*

BEISPIELE VON TRANSZENDENT ZAHLEN

ist vorgeschlagt bei Arkadij Skopenkov, ist vorgestellt bei ihn und Ilja Nikokoschev (Z. 201-2)

Einleitende Aufgaben. Ist ein Aufgabe ein Satz, so ist es nötig, dieses Satz zu beweisen.

Aufgabe 1. Die folgende Zahlen sind irrational:

a) $\lambda = \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n!} = 0,1100010000000000..._2$; b) $\mu = \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-2^n} = 0,11010001000000010..._2$; c) $\nu = \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-[1,5^n]}$.

d) $e(\{\epsilon_n\}_{n=0}^{\infty}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\epsilon_n}{n!}$ für jeden Folge $\{\epsilon_n\}_{n=0}^{\infty}$ von Nullen und Einheiten. Hinweis: verwenden Sie die Formel

$$e(\{\epsilon_n\}_{n=0}^{\infty}) = \frac{p}{q} = \sum_{n=0}^{q-1} \frac{\epsilon_n}{n!} + \frac{\epsilon_q}{q!} + \sum_{n=q+1}^{\infty} \frac{\epsilon_n}{n!} \qquad (*)$$

Ein Zahl x ist ein *quadratisch Irrationalität*, wenn es ist ein Wurzel von quadratischen Gleichung $a\lambda^2 + b\lambda + c = 0$ mit ganze Zahlen $a \neq 0$, b und c.

Aufgabe 2. a) $e^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!}$ (Hinweis: öffnen Sie Klammern im Produkt $(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}) \cdot (\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!})$).

e) Die Zahl $e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$ ist keine quadratisch Irrationalität.

Aufgabe 3. Nehmen wir dass f ist ein quadratisch Polynom mit ganzzahlige Koeffizienten, $f(\lambda) = 0$ und $\lambda_s = \sum_{n=0}^{s} 2^{-n!}$.

a) $f(\lambda) \neq 0$.
b) $|f(\lambda_s)| \geq C \cdot 2^{-2s!}$, wo die Konstant C ist unabhängig von s.
c) $|f(\lambda) - f(\lambda_s)| < C_1(\lambda - \lambda_s)$, wo die Konstant C_1 ist unabhängig von s.
d) Die Zahl λ ist keine quadratisch Irrationalität.

Ein Zahl x ist *transzendent*, wenn es ist kein Wurzel von jeden Gleichung $a_t\lambda^t + a_{t-1}\lambda^{t-1} + \dots + a_1\lambda + a_0 = 0$ mit ganzzahlige Koeffizienten $a_t \neq 0, a_{t-1}, \dots, a_0$.

Aufgabe 4. Nehmen wir dass f ist ein Polynom von Grad t mit ganzzahlige Koefizienten.

a) Wenn $f(\lambda_s) = f(\lambda) = 0$, so ist $g(\lambda) = 0$ für irgendwelche Polynom g mit ganzzahlige Koeffizienten, welcher Grad ist weniger als t.
b) Wenn $f(\lambda_s) \neq 0$, so ist $|f(\lambda_s)| \geq C \cdot 2^{-ts!}$, wo die Konstant C ist unabhängig von s.
c) $|f(\lambda) - f(\lambda_s)| < C_1(\lambda - \lambda_s)$, wo die Konstant C_1 ist unabhängig von s.
d) Die Zahl λ ist transzendent.

Für manche von die folgenden Auggaben binary expansion ist nötig. Lesende die sind nicht zum binary expansion gewohnt, können es mit decimal expansion, die Zahl μ mit $\mu' = \sum_{n=0}^{\infty} 10^{-2^n} = 0,11010001000000010..._{10}$ und 2^y mit 10^y ersatzen.

Aufgabe 5. Sei b, c und s ganze Zahlen so dass $b \geq 0$ und s ist gross genug.

a) In die binary expansion von die Zahl μ^2 (entsprechend $b\mu + c$) im Platz Nummer $3 \cdot 2^s$ rechts von Dezimal Punkt es gibt Einheit (entsprechend Null).
b) Die Zahl μ ist kein Wurzel von quadratich Gleichung $\mu^2 - b\mu + c = 0$.

Sei U_t ein Menge von positiv ganze Zahlen, die haben am meistens t Einheiten in ihrer binary expansion.

Aufgabe 6. a) $\mu^2 = \sum_{n \in U_2} c_n 2^{-n}$ für irgendwelche ganze Zahlen $c_n \geq 1$.

b) Wenn beide a und b ganze Zahlen sind, so $a\mu^2 + b\mu = \sum_{n \in U_2} d_n 2^{-n}$ für irgendwelche ganze Zahlen d_n.

c) $c_n \in \{1, 2\}$, $d_n \leq 2|a| + |b|$ und (für $a > 0$) $d_n \geq 1$ für $n \in U_2 - U_1$.

Für ein Zahl $m \in U_t$ seien $m_< = m_<(m,t)$ entsprechend $m_> = m_>(m,t)$ die Zahlen von U_t, die sind näheste zum m von unten entsprechend von oben.

Aufgabe 7. a) Dirk hat in rote Farbe alle solche positiv ganze Zahlen gefarbt, welche binary expansion hat am meistens zwei Einheiten. Dann gibt es drei konsequent roten Zahlen mit die Zwischenräumen grosser als 2^{49}.

b) Für jeder A es gibt $m = m(A) \in U_2 - U_1$ so dass $m_< + A < m < m_> - A$.
c) Die Zahl μ ist keine quadratisch Irrationalität (hinweis: umgestalten Sie die Gleichung von Aufgabe 6.b ahnlich zu die Formel (*)).
d) Die Zahl μ ist transzendent.

Lesende können auch Aufgaben 7.cd lösen ohne Aufgaben 6 and 7.ab zu verwenden; denn es wird nicht nötig, die letzte zu lösen.

Typeset by $\mathcal{AMS}$-TEX