# ПРИМЕРЫ ТРАНСЦЕНДЕНТНЫХ ЧИСЕЛ

**задача предложена Аркадием Скопенковым, представляется им и Ильей Никокошевым (к. 201-2)**

Wenn Sie unterrichten und davon ausgehen, dass sich
parallele Linien im Unendlichen berühren, ergibt sich doch,
das müssen Sie zugeben, so etwas wie Transzendenz.
*G. Grass, Katz und Maus.*

**Презентация.** Число $x$ называется *трансцендентным*, если оно не является корнем никакого уравнения $a_t\lambda^t + a_{t-1}\lambda^{t-1} + \dots + a_1\lambda + a_0 = 0$ с целыми коэфициентами $a_t \neq 0, a_{t-1}, \dots, a_0$. Например, любое рациональное число не является трансцендентным (но некоторые иррациональные числа не являются трансцендентными, например число $2^{1/3}$). Таким образом, свойство трансцендентности является усилением свойства иррациональности.

Объясним, для чего нужно доказывать трансцендентность чисел. Все числа, допускающие построение циркулем и линейкой, принадлежат к числу алгебраических [KR01]. Поэтому из трансцендентности числа вытекает невозможность построения его с помощью циркуля и линейки.

Существование трансцендентных чисел было доказано Георгом Кантором в 1875 г. Явный пример трансцендентного числа

$$\lambda = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n!} = 0,1100010000000000..._2$$

был приведен Жозефом Лиувиллем в 1835 г. [KuRo01]. В 1929 г. Малером [Mah29] была доказана трансцендентность числа

$$\mu = \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-2^n} = 0,11010001000000010..._2$$

которая не вытекает из теоремы Лиувилля (а также из теорем Туэ и Зигеля; см. также [KR01, Gal80]).

Цель настоящего цикла задач — познакомить читателя с новой идеей доказательства трансцендентности. Естественно, эта новая идея является развитием старых, поэтому цикл задач начинается с классического результата о трансцендентности числа Лиувилля. Указанная новая идея демонстрируется на примере *нового* доказательства трансцендентности числа Малера (оно основано на рассмотрении двоичной записи). Далее предлагается доказать трансцендентность других чисел, используя и развивая эту идею. Некоторые из предлагаемых задач не решены, поэтому их решение представляет научный интерес.

Заметим, что в работе [Mah29] получен более общий результат, доказательство которого не элементарно и длинно; при этом не приведено краткой идеи доказательства [ср. Gal80]. Доказательство трансцендентности числа Малера в [Nis96] также не элементарно. Мы благодарим А. И. Галочкина за полезные обсуждения по оригинальному доказательству Малера. Идея нового доказательства предложена А. Скопенковым в 1999 г. Однако ее реализация нетривиальна и получена Д. Лешко и, окончательно, А. Каибхановым в 2002 г.

На презентации будет напомнена теорема Безу. Будет также приведена идея доказательства иррациональности чисел

$$e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \quad \text{и} \quad e(\{\epsilon_n\}_{n=0}^{\infty}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\epsilon_n}{n!}$$

для любой последовательности $\{\epsilon_n\}_{n=0}^{\infty}$ из единиц и минус единиц. При этом иррациональность второго числа доказывается с помощью разложения

$$e(\{\epsilon_n\}_{n=0}^{\infty}) = p/q = \sum_{n=0}^{q} \frac{\epsilon_n}{n!} + \frac{\epsilon_{q+1}}{(q+1)!} + \sum_{n=q+2}^{\infty} \frac{\epsilon_n}{n!} \qquad (*)$$


[KR01] Р. Курант, Р. Роббинс, *Что такое математика*, МЦНМО, 2001.

[Gal80] А. И. Галочкин, *О мере трансцендентности значений функций, удовлетворяющих некоторым функциональным уравнениям*, Мат. Заметки **27:2** (1980), 175–183.

[Nis96] K. Nishioka, *Mahler functions and transcendence*, Lecture Notes in Math. **1631**, Springer-Verlag, Berlin-New York, 1996.

[Mah29] K. Mahler, *Arithmetische Eigenschaften der Lösungen einer Klasse von Funktionalgleichungen*, Mathematische Annalen **1** (1929), 342–366.


**Вводные задачи.** Если условие задачи является формулировкой утверждения, то подразумевается, что это утверждение надо доказать.

**Задача 1.** Следующие числа иррациональны:

a) $\lambda = \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n!} = 0,1100010000000000..._2$. b) $\mu = \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-2^n} = 0,11010001000000010..._2$. c) $\nu = \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-[1,5^n]}$.

Typeset by $\mathcal{A}\mathcal{M}\mathcal{S}$-TEX

d) $e(\{\epsilon_n\}_{n=0}^\infty) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{\epsilon_n}{n!}$ для любой последовательности $\{\epsilon_n\}_{n=0}^\infty$ из единиц и минус единиц.

Число $x$ называется *квадратичной иррациональностью*, если оно является корнем квадратного уравнения $a\lambda^2 + b\lambda + c = 0$ с целыми коэфициентами $a \neq 0$, $b$ и $c$.

**Задача 2.** a) $e^{-1} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!}$ (указание: раскройте скобки в произведении $(\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}) \cdot (\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!})$).

e) Число $e$ не является квадратичной иррациональностью.

**Задача 3.** Пусть $f$ — квадратный трехчлен с целыми коэффициентами, $f(\lambda) = 0$ и $\lambda_s = \sum\limits_{n=0}^{s} 2^{-n!}$.

a) $f(\lambda_s) \neq 0$.
b) $|f(\lambda_s)| \geq C \cdot 2^{-2s!}$, где постоянная $C$ не зависит от $s$.
c) $|f(\lambda) - f(\lambda_s)| < C_1(\lambda - \lambda_s)$, где постоянная $C_1$ не зависит от $s$.
d) Число $\lambda$ не является квадратичной иррациональностью.

Число $x$ называется *трансцендентным*, если оно не является корнем никакого уравнения $a_t\lambda^t + a_{t-1}\lambda^{t-1} + \dots + a_1\lambda + a_0 = 0$ с целыми коэфициентами $a_t \neq 0, a_{t-1}, \dots, a_0$.

**Задача 4.** Пусть $f$ — многочлен степени $t$ с целыми коэффициентами.

a) Если $f(\lambda_s) = f(\lambda) = 0$, то $g(\lambda) = 0$ для некоторого многочлена $g$ степени меньше $t$ с целыми коэффициэнтами.
b) Если $f(\lambda_s) \neq 0$, то $|f(\lambda_s)| \geq 2^{-ts!}$.
c) $|f(\lambda) - f(\lambda_s)| < C(\lambda - \lambda_s)$, где постоянная $C$ не зависит от $s$.
d) Число $\lambda$ трансцендентно.

Некоторые из следующих задач (и решений) сформулированы с использованием двоичной системы счисления. Незнакомые с ней читатели могут заменить двоичную систему на десятичную, а число $\mu$ на $\mu' = \sum\limits_{n=0}^{\infty} 10^{-2^n} = 0,11010001000000010..._{10}$ (аналогично можно изменить числа $\lambda$ и $\nu$).

**Задача 5.** Пусть $b$, $c$ и $s$ — целые числа, $b \geq 0$, а $s$ достаточно большое.

a) В двоичной записи числа $\mu^2$ (соответственно $b\mu + c$) на месте справа от запятой с номером $3 \cdot 2^s$ стоит единица (соответственно ноль).
b) Число $\mu$ не является корнем уравнения $\mu^2 - b\mu + c = 0$.

Пусть $U_t$ — множество натуральных чисел, имеющих не более $t$ единиц в двоичной записи.

**Задача 6.** a) $\mu^2 = \sum\limits_{n \in U_2} c_n 2^{-n}$ для некоторых целых чисел $c_n \geq 1$.

b) Если $a$ и $b$ целые, то $a\mu^2 + b\mu = \sum\limits_{n \in U_2} d_n 2^{-n}$ для некоторых целых чисел $d_n$.

c) $c_n \in \{1, 2\}$, $d_n \leq 2|a| + |b|$ и (при $a > 0$) $d_n \geq 1$ для $n \in U_2 - U_1$.

Для числа $m \in U_t$ обозначим через $m_< = m_<(m, t)$ и $m_> = m_>(m, t)$ числа из $U_t$, ближайшие к $m$ сверху и снизу, соответственно.

**Задача 7.** a) Вася покрасил в красный цвет все натуральные числа, в двоичной записи которых не более двух единиц. Докажите, что существует три идущих подряд красных числа, промежутки между которыми имеют длину больше $2^{49}$.

b) Для любого $A$ существует такое $m = m(A) \in U_2 - U_1$, что $m_< + A < m < m_> - A$.
c) Число $\mu$ не является квадратичной иррациональностью (указание: преобразуйте разложение из задачи 6.b аналогично формуле (*)).
d) Число $\mu$ трансцендентно.

Читатель может попытаться решить задачи 7.cd без использования задач 6 и 7.ab; в этом случае сдавать последние не обязательно.

**Задачи, предложенные после промежуточного финиша.**

**Подзадача 8 'РЕДКИЕ И РАЗРЕЖЕННЫЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ'.** Последовательность $\{a_n\}$ натуральных чисел называется *редкой*, если для любого натурального $t$ количество способов представления числа $m$ в виде суммы $t$ членов этой последовательности (не обязательно различных) не превосходит некоторой константы, не зависящей от $m$ (но, возможно, зависящей от $t$).

Последовательность $\{a_n\}$ натуральных чисел называется *разреженной*, если для любого натурального $t$ выполнено следующее свойство. Покрасим в красный цвет натуральные числа $m$, представимые в виде суммы не более чем $t$ членов этой последовательности (не обязательно различных). Тогда для любого числа $M$ существуют три последовательных красных числа, промежутки между которыми больше $M$.

Какие из следующих последовательностей редкие и какие — разреженные?

(a) $n$; (b) $3^n$; (c) $2^n$; (d) $[1, 5^n]$; (e) $n^2$; (f) $f_n$, где $f_0 = f_1 = 1$ и $f_{n+2} = f_{n+1} + f_n$.

**Задача 9.** Если последовательность $\{a_n\}$ редкая и разреженная, то число $\sum\limits_{n=0}^{\infty} 2^{-a_n}$ трансцендентно (указание: аналогично задачам 11 и 12).

**Задача 10.** a) (теорема Лиувилля) Если для любого натурального $t$ и вещественного $c>0$ существуют такие $k$ и $l$, что $0<|\alpha-\frac{k}{l}|<\frac{c}{l^t}$, то число $\alpha$ трансцендентно.

b) Для числа Малера не выполнены условия теоремы Лиувилля.

**Задача 11.** a) $\mu^t=\sum\limits_{n\in U_t} c_n 2^{-n}$ для некоторых целых чисел $c_n\ge 1$, зависящих от $t$.

b) Для любого многочлена $f$ степени $t$ с целыми коэффициентами $f(\mu)=f(0)+\sum\limits_{n\in U_t} d_n 2^{-n}$ для некоторых целых чисел $d_n$.

c) Число $n\in U_t$ можно представить в виде $n=y+2^r$, где $y\in U_{t-1}$, $r\in\mathbb{Z}$, $r\ge 0$, не более чем $t^2$ способами.

d) $c_n(t)<(t!)^2$, $d_n<D$ для некоторого $D$, не зависящего от $n$, и (если старший член многочлена $f$ положителен) $c_n\ge 1$ для $n\in U_t-U_{t-1}$.

**Задача 12.** a) Для любых чисел $t$ и $A$ существует такое $m=m(t,A)\in U_t-U_{t-1}$, что $m_<+A<m<m_>-A$.

b) Число $\mu$ трансцендентно. Указание: преобразуйте разложение из задачи 11.b аналогично формуле $\frac{p}{q}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{\epsilon_n}{n!}=\sum\limits_{n=0}^{q}\frac{\epsilon_n}{n!}+\frac{\epsilon_{q+1}}{(q+1)!}+\sum\limits_{n=q+2}^{\infty}\frac{\epsilon_n}{n!}$ (для любой последовательности $\epsilon_n\in\{\pm1\}$).

**Задача 13.** (нерешенная) Следующие числа трансцендентны (в качестве отдельных пунктов можно сдавать доказательства того, что указанные числа не являются квадратичными иррациональностями):

a) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} d_n 2^{-2^n}$ для любой ограниченной последовательности $d_n$ целых положительных чисел.

b) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} d_n 2^{-2^n}$ для любой последовательности $0\le d_n\le n$ (или даже не очень быстро растущей).

c) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} 2^{-3^n}$. d) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n 2^{-2^n}$. e) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\epsilon_n 2^{-2^n}$ для любой последовательности $\epsilon_n\in\{\pm1\}$. f) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} 2^{-f_n}$. g) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} 2^{-[1{,}1^n]}$.