Как дифференцировать числа?

Предложена В.А.Уфнаровским, представляют А.В.Шаповалов и А.Чеботарев

Введем производную натурального числа следующим образом:

Определение. $p' = 1$, если p – простое;
$(mn)' = mn' + nm'$.

Из этого определения сразу следует, что $1' = 0$; будем также считать, что $0' = 0$. Таким образом, дифференцирование – это отображение из множества натуральных чисел с нулем в себя.

Задача 1. a) Докажите, что производная любого натурального числа определена однозначно;
b) найдите явную формулу для производной.

Задача 2. Докажите, что
a) если $(a+b)' \leqslant a' + b'$, то для любого натурального k выполнено неравенство $(ka+kb)' \leqslant (ka)' + (kb)'$;
b) если $(a+b)' \geqslant a' + b'$, то для любого натурального k выполнено неравенство $(ka+kb)' \geqslant (ka)' + (kb)'$.

Задача 3.Докажите, что для всех натуральных k выполняется:
a) $(3k)' = k' + (2k)'$;
b) $(2k)' \geqslant 2k'$;
c) $(5k)' \leqslant (3k)' + (2k)'$.

Задача 4. Решите дифференциальное уравнение $n' = a$ для всех $a \leqslant 10$.

Задача 5. a) Докажите, что $n' \leqslant n^2$;
b) придумайте более точную оценку сверху для n';
c) придумайте оценку снизу для n', где n – составное.

Задача 6. Решите дифференциальное уравнение $n' = n$.

Задача 7. Обозначим за $i(a)$ число решений уравнения $n' = a$. Докажите, что в последовательности $i(n)$ найдутся сколь угодно большие числа.

Задача 8 (открытая проблема). Верно ли, что уравнение $n'' = 1$ имеет бесконечно много решений в натуральных числах?

Задача 9 (открытая проблема). Верно ли, что уравнение $n' = 2b$ имеет решение при любом натуральном $b > 1$?

Задача 10 (открытая проблема). Пусть $n' \neq n$,
a) Может ли $n'' = n$?
b) Может ли $n^{(k)} = n$?

Задача 11. Придумайте, как расширить область определения дифференциального отображения на множество рациональных чисел. Докажите, что такое продолжение единственно.