Как дифференцировать числа?

Решения задач 1-6, 11.

Задача 1. Приведем сперва явную формулу производной числа:

$$n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{\alpha_k} \Rightarrow n' = n \sum_{i=1}^{k} \frac{\alpha_i}{p_i}$$

Правило Лейбница выполнено. Действительно, если $n = n_1 n_2$, $n_1 = p_1^{\beta_1} \cdot \ldots \cdot p_k^{\beta_k}$, $n_2 = p_1^{\gamma_1} \cdot \ldots \cdot p_k^{\gamma_k}$, $\alpha_i = \beta_i + \gamma_i$, то

$$n' = n \sum_{i=1}^{k} \frac{\alpha_i}{p_i} = n_1 n_2 \sum_{i=1}^{k} \frac{\beta_i + \gamma_i}{p_i} = \left(n_1 \sum_{i=1}^{k} \frac{\beta_i}{p_i} \right) n_2 + n_1 \left(n_2 \sum_{i=1}^{k} \frac{\gamma_i}{p_i} \right) = (n_1 n_2)'.$$

Для доказательства единственности производной покажем индукцией по n, что производная совпадает с функцией, заданной формулой выше. Для $n = 1$, очевидно, совпадает. Пусть совпадает для всех меньших n. Если n — простое, то для него тоже совпадает. Если n — составное, то каким бы образом мы не разложили его на два меньших множителя, по предположению индукции их производная считается по формуле выше, значит, как мы ранее показали, производная n также считается по этой формуле.

Задача 2. Преобразуем левую и правую часть:

$$(ka + kb)' = (k(a + b))' = k'(a + b) + k(a + b)'$$

$$(ka)' + (kb)' = k'a + ka' + k'b + kb' = k'(a + b) + k(a' + b')$$

Теперь видно, что достаточно сравнить слагаемые $k(a + b)'$ и $k(a' + b')$. Так как $k > 0$, знак неравенства определяется знаком неравенства между $(a + b)'$ и $a' + b'$. Заметим, что доказано также третье утверждение:

$$(a + b)' = a' + b' \Rightarrow (ka + kb)' = (ka)' + (kb)'.$$

Задача 3. Утверждение задачи следует из задачи 2 и тождеств a) $3' = 1' + 2'$, b) $2' \geqslant 1' + 1'$, c) $5' \leqslant 3' + 2'$; также можно было непосредственно найти производные, например в пункте a: $(3k)' = 3k' + 3'k = 3k' + k = k' + (2k' + 2'k) = k' + (2k)'$.

Задача 4. Если n простое, то $n' = 1$; если же оно представимо в виде произведения не менее чем трех сомножителей, то $n' \geqslant (p_1p_2 + p_1p_3 + p_2p_3) \geqslant 12$. Поэтому если $2 \leqslant a \leqslant 10$, то $n = p_1p_2$ и $n' = p_1 + p_2$; чтобы решить уравнение для таких a, нужно попытаться представить их в виде суммы двух простых: $2 \neq p_1 + p_2$; $3 \neq p_1 + p_2$; $4 = 2 + 2,\ 4' = 4$; $5 = 2 + 3,\ 6' = 5$; $6 = 3 + 3,\ 9' = 6$; $7 = 2 + 5,\ 10' = 7$; $8 = 3 + 5,\ 15' = 8$; $9 = 2 + 7,\ 14' = 9$; $10 = 3 + 7 = 5 + 5,\ 21' = 25' = 10$.

Задача 5. Разложим число в произведение простых делителей, среди которых, возможно, есть равные $n = p_1 p_2 \cdot \ldots \cdot p_k$.
Оценка сверху. Поскольку $p_i \geqslant 2$, то $n \geqslant 2^k$, поэтому $k \leqslant log_2 n$. Теперь

$$n' = n \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{p_i} \leqslant n \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{2} \leqslant nk\frac{1}{2} \leqslant n\frac{\log_2 n}{2}$$

Оценка снизу.

$$n' = n \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{p_i} = nk \frac{\sum_{i=1}^{k} \frac{1}{p_i}}{k} \geqslant nk \sqrt[k]{\prod_{i=1}^{k} \frac{1}{p_i}} = nk \sqrt[k]{\frac{1}{n}} = kn^{\frac{k-1}{k}}$$

Если n – составное число, то $k \geqslant 2$ и $n' > 2\sqrt{n}$. Заметим, что обе оценки точные, так как достигаются в бесконечном множестве точек $n = 2^k$.

Задача 6. Пусть $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{\alpha_k}$, тогда

$$n' = \alpha_1 p_1^{\alpha_1 - 1} p_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{\alpha_k} + \alpha_2 p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2 - 1} \cdot \ldots \cdot p_k^{\alpha_k} + \ldots + \alpha_k p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{\alpha_k - 1}$$

Все слагаемые кроме первого делятся на $p_1^{\alpha_1}$, значит α_1 делится на p_1. Если теперь $\alpha_1 > p_1$, то первое слагаемое будет больше, чем n, а остальные слагаемые неотрицательны. Значит, $\alpha_1 = p_1$. Тогда первое слагаемое равно n, значит все остальные – нулевые. Поэтому, $\alpha_2 = \alpha_3 = \ldots = \alpha_k = 0$ и $n = p_1^{p_1}$.

Задача 11. Допустим, мы смогли продолжить производную на рациональные числа. Тогда из равенств $(x^2)' = ((-x)^2)'$ и $m' = \left(\frac{m}{n} \cdot n\right)'$ и правила Лейбница легко получается, что минус выносится за знак производной и должна выполняться известная формула для производной частного. Из этого следует единственность продолжения производной на рациональные числа.

Положим теперь для положительной несократимой дроби со знаменателем $n > 1$

$$\left(\frac{m}{n}\right)' = \frac{m'n - mn'}{n^2}.$$

Заметим, что формула дает верный ответ и для целых чисел, представленных как дробь со знаменателем 1. Убедимся, что ее можно применять и для сократимых дробей

$$\left(\frac{km}{kn}\right)' = \frac{(km)'kn - km(kn)'}{k^2n^2} = \frac{k'mkn + km'kn - kmk'n - kmkn'}{k^2n^2} = \frac{m'n - mn'}{n^2}.$$

Убедимся теперь, что так определенная производная для положительных рациональных чисел удовлетворяет правилу Лейбница.

$$\left(\frac{m}{n} \cdot \frac{p}{q}\right)' = \frac{(mp)'nq - mp(nq)'}{(nq)^2} = \frac{(m'p + mp')nq - mp(n'q + nq')}{(nq)^2} =$$

$$= \frac{m'n - mn'}{n^2} \cdot \frac{p}{q} + \frac{p'q - pq'}{q^2} \cdot \frac{m}{n} = \left(\frac{m}{n}\right)' \cdot \frac{p}{q} + \frac{m}{n} \cdot \left(\frac{p}{q}\right)'$$

Продолжим теперь производную и на отрицательные рациональные числа, положив $q' = -(-q)'$. Из правила вынесения знака легко следует, что формула Лейбница выполняется также и для случаев, когда один или оба сомножителя отрицаетельны.

Замечание. Нетрудно заметить, что производную можно вычислять и по формуле:

$$n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{\alpha_k} \Rightarrow n' = n \sum_{i=1}^{k} \frac{\alpha_i}{p_i},$$

только здесь показатели могут быть и отрицательными.