Как дифференцировать числа?

Решения задач 7, 12 – 14, 15се, 16а.

Задача 7. Предположим, что существует константа M, такая что $i(n) < M$ для любого n. Рассмотим все простые числа, не превосходящие n. Их количество обозначим $\pi(n)$, тогда число их пар, включая пары равных, будет $\frac{\pi(n)(\pi(n)+1)}{2} \geqslant \frac{\pi(n)^2}{2}$. Каждая такая пара (p,q) с суммой $s \leqslant 2n$ дает решение уравнения $x' = s$: $(pq)' = p + q = s$. Поэтому количество пар с данной суммой s не превосходит M, а всего сумм меньше, чем $2n$, откуда общее число пар меньше, чем $2nM$. Из неравенства $2nM > \frac{\pi(n)^2}{2}$ следует, что $\pi(n) < 2\sqrt{Mn}$, что противоречит известной оценке $\pi(n) \geqslant C\frac{n}{\log n}$.

Задача 12. Пусть $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{\alpha_k}$ и $n' = n \sum \frac{\alpha_i}{p_i} = 0$. Откуда

$$\alpha_1 p_2 \cdot \ldots \cdot p_k + \alpha_2 p_1 p_3 \cdot \ldots \cdot p_k + \ldots + \alpha_k p_1 p_2 \cdot \ldots \cdot p_{k-1} = 0.$$

Все слагаемые кроме i-го делятся на p_i, значит α_i должно делится на p_i. Обозначим $\alpha_i = \beta_i p_i$ и перепишем уравнение в виде $p_1 p_2 \cdot \ldots \cdot p_k(\beta_1 + \beta_2 + \ldots + \beta_k) = 0$. Итак, чтобы производная числа была равна нулю, оно должно иметь вид $n = p_1^{\beta_1 p_1} p_2^{\beta_2 p_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{\beta_k p_k}$, где $\sum \beta_i = 0$. Легко видеть, что все числа такого вида являются решениями.

Задача 13. Пусть $x' = \alpha x$, где $x = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{\alpha_k}$. Тогда $x' = x \displaystyle\sum_{i=1}^{k} \frac{\alpha_i}{p_i}$ и $\alpha = \displaystyle\sum_{i=1}^{k} \frac{\alpha_i}{p_i} = \frac{a}{p_1 p_2 \cdot \ldots \cdot p_k}$, где a – некоторое целое число. Таким образом, если при $\alpha = \frac{a}{b}$ уравнение $x' = \alpha x$ имеет решение, то в разложение числа b простые множители входят не более чем в первой степени. Покажем, что это условие является и достаточным. Для этого по данному $\alpha = \frac{a}{b}$, где $b = p_1 p_2 \cdot \ldots \cdot p_k$, найдем рациональное число x, являющееся решением соответствующего уравнения. Покажем индукцией по числу простых множителей знаменателя, что число вида $\frac{a}{p_1 p_2 \cdot \ldots \cdot p_k}$ представляется в виде суммы чисел $\frac{\alpha_i}{p_i}$. В этом случае $x = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{\alpha_k}$ и будет решением уравнения $x' = \alpha x$.

Если простой множитель один, то представление получено. Покажем для $\frac{a}{p_1 p_2 \cdot \ldots \cdot p_{k+1}}$. Так как $(p_1 p_2 \cdot \ldots \cdot p_k, p_{k+1}) = 1$, из алгоритма Евклида следует, что существуют такие целые числа c и d, что $c\,(p_1 p_2 \cdot \ldots \cdot p_k) + d p_{k+1} = 1$, откуда $\frac{c}{p_{k+1}} + \frac{d}{p_1 p_2 \cdot \ldots \cdot p_k} = \frac{1}{p_1 p_2 \cdot \ldots \cdot p_{k+1}}$. Оба слагаемых левой части по предположению индукции представляются в требуемом виде. Воспользовавшись этим представлением и домножив обе части равенства на a получим требуемое представление.

Опишем все решения уравнения $x' = \alpha x$. Пусть a, b – какие-то решения (как показано выше, хотя бы одно решение найдется). Тогда $\left(\frac{a}{b}\right)' = \frac{a'b - ab'}{b^2} = \frac{\alpha ab - a\alpha b}{b^2} = 0$ и $\frac{a}{b}$ – решение уравнения $y' = 0$, и наоборот, если y – решение уравнения $y' = 0$, а x_0 – решение уравнения $x' = \alpha x$, то $(x_0 y)' = \alpha x_0 y + 0 \cdot x_0$ и $x_0 y$ – решение уравнения $x' = \alpha x$. Таким образом все решения уравнения $x' = \alpha x$ имеют вид $x_0 y$, где x_0 – некоторое решение $x' = \alpha x$, а y – произвольное решение уравнения $y' = 0$.

Задача 14. Ответ: неверно. Докажем это, не используя постулат Бертрана.

Каждое простое число p лежит между последовательными степенями двойки, и, увеличивая p, можно сделать показатели степеней сколь угодно большими. Зафиксируем натуральное n, и выберем p так, чтобы показатели стали больше n. Тогда

$2^{k+n} < p < 2^{k+n+1}$, где k – некоторое натуральное число. Отсюда $\frac{1}{2^{n+1}} < \frac{2^k}{p} < \frac{1}{2^n}$, то есть последовательность дробей $\frac{2^k}{p}$ стремится к 0. Продифференцируем эти дроби: $(\frac{2^k}{p})' = \frac{2^k}{p}(\frac{k}{2} - \frac{1}{p})$. При возрастании p слагаемое $\frac{1}{p}$ стремится к 0, а слагаемое $\frac{k}{2}$ – к бесконечности, поэтому можно добиться того, чтобы выполнялось неравенство $\frac{k}{2} - \frac{1}{p} > 2^{n+1}$. Тогда $(\frac{2^k}{p})' > 1$, то есть последовательность производных к 0 не стремится.

(Для придир: по заданному n выберем наименьшее простое $p_n > 2^{2^{n+2}+n+1}$, обозначим k_n наибольшее натуральное число, такое что $p_n > 2^{k_n+n+1}$, и положим $x_n = \dfrac{2^{k_n}}{p_n}$. Убедитесь сами, что все обещанные неравенства выполняются.)

Задача 15с.

$$\left(-\frac{1}{16}\right)' = \frac{1}{8}$$

$$\left(-\frac{21}{16}\right)' = -\frac{16 \cdot 10 - 21 \cdot 32}{16^2} = 2; \quad \left(-\frac{43}{64}\right)' = -\frac{64 \cdot 1 - 43 \cdot 192}{64^2} = 2$$

Задача 15е. Может. Достаточно взять любое такое $a \neq 0$, чтобы $a' = 0$. Тогда для любого простого p производная $(pa)' = 1 \cdot a + pa' = a$, что дает нам бесконечно много решений уравнения $x' = a$.

Задача 16а. Утверждение легко следует из того, что все числа $x^{(k)}$ могут быть представлены как дроби с одинаковыми знаменателями. Итак, пусть $x = \frac{a}{b}$, где $b = p_1 \cdot \ldots \cdot p_n$ (p_i – простые числа, возможно равные). Тогда в качестве единого знаменателя можно взять число $M = p_1^{p_1} \ldots p_n^{p_n}$. Так как $b|M$, то $x = \frac{C_0}{M}$, где C_0 – целое. Покажем, что тогда и $x' = \frac{C_1}{M}$, где C_1 – целое. В самом деле, поскольку $M' = nM$, то $x' = \left(\frac{C_0}{M}\right)' = \frac{C_0'M - C_0M'}{M^2} = \frac{C_0' - C_0 n}{M}$, и число $C_0' - C_0 n$, очевидно, целое. Индукцией по k показываем, что $x^{(k)} = \frac{C_k}{M}$, где C_k – целое.

Умножим теперь всю последовательность на M. Поскольку она сходилась, то последовательность целых чисел C_k тоже сходится. Поэтому, начиная с некоторого номера, все C_k, а значит и $x^{(k)}$, станут равными.