ПРИМЕРЫ ТРАНСЦЕНДЕНТНЫХ ЧИСЕЛ

задача предложена Аркадием Скопенковым, представляется им и Ильей Никокошевым (к. 201-2)

Решения вводных задач.

Решение задачи 1. Приведем решение пункта (a) (решения пунктов bcd аналогичны). Пусть $\lambda = p/q$ и $q = q_1 \cdot 2^k$, где $q_1 > 0$ нечетно. Тогда

$$\frac{2^k}{2^{s!}} \le |q\lambda_s - p| = |(q\lambda_s - p) - (q\lambda - p)| = q|\lambda - \lambda_s| < \frac{2q}{2^{(s+1)!}},$$

что невозможно при достаточно больших s.

Указание к другому решению: умножьте равенство $\lambda = p/q$ на $q \cdot 2^{q!}$, а равенство $\mu = p/q$ на $q \cdot 2^{2^q}$.

Указания к задаче 2. Указание к (a) уже дано. Указание к (b): $ae^2 + be + c = 0$ влечет $ae + be^{-1} = -c$.

Указания к задаче 3. Если $f(\lambda_s) = 0$, то из теоремы Безу вытекает, что λ рационально. Поэтому $f(\lambda_s) \ne 0$. Число $f(\lambda_s)$ представляется в виде дроби со знаменателем $2^{2s!}$. Значит, $f(\lambda_s) \ge 2^{-2s!}$. Для доказательства оценки $|f(\lambda_s)| < C_1(\lambda - \lambda_s)$ рассмотрите $|(r\lambda_s^2 + q\lambda_s + p) - (r\lambda^2 + q\lambda + p)|$. При больших s оценки пунктов (b) и (c) противоречат друг другу, что влечет пункт (d). Другое решение можно получить, умножив равенство $r\lambda^2 + q\lambda + p = 0$ на большую степень 2.

Решение задачи 4 аналогично решению задачи 3.

Решение задачи 5 поясняет идею элементарного доказательства трансцендентности числа μ Малера. Поясним идею решения на следующем примере. Докажем, что число $\nu = \sum\limits_{n=0}^{\infty} 10^{-2^n} = 0,11010001000000010\ldots_{10}$ не является корнем квадратного уравнения $x^2 - bx - c = 0$ с целыми коэффициентами $b \ge 0$ и c. Пусть, напротив $\nu^2 = b\nu + c$ для некоторых целых чисел $b \ge 0$ и c. В десятичной записи числа $b\nu + c$ достаточно далеко справа после запятой ненулевые цифры располагаются 'сгустками' около позиций с номерами вида 2^n. Каждый сгусток изображает число b, например для $b = 17$: $17\nu + c = \ldots,87170017000000170\ldots017\ldots$. Между такими 'сгустками' ненулевых цифр расположены нули. С другой стороны,

$$\nu^2 = \sum_{k,l=0}^{\infty} 10^{-2^k - 2^l} = 0,0121220\ldots122020002000000012\ldots_{10}.$$

Поэтому в записи числа ν^2 достаточно далеко после запятой существуют ненулевые цифры, располагающиеся около позиций с номерами вида $2^k + 2^l$, где $k \ne l$. А в числе $b\nu + c$ на этих позициях стоят нули. Полученное противоречие показывает, что $\nu^2 \ne b\nu + c$.

В доказательстве задачи 5 применяется та же самая идея.

Пусть, напротив, $\mu^2 = b\mu + c$ для некоторых целых $b \ge 0$ и c. В двоичной записи числа $b\mu + c$ достаточно далеко после запятой единицы располагаются около позиций с номерами вида 2^n, и между такими 'сгустками' ненулевых цифр (изображающими число b) расположены нули. А в двоичной записи числа μ^2 достаточно далеко после запятой единицы располагаются около позиций с номерами вида $2^k + 2^l$, т.е. 'чаще', чем в числе $b\mu + c$. Поэтому $\mu^2 \ne b\mu + c$.

Указания к задачам 6 и 7 содержатся в условиях задач 11 и 12.

Замечание. Аналогично можно разобрать случай $b < 0$. В случае наличия отрицательных коэффициэнтов можно использовать 'двоичную систему счисления', в которой в качестве цифр допускаются минус единицы (и в которой поэтому представление чисел неоднозначно). Вместо этого мы домножаем обе части этого равенства на достаточно большую степень двойки специального вида и рассматриваем их дробные части. Далее мы докажем, что в левой части получится число, близкое к одному из концов отрезка $[0,1)$, а в правой части — число, далекое от концов.

Решения остальных задач.

Решение задачи 8.a. Не является ни редкой, ни разреженной (любое натуральное число большим количеством способов представимо в виде суммы k натуральных чисел).

Решение задач 8.b и 8.c.

Здесь мы наметим доказательство того, что последовательность $\{3^n\}$ редкая и разреженная. Это рассуждение дословно проходит для последовательностей c^n (c натуральное ≥ 2) и $n!$. Полностью доказательство проведено для случая последовательности 2^n в решениях задач 11.cd и 12.a).

Чтобы доказать, что количество способов представить данное натуральное число в виде суммы k степеней тройки не превосходит некоторой константы, заметим, что любое такое разложение получается из стандартного (запись в троичной системе счисления) дальнейшим разложением некоторых слагаемых ($3^n = 3^{n-1} + 3^{n-1} + 3^{n-1}$). Таким образом, утверждение достаточно доказать для чисел вида 3^n. Осталось заметить, что в разложении числа 3^n могут встречаться только слагаемые $3^{n-k}, \ldots, 3^n$.

Последовательность 3^n разреженная. При фиксированном k предъявим далеко отстоящие друг от друга красные числа. Рассмотрим число $3^{n+k}+\dots+3^{n+1}$. Легко доказать, что ближайшие красные числа отстоят от него на расстояние не меньше 3^n.

Решение задачи 11.c Искомое число способов равно числу тех r, для которых $n-2^r\in U_q$. Пусть $n=2^{w_k}+2^{w_{k-1}}+..+2^{w_1}$, где $w_k>w_{k-1}>\dots>w_1\ge 0$ и $k\le q$. Можно считать, что $r\le w_k$ (иначе $n-2^r<0$). Достаточно доказать, что для любого $i=1,2,\dots,k-1$, количество искомых r на промежутке $[w_i+1,w_{i+1}]$ не превосходит q. Докажем это утверждение для $i=k-1$ (для остальных i доказательство аналогично).

Если $r=w_k$ то $n-2^r=2^{w_{k-1}}+\dots+2^{w_1}\in U_{k-1}$.

Если $r=w_k-1>w_{k-1}$, то $n-2^r=2^{w_k-1}+2^{w_{k-1}}+\dots+2^{w_1}$ имеет k единиц в двоичной записи.

Если $r=w_k-2>w_{k-1}$, то $n-2^r=2^{w_k-1}+2^{w_k-2}+2^{w_{k-1}}+\dots+2^{w_1}$ имеет $k+1$ единицу в двоичной записи.

...

Если $r=w_k-(q-k+1)>w_{k-1}$, то $n-2^r=2^{w_k-1}+\dots+2^{w_k-(t-k)}+2^{w_{k-1}}+\dots+2^{w_1}$ имеет q единиц в двоичной записи.

Если $w_k-(q-k+1)>r>w_{k-1}$, то $n-2^r$ имеет более q единиц в двоичной записи.

Итак, на промежутке $[w_{k-1},w_k-1]$ подходящих r не более $q-k\le q$.

Значит если

$$w_k-((t-1)-k+1)>r>w_{k-1},$$

то $n-2^r$ имеет более $t-1$ единицы в двоичной записи. Итак на промежутке $[w_{k-1}+1,w_k]$ подходящих r не более $(t+1)-k\le t$. Всего таких промежутков $k-1\le t$. Значит всего способов не более t^2.

Решение задачи 11.d Докажем оценку для $c_n(t)$ по индукции по t. Для $t=1$ утверждение верно (нужно взять $c_n=1$). Пусть для $t=q$ утверждение верно. Тогда $\mu^q=\sum\limits_{n\in U_q}c_n2^{-n}$, где $c_n\in\mathbb{Z}$, $|c_n|<D$ для $n\in U_q$ и $c_n\ge 1$ для $n\in U_q-U_{q-1}$. Поскольку при сложении 2^r $(r\in\mathbb{Z}, r\ge 0)$ и $n\in U_q$ получается число $(2^r+n)\in U_{q+1}$, то

$$\mu^{q+1}=\mu\mu^q=(\sum_{r=0}^{\infty}2^{-2^r})(\sum_{n\in U_q}c_n2^{-n})=\sum_{y\in U_{q+1}}c'_y2^{-y},$$

$$\text{где}\quad c'_y=\sum\{c_n\mid n\in U_q,\ y-n=2^r \text{ для некоторого } r\in\mathbb{Z},\ r\ge 0\}.$$

Поэтому $c'(y)\in\mathbb{Z}$. По задаче 7.a всякое c'_y есть сумма не более чем $(q+1)^2$ чисел c_n. Поскольку $|c_n|<D$, то $|c'_y|<D'=D(q+1)^2$. Любое число $y\in U_{q+1}-U_q$ нельзя представить в виде $y=2^r+n$, где $n\in U_{q-1}$, $r\in\mathbb{Z}$, $r\ge 0$, но можно (не менее чем одним способом) представить в виде $y=2^r+n$, где $n\in U_q-U_{q-1}$, $r\in\mathbb{Z}, r\ge 0$. Следовательно, $c'_y\ge 1$ для каждого $y\in U_{q+1}-U_q$. Индуктивный переход обоснован.

Обозначим через c_s^{q+1} коэффициент перед $2^s=2^{2^k+n}$, где $k\ge 0, k\in Z, n\in U_q$. Тогда получим:

$$c_s^{q+1}\le c_n^t(q+1)^2\le (q!)^2(q+1)^2\le ((q+1)!)^2.$$

Пусть $a=\max\{a_1,a_2,\dots,a_t\}$. Тогда для любого $n\in U_k-U_{k-1}$

$$d_n=a_kc_n^k+a_{k+1}c_n^{k+1}+\dots+a_tc_n^t<a(t!)^2(t-k+1).$$

Следовательно числа d_n ограничены некоторым положительным числом D (зависящим от t и f, но не от n).

Решение задачи 12.a. Положим $m=2^{2p+3}(2^t-1)+2^{p+1}$ для достаточно большого p. Очевидно, что $m\in U_t-U_{t-1}$. Достаточно доказать, что $|m-n|>2^p$ для любого $n\in U_t-\{m\}$. Пусть $m=11\dots10\dots010\dots0$ — запись числа m в двоичной системе счисления (сначала идут $t-1$ единиц, затем $p+1$ нуль, затем одна единица и снова $p+1$ нуль). Если в U_t есть число n, отличающееся от m менее чем на 2^p, то первые $t-1$ разрядов n и m совпадают. Следовательно, n имеет $t-1$ или t единиц в двоичной записи. В первом случае $n=(2^t-1)2^{2p+3}$ и $m-n>2^p$. Во втором случае t-я единица числа n стоит в одном из разрядов с номерами $t,t+1,\dots,t+p$ или $t+p+2,\dots,t+2p+2$. Это означает, $n-m>2^p$ или $m-n>2^p$. Предположив противное, мы пришли к противоречию.

Решения задач 8.d, 8.f нам неизвестны.

Ответ к задаче 8.e. Используя тот факт, что каждое натуральное число представимо в виде суммы не более чем четырех квадратов, легко показать, что последовательность $\{n^2\}$ не является ни редкой, ни разреженной.

Решение задачи 9 аналогично задаче 12.b.

Задача 10. Про *теорему Лиувилля* можно прочитать, например, в [KR01].

Решение задач 5 и 12.b (доказательство трансцендентности числа Малера) с использованием задач 11 и 12.a. Предположим, напротив, что $f(\mu)=0$ для некоторого многочлена f степени t с целыми коэффициентами и положительным старшим членом. Тогда по задаче 11.b для любого $m\in U_t$

$$0=f(\mu)=\sum_{n\in U_t,\ n<m}d_n2^{-n}+d_m2^{-m}+R,$$

где $R = \sum\limits_{n\in U_t,\ n>m} c_n 2^{-n}$. Умножим обе части этого равенства на $2^s = 2^{m_<}$ и возьмем дробную часть. По определению числа s, для $n \in U_t$, $n < m$ имеем $n \le s$, значит $2^s c_n 2^{-n} \in \mathbb{Z}$. Поэтому первая сумма обратится в ноль, и останется $0 = \{2^s(d_m 2^{-m} + R)\}$. Для получения противоречия достаточно выбрать m, чтобы

$$2^s \cdot |R| < 2^{s-m} \le |d_m| \cdot 2^{s-m} < 1/2.$$

Поскольку $|d_m| \ge 1$, то $2^{s-m} \le |d_m| \cdot 2^{s-m}$ По задачам 11.d и 12.a $|d_m| \cdot 2^{s-m} < D \cdot 2^{-A} < 1/2$ для достаточно большого A. По определению числа $S = m_>$, сумму R можно лишь увеличить, заменив каждое d_n на D, а область суммирования на $n \ge S$. Значит,

$$|R| < D \sum_{n\in U_t,\ n>m} 2^{-n} < D \sum_{n=S}^{\infty} 2^{-n} = D \cdot 2^{1-S}.$$

По задаче 12.a $|R| < D \cdot 2^{1-S} < D \cdot 2^{1-A-m} < 2^{-m}$ для достаточно большого A. Полученное противоречие доказывает трансцендентность числа Малера.

Решение задачи 11.a. Для $t = 1$: $c_n = 1$. Пусть для $t = q$ имеем $\mu^q = \sum\limits_{n\in U_q} c_n^q 2^{-n}$. Докажем, что это верно и при $t = q + 1$:

$$\mu^{q+1} = \mu\mu^q = (\sum_{k=0}^{\infty} 2^{-2^k})(\sum_{n\in U_q} c_n^q 2^{-n}) = \sum_{n\in U_q, 0\le k<\infty} c_n^q 2^{-(2^k+n)}.$$

Так как $n \in U_q$,то $(2^k + n) \in U_{q+1}$.

Решение задачи 11.b По задаче 11.a

$$f(\mu) = a_0 + a_1 \sum_{n\in U_1} c_n^1 2^{-n} + a_2 \sum_{n\in U_2} c_n^2 2^{-n} + \cdots + a_t \sum_{n\in U_t} c_n^t 2^{-n}$$

Просуммируем все слагаемые, для которых $n \in U_1$:

$$\sum_{n\in U_1} 2^{-n}(a_1 c_n^1 + a_2 c_n^2 + \cdots + a_t c_n^t).$$

Просуммируем все слагаемые, для которых $n \in U_2 - U_1$:

$$\sum_{n\in U_2-U_1} 2^{-n}(a_2 c_n^2 + a_3 c_n^3 + \cdots + a_t c_n^t).$$

Просуммируем все слагаемые, для которых $n \in U_t - U_{t-1}$

$$\sum_{n\in U_t-U_{t-1}} 2^{-n} a_t c_n^t.$$

Тогда

$$f(\mu) = f(0) + \sum_{n\in U_t} d_n 2^{-n}.$$

Здесь $d_n^1 = a_1 c_n^1 + a_2 c_n^2 + \cdots + a_t c_n^t$, $d_n^2 = a_2 c_n^2 + a_3 c_n^3 + \cdots + a_t c_t^t$, $\ldots$.

Решения задач 13.a, 13.b, 14.b, 14.c аналогичны 12.b.

По поводу *задач 14.a, 14.d, 14.e* смотрите условия и решения задач 8 и 9.