *дифференциальном слое.*

Подчеркиваем, что рассматривается только случай конечного числа типов блоков.

Естественным образом определяется *заклиненность в одну сторону* (например, “вниз”) а также *заклиненность в обе стороны* как невозможность выдвинуть любую часть в данную сторону от слоя (соответственно, в любую из сторон).

G1. Существует ли самозаклинивающийся в обе стороны дифференциальный слой?

G2. Существует ли самозаклинивающийся в одну сторону дифференциальный слой, заполненый полностью?

G3. Существует ли самозаклинивающийся в обе стороны дифференциальный слой, заполненый полностью?

G4. Существует ли дифференциальный слой, устойчивый к образованию дырок любого конечного размера? (Это означает, что при удалении любого числа блоков из оставшейся системы можно по одному выдвинуть лишь конечное число тел.)

G5. Сформулируйте и докажите аналогичные утверждения для пространств размерности > 3.