Как дифференцировать числа?

Предложена В.А.Уфнаровским, представляют А.В.Шаповалов и А.Чеботарев

Часть вторая с поправками от 6 августа.

Добавлены пункты 15d, 15e. Внесены поправки в пункты 13a, 13b, 15a, 15b.
Внесены поправки в пункты 15b, 15c, 16a.

Расширим определение производной на множество рациональных чисел следующим образом:

Определение. $(-x)' = -x'$, $\left(\dfrac{m}{n}\right)' = \dfrac{nm' - mn'}{n^2}$.

Задача 12. Решите в рациональных числах уравнение $x' = 0$.

Задача 13. a) Найдите все рациональные α, при которых уравнение $x' = \alpha x$ имеет решение $x \neq 0$.
b) Докажите, что если уравнение $x' = \alpha x$ имеет хотя бы одно ненулевое решение, то оно имеет бесконечно много решений в рациональных числах.
c) Опишите все решения уравнения $x' = \alpha x$.

Задача 14. Последовательность рациональных чисел $\{x_n\}$ стремится к нулю. Верно ли, что последовательность $\{x'_n\}$, составленная из их производных, также стремится к нулю?

Задача 15. a) Опишите как можно более полно множество натуральных чисел a, для которых уравнение $x' = a$ имеет решение в рациональных числах.
b)* Существует ли такое рациональное a, для которого это уравнение не имеет решения?
c) Имеет ли оно решение при $a = 2$; при $a = \frac{1}{8}$?
d)* Имеет ли уравнение $x' = 1$ другие **положительные** решения кроме простых целых чисел?
e)* Может ли уравнение $x' = a$ иметь бесконечно много решений для каких-нибудь a, кроме $0, 1, -1$?

Задача 16. a) Докажите, что если последовательность $\{x^{(k)}\} = x', x'', x''', \dots, x^{(k)}, \dots$ имеет конечный предел, то, начиная с некоторого номера, все ее члены равны.
b)* Может ли последовательность $\{x^{(k)}\}$ быть периодичной с периодом больше 2?

Задача 17. a)* Верно ли, что для любого N найдется составное число $m > N$, что его производная некоторого порядка $m^{(k)} = 0$?
b)* Существует ли бесконечная последовательность различных натуральных чисел $\{n_i\}$, такая что $n'_{i+1} = n_i$ для всех i?

* Звездочкой помечены открытые проблемы.