Алгебра паркетов. Промежуточный финиш

И.И. Богданов, Г.Р. Челноков

August 4, 2003

Исправления и дополнения к условиям

ВНИМАНИЕ!!! Условие задачи 6c) исправлено!!!

6c). Докажите, что в этом случае фигурка сжимаема либо в p раз, либо в n/p раз.

7. Рассматриваются паркеты на клетчатом квадрате размера $p\times p$, противоположные стороны которого отождествлены (p – простое; такое клеточное множество мы в дальнейшем будем называть *тором* $p\times p$). (Эквивалентная переформулировка: рассматриваются покрытия клетчатой плоскости, самосовмещающиеся как при переносе на p клеток вверх, так и при переносе на p клеток влево.)

Пусть $\mathcal{F}$ – p-фигурка на этом торе. Докажите, что следующие условия равносильны:

(i) на тор можно положить несколько транслятов $\mathcal{F}$ так, что каждая клетка покрыта ровно k транслятами ($k<p$);

(ii) на торе существует $\mathcal{F}$-паркет;

(iii) клетки тора можно так раскрасить в p цветов, что в каждом $\mathcal{F}$-трансляте все цвета различны.

Решения

Пронумеруем клетки фигурки F числами от 1 до n (n – число клеток фигурки). Теперь будем говорить, что данная клетка имеет номер i относительно данного транслята, если данный транслят накрывает ее клеткой, соответствующей i-й клетке фигурки.

1. Лемма 1. Отметим в фигурке некоторую клетку. Рассмотрим множество таких клеток, что, если транслят $\mathcal{F}$ лежит отмеченной клеткой на нашей, то он покрывает клетку A. Тогда это множество есть транслят фигурки $\overline{\mathcal{F}}$, у которого отмеченная клетка лежит на A.

Доказательство. Рассмотрим множество V векторов, соединяющих отмеченную клетку фигурки со всеми ее клетками. Тогда оба описанных множества клеток, очевидно, совпадают с множеством таких клеток X, что вектор $\overrightarrow{XA}$ лежит в V.

1a). Приведем биекцию между трансверсалями фигурки $\overline{\mathcal{F}}$ (их, очевидно, столько же, сколько и у $\mathcal{F}$) и паркетами фигурки $\mathcal{F}$. Положим на каждую клетку *некоторого множества* T фигурку $\mathcal{F}$ отмеченной клеткой. Согласно Лемме 1, каждая клетка покрыта столько раз, сколько клеток множества T попадает в соответствующий транслят фигурки $\overline{\mathcal{F}}$, т. е. мы получим $\mathcal{F}$-паркет ровно тогда, когда T было трансверсалью для $\mathcal{F}$.

1b). Рассмотрим произвольную трансверсаль. В клетки трансверсали поставим числа $n-1$, а в остальные -1. В каждый транслят попало ровно одно число $n-1$. (Здесь n – площадь фигурки.)

1c). Паркет однозначно задается своим множеством выделенных клеток, которое является трансверсалью для $\overline{\mathcal{F}}$; по этой трансверсали можно построить БФ для $\overline{\mathcal{F}}$. Поэтому достаточно доказать следующий пункт.

1d). Пусть расстояние между крайними клетками фигурки равно d. Тогда по значениям БФ на отрезке длины d однозначно восстанавливаются все значения функции. Поскольку наборов значений конечнозначной функции на конечном отрезке есть лишь конечное число, наборы значений на двух отрезках совпадут. Параллельный перенос, совмещающий эти отрезки, самосовмещает функцию.

1e)$^\sharp$. Согласно решению пункта **1a)**, достаточно показать, что если в каждом трансляте паркета для $\mathcal{F}$ выделить одну и ту же клетку, то получится трансверсаль для $\mathcal{F}$. Поставим в клетки пространства числа от 1 до n: в каждую клетку поставим номер попавшей на нее клетки транслята. Покажем, что в *любом* трансляте все числа различны; отсюда, очевидно, будет следовать требуемое.

Предположим, что в некоторый транслят попало два одинаковых числа (без ограничения общности – единицы). Пусть они попали на клетки A и B, занумерованные относительно нашего транслята числами i и j. Рассмотрим следующие трансляты паркета: $\mathcal{F}_1$ – транслят, первая клетка которого накрывает клетку A, $\mathcal{F}_2$ – транслят, первая клетка которого накрывает клетку B. Легко видеть, что j-я клетка транслята $\mathcal{F}_1$ и i-я клетка транслята $\mathcal{F}_2$ накрывают одну и ту же клетку пространства, что противоречит тому, что трансляты принадлежат паркету.

2a). Будем говорить, что номер транслята – это номер его самой левой клетки. Для нулевого транслята сумма равна нулю по определению корня. Сумма для k-го транслята отличается от суммы для нулевого домножением на ε^k, то есть тоже равна нулю.

Покажем, что делать с фигуркой на плоскости. Сначала определим для фигурки на плоскости соответствующий ей многочлен аналогичным образом. Занумеруем клетки плоскости парами целых чисел (координатами соответствующей клетки), и рассмотрим многочлен

$$P_{\mathcal{F}}(x,y)=\sum_{i,j:\ (i,j)\text{-я клетка принадлежит }\mathcal{F}} x^i y^j$$

Поскольку многочлены, отличающиеся друг от друга домножением на моном $x^k y^\ell$, соответствуют транслятам одной и той же фигурки, мы время от времени будем отождествлять такие многочлены.

Рассмотрим любую пару комплексных чисел $x_0\neq 0$ и $y_0\neq 0$, что $P_{\mathcal{F}}(x_0,y_0)=0$ (обратите внимание, это условие сохраняется при домножении $P_{\mathcal{F}}(x_0,y_0)=0$ на целую степень икса или игрека). Расставим в клетки плоскости числа так: в клетку (i,j) поставим число $x_0^i y_0^j$. По соображениям, аналогичным одномерному случаю, получаем барьерную функцию.

2b). Пусть $\mathcal{F}$ – n-паркетная фигурка. Рассмотрим отрезок длины n, отметим на нем клетки, на которых лежат левые клетки фигурок паркета, и назовем это множество клеток “характером паркета” $\mathcal{G}$. Тогда условие, что данное множество $\mathcal{F}$-транслятов образует паркет, равносильно следующему: для любого $0\leqslant m\leqslant n-1$ найдутся единственные k,ℓ такие, что k-я и ℓ-я клетки принадлежат соответственно фигуркам $\mathcal{F}$ и $\mathcal{G}$, причем $k+\ell=m$; при остальных же m такой пары не существует. На языке многочленов это утверждение записывается так: $P_{\mathcal{F}}(x)P_{\mathcal{G}}(x)=1+x+\dots+x^{n-1}$.

Таким образом, мы получили, что многочлен $P_{\mathcal{F}}(x)$ является делителем $1+x+\dots+x^{n-1}=\prod\limits_{d|n,\,d>1} F_d(x)$, все множители неприводимы, и их ровно $d(n)$, откуда и следует требуемое.

Замечание. Легко видеть, что заодно мы доказали следующее: любая n-паркетная фигурка симметрична (ибо все множители симметричны) и покрытие ею отрезка длины n единственно.

3. Лемма 2. Пусть $\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_n$ – все корни из 1 степени n. Тогда $\varepsilon_1^k+\dots+\varepsilon_n^k=0$ при любом $1\leqslant k\leqslant n-1$.

Доказательство. Можно считать, что $\varepsilon_k = \cos\dfrac{2\pi k}{n} + i\sin\dfrac{2\pi k}{n} = \varepsilon_1^k$; тогда

$$\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i^k = \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_k^i = \frac{\varepsilon_k^{n+1} - \varepsilon_k}{\varepsilon_k - 1},$$

что равно нулю, т. к. $\varepsilon_k^n = 1$, но $\varepsilon_k \neq 1$.

3a). Достаточно показать, что в виде (1) представляются последовательности $(b_k^{(i)})$ вида

$$b_k^{(i)} = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad k - i \vdots n, \\ 0, & \text{иначе,} \end{cases}$$

поскольку каждая n-периодичная последовательность есть их линейная комбинация. Требуемое представление имеет вид

$$b_k^{(i)} = \frac{1}{n}\left(\varepsilon_1^{-i}\varepsilon_1^k + \dots + \varepsilon_n^{-i}\varepsilon_n^k\right)$$

согласно Лемме 2.

3b). Пусть (a_k) – наша барьерная функция. Обозначим через $(a_k^{(i)})$ расстановку, полученную из нее сдвигом на i вправо: $a_k^{(i)} = a_{k-i}$; понятно, что она также является барьерной функцией фигурки $\mathcal{F}$. Следовательно, барьерной будет и функция

$$c_k^{(i)} = a_k + a_k^{(1)}\varepsilon_i + a_k^{(2)}\varepsilon_i^2 + \dots + a_k^{(n-1)}\varepsilon_i^{n-1},$$

поскольку линейная комбинация барьерных функций также является барьерной. Однако, подставив явный вид последовательности (a_k) из предыдущей задачи, получаем

$$c_k^{(i)} = \sum_{u=0}^{n-1} a_{k-u}\varepsilon_i^u = \sum_{u=0}^{n-1}\sum_{w=1}^{n} \alpha_w \varepsilon_w^{k-u}\varepsilon_i^u = \sum_{w=1}^{n} \alpha_w \varepsilon_w^k \sum_{u=0}^{n-1} \varepsilon_{i-w}^u.$$

Однако при $\varepsilon_j \neq 1$ имеем $\sum_{u=0}^{n-1}\varepsilon_j^u = 0$, поскольку ε_j является корнем многочлена $x^n - 1 = (x-1)(1 + \dots + x^{n-1})$; если же $\varepsilon_j = 1$, то $\sum_{u=0}^{n-1}\varepsilon_j^u = n$. Поэтому $c_k^{(i)} = n\alpha_i\varepsilon_i^k$ является барьерной функцией, поэтому, если $\alpha_i \neq 0$, то ε_i – корень $P_{\mathcal{F}}$, что и требовалось.

3c). Пусть некоторый паркет имеет период n. Барьерная функция, соответствующая паркету, представляется в виде (1). Поэтому первое утверждение следует из того, что любая корневая функция, участвующая в этом разложении, НОК(n_i)-периодична.

Пусть площадь фигурки равна m. Заметим, что номера всех клеток фигурки дают разные остатки при делении на n, иначе одна клетка будет покрыта двумя фигурками. Рассмотрим все фигурки паркета, левые клетки которых лежат на клетках фиксированного остатка. Каждая такая фигурка покрывает m клеток, имеющих (фиксированные!) различные остатки от деления на n. Тогда эти фигурки покрывают полностью клетки этих остатков, и в каждом отрезке длины n этими фигурками покрыто ровно m клеток. Осталось заметить, что все клетки любого отрезка длины n разбиваются на такие m-ки.

3d). Рассмотрим барьерную функцию, соответствующую нашей трансверсали. Она представляется в виде (1), где ε_i – корни из 1, являющиеся корнями $P_{\mathcal{F}}$. Тогда числа $\overline{\varepsilon}_i = \varepsilon_i^{-1}$ являются, очевидно, как корнями $P_{\mathcal{F}}$, так и корнями $P_{\overline{\mathcal{F}}}$. Поэтому наша функция является барьерной для $\overline{\mathcal{F}}$, т. е. трансверсаль является трансверсалью для $\overline{\mathcal{F}}$, что и требовалось.