Алгебра паркетов

И.И. Богданов, Г.Р. Челноков

August 8, 2003

Мы рассматриваем бесконечную в обе стороны клетчатую полоску ширины 1 (а в задачах 1 и 2 – также клетчатые плоскость и пространство).

Определение. *Фигурка* есть произвольное конечное множество клеток (не обязательно связное!). *Транслятом фигурки* называется ее образ при параллельном переносе (на целый вектор). *Паркет* – это замощение полоски (плоскости, пространства) транслятами одной фигурки. Если существует паркет из транслятов данной фигурки, то фигурка называется *паркетной.*

Трансверсалью фигурки $\mathcal{F}$ называется такое множество клеток, что в любом трансляте $\mathcal{F}$ содержится ровно одна клетка этого множества. *Барьерной функцией фигурки* $\mathcal{F}$ называется такая расстановка (комплексных) чисел в клетках, что сумма чисел в любом трансляте равна нулю. Расстановка чисел называется ограниченной, если существует такое M, что все числа не превосходят M по модулю.

Пункты повышенной трудности отмечены звездочкой. Пункты, не являющиеся необходимыми для продвижения по главной линии задачи, отмечены знаком $\sharp$.

1. В этом пункте мы рассматриваем паркеты на клетчатом пространстве произвольной размерности.

1a). Фигурка паркетна тогда и только тогда, когда у нее есть трансверсаль; более того, у нее столько же различных паркетов (м.б. бесконечное число!), сколько различных трансверсалей.

1b). Если фигурка паркетна, то у нее есть нетривиальная ограниченная барьерная функция.

1c). Докажите, что на одномерной полоске любой паркет периодичен.

1d). Докажите, что на одномерной полоске любая барьерная функция фигурки, принимающая конечное множество значений, периодична.

Обозначим через $\overline{\mathcal{F}}$ фигурку, полученную из $\mathcal{F}$ центральной симметрией (относительно точки с полуцелыми координатами).

1e)$^\sharp$. Трансверсаль для фигурки $\mathcal{F}$ является также трансверсалью для $\overline{\mathcal{F}}$.

1f)$^\sharp$. (Задача А.Я. Белова с 19 Турнира Городов) Салфетка имеет форму многоугольника. Докажите, что следующие условия равносильны:

(i) Как ни положить несколько транслятов такой салфетки на стол, всегда можно вбить несколько гвоздей так, что каждая салфетка прибита ровно одним гвоздем;

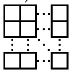
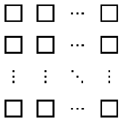
(ii) Из транслятов салфетки можно выложить паркет.

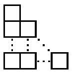
2. Занумеруем клетки полоски целыми числам по порядку так, чтобы самая левая клетка фигурки имела номер 0. Сопоставим фигурке $\mathcal{F}$ многочлен

$$P_{\mathcal{F}}(x) = \sum_{i:\ i\text{-я клетка принадлежит } \mathcal{F}} x^i$$

2a). Пусть ε – корень многочлена $P_{\mathcal{F}}$ (заметим, что $\varepsilon \neq 0$). Расставим в клетки числа так: в i-ю клетку поставим ε^i. Докажите, что полученная расстановка является барьерной функцией фигурки $\mathcal{F}$. Такую барьерную функцию мы будем называть *корневой*. Сформулируйте и докажите аналог этого утверждения для клетчатой плоскости.

2b)$^\sharp$. Фигурка называется n-паркетной, если ее непересекающимися транслятами можно покрыть полоску длины n. Докажите, что количество n-паркетных фигурок не больше, чем $2^{d(n)}$ (здесь $d(n)$ – количество натуральных делителей n, меньших n).

2c)$^\sharp$. Рассматривается клетчатая плоскость. Фигурка $\mathcal{F}$  состоит из всех клеток (a,b): $0 \leqslant a,b \leqslant 2k$; фигурка $\mathcal{G}$  состоит из всех клеток $(2a,2b)$: $0 \leqslant a,b \leqslant 2k$. Докажите, что любая барьерная функция для $\mathcal{F}$ является также барьерной функцией для $\mathcal{G}$.

2d)$^\sharp$. Рассмотрим расстановки в клетках плоскости остатков по модулю 2. Найдите все такие n, что любая расстановка, являющаяся барьерной для "уголка" , является также барьерной для "треугольника"  со стороной n.

Далее во всех задачах рассматриваются **только** замощения одномерной полоски.

3. Комплексное число ε называются *корнем n-й степени из единицы*, если $\varepsilon^n = 1$. При этом, если n – наименьшее число такое, что $\varepsilon^n = 1$, то ε называется *примитивным* корнем n-й степени из единицы, а n – степенью этого корня. Множество всех примитивных корней n-й степени из 1 будем обозначать R_n.

3a). Пусть есть последовательность a_k, периодичная с периодом длины n. Докажите, что она представляется в виде

$$a_k = \alpha_1\varepsilon_1^k + \alpha_2\varepsilon_2^k + \ldots + \alpha_n\varepsilon_n^k, \tag{1}$$

где числа ε_i – это все корни n-й степени из единицы, α_i – фиксированные (комплексные) числа.

3b). Докажите, что любая периодичная барьерная функция фигурки $\mathcal{F}$ представляется в виде (1), где ε_i пробегают множество корней из единицы, являющихся корнями многочлена $P_{\mathcal{F}}$.

3c). Пусть n_i – степени корней из единицы, являющихся корнями многочлена фигурки. Тогда период любого паркета делит НОК(n_i) и делится на площадь фигурки.

3d). Как при помощи этой техники доказать пункт **1e)** (для полоски)?

4. (Обобщение задачи С.Л. Берлова с X конференции ТурГора.) Здесь мы хотим найти критерий паркетности фигурки из p клеток (p – простое). Фигурки из p клеток мы в дальнейшем будем называть *p-фигурками*.

Определение. Фигурка называется *несжимаемой*, если попарные расстояния между ее клетками взаимно просты в совокупности (т.е., если нельзя выбрать "разрежение" нашей полоски, в котором фигурка целиком лежит). Понятно, что достаточно исследовать паркетность лишь несжимаемых фигурок.

4a). У многочлена p-фигурки есть корни $\in R_{p^k}$, не более чем для одного k. (Напомним, что R_n – множество всех примитивных корней степени n из 1.)

4b). Если у p-фигурки есть корень $\in R_{p^k}$ при $k > 1$, то она сжимаема.

4c)*. Пусть $\mathcal{F}$ – паркетная фигурка площади n, простое число p делит n. Сколько существует таких k, что у многочлена $\mathcal{F}$ есть корни $\in R_{p^k}$?

4d). Несжимаемая p-фигурка паркетна тогда и только тогда, когда номера всех ее клеток имеют разные остатки от деления на p.

Определение. Линейной комбинацией с рациональными (комплексными, etc.) коэффициентами выражений $X_1, \ldots, X_n$ называется выражение вида $a_1X_1 + \ldots + a_nX_n$, где a_i – рациональные (комплексные, etc.) числа.

5. Здесь мы собираемся исследовать область, на первый взгляд (и только!) не имеющую ничего общего с последующим. Именно, мы будем исследовать многочлены вида $P(x) = a_0 + a_1x + \ldots + a_{n-1}x^{n-1}$ с рациональными коэффициентами такие, что $P(\alpha) = 0$, где α – примитивный корень n-й степени из 1. Такие многочлены мы будем называть n-корневыми.

Пусть n делится на простое p, $n=pm$. *p-угольным многочленом* мы будем называть многочлен вида $x^i+x^{i+m}+\dots+x^{i+(p-1)m}$, $i<m$.

5a). Докажите, что p-угольный многочлен является n-корневым.

5b). Докажите, что любой n-корневой многочлен представляется как линейная комбинация p-угольных (при различных p, делящих n).

5c). Если все коэффициенты исходного многочлена были целыми, то его можно представить как линейную комбинацию p-угольных многочленов с целыми коэффициентами.

5d). Докажите, что если многочлен, у которого лишь k коэффициентов отличны от нуля, является n-корневым, то он представляется в виде комбинации p-угольных при различных $p\leqslant k$.

5e)$^\sharp$. Докажите, что если сумма пяти корней из 1 равна нулю, то это либо вершины правильного 5-угольника, либо вершины правильного 3-угольника и концы диаметра окружности $|z|=1$.

5f)$^\sharp$. (Сформулирован К.А. Кнопом) Дан правильный n-угольник. Опишите все пары треугольников, вершины которых являются вершинами n-угольника, а точки пересечения медиан совпадают.

6. Цель данной серии – доказать, что для несжимаемой паркетной p-фигурки есть не более одного паркета (с точностью до параллельного переноса).

6a). Докажите, что для любого составного n есть несжимаемая фигурка площади n, для которой существует более одного паркета.

6b). Докажите, что если у p-фигурки есть более одного паркета, то у ее многочлена есть корень порядка, делящегося на p и большего p. Обозначим этот порядок n.

6c). Докажите, что в этом случае фигурка сжимаема либо в p раз, либо в n/p раз.

7. (Задача была добавлена на промежуточном финише.) Рассматриваются паркеты на клетчатом квадрате размера $p\times p$, противоположные стороны которого отождествлены (p – простое; такое клеточное множество мы в дальнейшем будем называть *тором* $p\times p$). (Эквивалентная переформулировка: рассматриваются покрытия клетчатой плоскости, самосовмещающиеся как при переносе на p клеток вверх, так и при переносе на p клеток влево.)

Пусть $\mathcal{F}$ – p-фигурка на этом торе. Докажите, что следующие условия равносильны:

(i) на тор можно положить несколько транслятов $\mathcal{F}$ так, что каждая клетка покрыта ровно k транслятами ($k<p$);

(ii) на торе существует $\mathcal{F}$-паркет;

(iii) клетки тора можно так раскрасить в p цветов, что в каждом $\mathcal{F}$-трансляте все цвета различны.

Следующими фактами можно пользоваться без доказательства. А можно и доказать …

Факт. a). Многочлен с целыми коэффициентами единственным образом раскладывается на неразложимые множители с целыми коэффициентами (с точностью до умножения на ±1 и перестановки сомножителей). Многочлен с комплексными коэффициентами имеет единственное представление вида $a(x-x_1)\dots(x-x_n)$ (с точностью до перестановки сомножителей).

b). Корнями многочлена

$$F_{p^k}(x)=1+x^{p^{k-1}}+x^{2p^{k-1}}+\ldots+x^{(p-1)p^{k-1}}$$

является все элементы R_{p^k} и только они. Этот многочлен неприводим (над $\mathbb{Z}$), поэтому, если у многочлена с целыми коэффициентами есть корень, принадлежащий R_{p^k}, то он делится на F_{p^k}.

c)*. Многочлен $F_n(x)=\prod_{\varepsilon\in R_n}(x-\varepsilon)$ неприводим (над $\mathbb{Z}$).

Решения

Пронумеруем клетки фигурки F числами от 1 до n (n – число клеток фигурки). Теперь будем говорить, что данная клетка имеет номер i относительно данного транслята, если данный транслят накрывает ее клеткой, соответствующей i-й клетке фигурки.

1. Лемма 1. Отметим в фигурке некоторую клетку. Рассмотрим множество таких клеток, что, если транслят $\mathcal{F}$ лежит отмеченной клеткой на нашей, то он покрывает клетку A. Тогда это множество есть транслят фигурки $\overline{\mathcal{F}}$, у которого отмеченная клетка лежит на A.

Доказательство. Рассмотрим множество V векторов, соединяющих отмеченную клетку фигурки со всеми ее клетками. Тогда оба описанных множества клеток, очевидно, совпадают с множеством таких клеток X, что вектор $\overrightarrow{XA}$ лежит в V.

1a). Приведем биекцию между трансверсалями фигурки $\overline{\mathcal{F}}$ (их, очевидно, столько же, сколько и у $\mathcal{F}$) и паркетами фигурки $\mathcal{F}$. Положим на каждую клетку *некоторого множества* T фигурку $\mathcal{F}$ отмеченной клеткой. Согласно Лемме 1, каждая клетка покрыта столько раз, сколько клеток множества T попадает в соответствующий транслят фигурки $\overline{\mathcal{F}}$, т. е. мы получим $\mathcal{F}$-паркет ровно тогда, когда T было трансверсалью для $\mathcal{F}$.

1b). Рассмотрим произвольную трансверсаль. В клетки трансверсали поставим числа $n-1$, а в остальные -1. В каждый транслят попало ровно одно число $n-1$. (Здесь n – площадь фигурки.)

1c). Паркет однозначно задается своим множеством выделенных клеток, которое является трансверсалью для $\overline{\mathcal{F}}$; по этой трансверсали можно построить БФ для $\overline{\mathcal{F}}$. Поэтому достаточно доказать следующий пункт.

1d). Пусть расстояние между крайними клетками фигурки равно d. Тогда по значениям БФ на отрезке длины d однозначно восстанавливаются все значения функции. Поскольку наборов значений конечнозначной функции на конечном отрезке есть лишь конечное число, наборы значений на двух отрезках совпадут. Параллельный перенос, совмещающий эти отрезки, самосовмещает функцию.

1e)$^\sharp$. Согласно решению пункта **1a)**, достаточно показать, что если в каждом трансляте паркета для $\mathcal{F}$ выделить одну и ту же клетку, то получится трансверсаль для $\mathcal{F}$. Поставим в клетки пространства числа от 1 до n: в каждую клетку поставим номер попавшей на нее клетки транслята. Покажем, что в *любом* трансляте все числа различны; отсюда, очевидно, будет следовать требуемое.

Предположим, что в некоторый транслят попало два одинаковых числа (без ограничения общности – единицы). Пусть они попали на клетки A и B, занумерованные относительно нашего транслята числами i и j. Рассмотрим следующие трансляты паркета: $\mathcal{F}_1$ – транслят, первая клетка которого накрывает клетку A, $\mathcal{F}_2$ – транслят, первая клетка которого накрывает клетку B. Легко видеть, что j-я клетка транслята $\mathcal{F}_1$ и i-я клетка транслята $\mathcal{F}_2$ накрывают одну и ту же клетку пространства, что противоречит тому, что трансляты принадлежат паркету.

1f)$^\sharp$. Честно говоря, авторы, выдавая эту задачу, не вполне осознавали, с какими техническими трудностями сопряжено ее решение (тем приятнее, что на конференции ее решили, хотя и не с максимальной строгостью) …

Обозначим салфетку $\mathcal{F}$. Переформулируем задачу следующим образом. Отметим в салфетке фиксированную точку. Множество отмеченных точек тех салфеток, которые задеты данным гвоздем, образуют транслят салфетки $\overline{\mathcal{F}}$, лежащий отмеченной точкой на гвозде. Поэтому условие (i) можно переформулировать так:

(iii) Как ни отметить несколько точек на плоскости, найдутся такие трансляты салфетки $\overline{\mathcal{F}}$, что каждую отмеченную точку покрывает ровно один транслят.

Понятно, что если существует $\overline{\mathcal{F}}$-паркет (т. е. выполняется (ii)), то выполняется также и (iii). Действительно, если мы перенесем паркет так, что ни одна из отмеченных точек не легла на границу фигурки, то после этого можно выбрать те фигурки, в которых есть отмеченные точки. Множество "запрещенных" переносов для одной точки есть граница фигурок паркета. Понятно (почему?), что несколько таких множеств не могут покрыть плоскость, поэтому так перенести паркет можно.

Идея обратного перехода ((iii)$\Longrightarrow$(ii)) также проста. Отметим "очень плотно" точки на большом куске плоскости. Возьмем трансляты, покрывающие каждую из них по разу; тогда они образуют "почти паркет" на этом куске. Значит, наверное, и паркет найдется. Последующая часть решения посвящена формализации этого рассуждения.

Лемма о компактности. Даны k бесконечных ограниченных последовательностей $(a_n^{(i)})$, $i=1,\ldots,k$. Тогда существует такая последовательность индексов $j_1,j_2,\ldots$, что при каждом i последовательность $a_{j_1}^{(i)},a_{j_2}^{(i)},a_{j_3}^{(i)},\ldots$ сходится.

Доказательство. Индукция по k. Для $k=1$ утверждение хорошо известно. Пусть для последовательностей $(a_n^{(i)})$ $(i=1,\ldots,k-1)$ уже найдена последовательность $p_1,p_2,\ldots$. Рассмотрим (ограниченную!) последовательность (b_n), $b_n=a_{p_n}^{(k)}$ и выберем такую подпоследовательность индексов $q_1,q_2,\ldots$, что (b_{q_r}) сходится. Тогда в качестве последовательности (j_d) можно выбрать последовательность $p_{q_1},p_{q_2},\ldots$.

Выберем единицу измерения так, чтобы салфетка помещалась в квадрат 1×1; пусть площадь салфетки равна S. Пусть расстановка отмеченных точек V_i состоит из всех точек внутри квадрата $2i\times 2i$ с центром в начале координат и координатами вида $\left(\frac{p}{2^i};\frac{q}{2^i}\right)$, где $p,q\in\mathbb{Z}$; W_i – соответствующая этой расстановке раскладка $\overline{\mathcal{F}}$-транслятов. Ясно, что раскладка W_i будет правильной раскладкой для V_ℓ при $\ell<i$ (так как $V_\ell\subset V_i$); поэтому мы можем, если надо, заменить W_ℓ на W_i. Мы будем пользоваться этим в следующей ситуации: если выбрана подпоследовательность W_{i_1}, W_{i_2}, ... $(i_1<i_2<\cdots)$, то все промежуточные W_j можно заменить на соответствующие члены этой последовательности. Будем это делать со всеми W_j при $j\geqslant k$, когда мы выполняем k-й шаг.

На k-м шаге зафиксируем квадрат $2k\times 2k$. Для любого W_i наш квадрат пересекает не больше, чем $4(k+1)^2/S$ транслятов из W_i, т. к. любой такой транслят лежит в квадрате $2(k+1)\times 2(k+1)$. Поэтому можно выбрать такую подпоследовательность, что их количество постоянно (и, согласно предыдущему замечанию, считать, что во всех W_i, начиная с некоторого, это количество постоянно). Пусть $(x_i^{(1)},y_i^{(1)}),\ldots,(x_i^{(d)},y_i^{(d)})$ – координаты отмеченных точек в этих транслятах. Тогда по Лемме можно выбрать подпоследовательность индексов такую, что все последовательности (x_{i_j}), (y_{i_j}) сходятся. Снова заменим все остальные W_j и перейдем к $(k+1)$-му шагу. Заметим, что предельное положение транслятов после k-го шага покрывает все V_k, причем каждая точка из V_k либо покрыта только одним транслятом, либо не лежит *внутри* никакого транслята.

Напомним, что после k шагов процесса первые k членов последовательности перестают изменяться; поэтому мы можем говорить о последовательности раскладок, получившейся в результате процесса. Далее, получившиеся в результате процесса последовательности транслятов, пересекающих квадрат $2k\times 2k$, сходятся (собственно, этого-то мы и добивались, организуя этот процесс); поэтому можно говорить о предельном распределении транслятов по всей плоскости (рассмотрим предельное положение в квадрате 2×2, расширим его до предельного положения в 4×4 etc.).

Покажем (уф!), что это паркет. Действительно, если есть точка, непокрытая ни одним транслятом (скажем, в квадрате $2k\times 2k$), то непокрыт также маленький круг с центром в этой точке; однако в этом круге есть точка какого-то множества V_ℓ (при $\ell>k$), которая покрыта каким-то предельным транслятом. Если же какая-то точка покрыта дважды (внутренностью двух транслятов!), то есть маленький круг, покрытый дважды, чего не может быть по тем же соображениям.

2а). Будем говорить, что номер транслята – это номер его самой левой клетки. Для нулевого транслята сумма равна нулю по определению корня. Сумма для k-го транслята отличается от суммы для нулевого домножением на ε^k, то есть тоже равна нулю.

Покажем, что делать с фигуркой на плоскости. Сначала определим для фигурки на плоскости соответствующий ей многочлен аналогичным образом. Занумеруем клетки плоскости парами целых чисел (координатами соответствующей клетки), и рассмотрим многочлен

$$P_{\mathcal{F}}(x,y) = \sum_{i,j:\ (i,j)\text{-я клетка принадлежит } \mathcal{F}} x^i y^j$$

Поскольку многочлены, отличающиеся друг от друга домножением на моном $x^k y^\ell$, соответствуют транслятам одной и той же фигурки, мы время от времени будем отождествлять такие многочлены.

Рассмотрим любую пару комплексных чисел $x_0 \neq 0$ и $y_0 \neq 0$, что $P_{\mathcal{F}}(x_0,y_0) = 0$ (обратите внимание, это условие сохраняется при домножении $P_{\mathcal{F}}(x_0,y_0) = 0$ на целую степень икса или игрека). Расставим в клетки плоскости числа так: в клетку (i,j) поставим число $x_0^i y_0^j$. По соображениям, аналогичным одномерному случаю, получаем барьерную функцию.

2b). Пусть $\mathcal{F}$ – n-паркетная фигурка. Рассмотрим отрезок длины n, отметим на нем клетки, на которых лежат левые клетки фигурок паркета, и назовем это множество клеток "характером паркета" $\mathcal{G}$. Тогда условие, что данное множество $\mathcal{F}$-транслятов образует паркет, равносильно следующему: для любого $0 \leqslant m \leqslant n-1$ найдутся единственные k,ℓ такие, что k-я и ℓ-я клетки принадлежат соответственно фигуркам $\mathcal{F}$ и $\mathcal{G}$, причем $k+\ell = m$; при остальных же m такой пары не существует. На языке многочленов это утверждение записывается так: $P_{\mathcal{F}}(x)P_{\mathcal{G}}(x) = 1+x+\dots+x^{n-1}$.

Таким образом, мы получили, что многочлен $P_{\mathcal{F}}(x)$ является делителем $1+x+\dots+x^{n-1} = \prod\limits_{d|n,\, d>1} F_d(x)$, все множители неприводимы, и их ровно $d(n)$, откуда и следует требуемое.

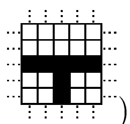
Замечание. Легко видеть, что заодно мы доказали следующее: любая n-паркетная фигурка симметрична (ибо все множители симметричны) и покрытие ею отрезка длины n единственно.

2c). Заметим, что можно определить барьерную функцию (БФ) многочлена. Нам достаточно говорить, что если многочлен соответствует некоторой фигурке (то есть имеет коэффициенты 0 и 1), то барьерную функцию этой фигурки мы также будем называть барьерной функцией этого многочлена. Читателю предоставляется подумать, как определить барьерную функцию для произвольного многочлена.

Отметим, что если некоторая расстановка чисел является БФ для многочлена P, то она является барьерной и для многочлена PQ при произвольном многочлене Q (если, конечно, мы можем говорить о БФ многочлена PQ). В самом деле, при произвольном положении фигурки PQ сумма по ней является линейной комбинацией нескольких сумм для фигурки P, каждая из которых равна нулю.

Итак: $P_{\mathcal{F}} = (1+x+\dots+x^{2k})(1+y+\dots+y^{2k})$ $P_{\mathcal{G}} = (1+x^2+x^4+\dots+x^{4k})(1+y^2+y^4+\dots+y^{4k})$. Замечание, что $P_{\mathcal{G}} = P_{\mathcal{F}}(1-x+x^2-\dots+x^{2k})(1-y+y^2-\dots+y^{2k})$ завершает доказательство.

2d). **Ответ.** При любом n, имеющем вид $n = 2^k - 2$ при $k > 1$.

Покажем сначала, что n подходит тогда и только тогда, когда многочлен "треугольника" $Q_n(x,y) = \sum_{i+j \leqslant n-1} x^i y^j$ делится на многочлен "уголка" $P(x,y) = 1+x+y$ (мы считаем, что коэффициенты многочленов также лежат в $\mathbb{Z}_2$). Если делится, то утверждение верно по соображениям, аналогичным предыдущему решению. Пусть $Q_n(x,y)$ не делится на $P(x,y)$. Легко видеть, что вычитанием многочлена, кратного $P(x,y)$, можно понизить степень $Q(x,y)$ по y. В результате получим, что $Q_n(x,y) = P(x,y)R(x,y) + T(x)$, причем $T(x) \neq 0$. Осталось заметить, что можно найти БФ "уголка", у которой в данной строчке стоят любые наперед заданные числа (на самом деле, БФ "уголка" однозначно задается значениями в следующих клетках: ); легко подобрать эти числа так, что уже эта строчка не будет барьерной для $T(x)$, а, следовательно, вся расстановка не является барьерной для $Q_n(x,y)$.

Выясним теперь, при каких n многочлен Q_n делится на P. Заметим, что при нечетном n он на P не делится (достаточно подставить $x=1$, $y=0$). Пусть n четно. Тогда $Q_n(x,y) =$

$Q_{n/2}(x^2,y^2)P(x,y)+xyQ_{n/2-1}(x^2,y^2)$. Заметим также, что $(a+b)^2=a^2+b^2+2ab=a^2+b^2$ (вычисления идут по модулю 2), поэтому $Q_{n/2-1}(x^2,y^2)=Q_{n/2-1}(x,y)^2$. Поэтому, если n подходит, то и $n/2-1$ подходит; учитывая, что минимальное подходящее n равно 2, легко получить по индукции, что все подходящие n имеют вид, указанный в ответе.

3. Лемма 2. Пусть $\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_n$ – все корни из 1 степени n. Тогда $\varepsilon_1^k+\dots+\varepsilon_n^k=0$ при любом $1\leqslant k\leqslant n-1$.

Доказательство. Можно считать, что $\varepsilon_k=\cos\dfrac{2\pi k}{n}+i\sin\dfrac{2\pi k}{n}=\varepsilon_1^k$; тогда

$$\sum_{i=1}^{n}\varepsilon_i^k=\sum_{i=1}^{n}\varepsilon_k^i=\frac{\varepsilon_k^{n+1}-\varepsilon_k}{\varepsilon_k-1},$$

что равно нулю, т. к. $\varepsilon_k^n=1$, но $\varepsilon_k\neq 1$.

3a). Достаточно показать, что в виде (1) представляются последовательности $(b_k^{(i)})$ вида

$$b_k^{(i)}=\begin{cases}1, & \text{если}\quad k-i\,\vdots\, n,\\ 0, & \text{иначе,}\end{cases}$$

поскольку каждая n-периодичная последовательность есть их линейная комбинация. Требуемое представление имеет вид

$$b_k^{(i)}=\frac{1}{n}\big(\varepsilon_1^{-i}\varepsilon_1^k+\dots+\varepsilon_n^{-i}\varepsilon_n^k\big)$$

согласно Лемме 2.

3b). Пусть (a_k) – наша барьерная функция. Обозначим через $(a_k^{(i)})$ расстановку, полученную из нее сдвигом на i вправо: $a_k^{(i)}=a_{k-i}$; понятно, что она также является барьерной функцией фигурки $\mathcal{F}$. Следовательно, барьерной будет и функция

$$c_k^{(i)}=a_k+a_k^{(1)}\varepsilon_i+a_k^{(2)}\varepsilon_i^2+\dots+a_k^{(n-1)}\varepsilon_i^{n-1},$$

поскольку линейная комбинация барьерных функций также является барьерной. Однако, подставив явный вид последовательности (a_k) из предыдущей задачи, получаем

$$c_k^{(i)}=\sum_{u=0}^{n-1}a_{k-u}\varepsilon_i^u=\sum_{u=0}^{n-1}\sum_{w=1}^{n}\alpha_w\varepsilon_w^{k-u}\varepsilon_i^u=\sum_{w=1}^{n}\alpha_w\varepsilon_w^k\sum_{u=0}^{n-1}\varepsilon_{i-w}^u.$$

Однако при $\varepsilon_j\neq 1$ имеем $\sum_{u=0}^{n-1}\varepsilon_j^u=0$, поскольку ε_j является корнем многочлена $x^n-1=(x-1)(1+\dots+x^{n-1})$; если же $\varepsilon_j=1$, то $\sum_{u=0}^{n-1}\varepsilon_j^u=n$. Поэтому $c_k^{(i)}=n\alpha_i\varepsilon_i^k$ является барьерной функцией, поэтому, если $\alpha_i\neq 0$, то ε_i – корень $P_{\mathcal{F}}$, что и требовалось.

3c). Пусть некоторый паркет имеет период n. Барьерная функция, соответствующая паркету, представляется в виде (1). Поэтому первое утверждение следует из того, что любая корневая функция, участвующая в этом разложении, НОК(n_i)-периодична.

Пусть площадь фигурки равна m. Заметим, что номера всех клеток фигурки дают разные остатки при делении на n, иначе одна клетка будет покрыта двумя фигурками. Рассмотрим все фигурки паркета, левые клетки которых лежат на клетках фиксированного остатка. Каждая такая фигурка покрывает m клеток, имеющих (фиксированные!) различные остатки от деления на n. Тогда эти фигурки покрывают полностью клетки этих остатков, и в каждом отрезке длины n этими фигурками покрыто ровно m клеток. Осталось заметить, что все клетки любого отрезка длины n разбиваются на такие m-ки.

3d). Рассмотрим барьерную функцию, соответствующую нашей трансверсали. Она представляется в виде (1), где ε_i – корни из 1, являющиеся корнями $P_{\mathcal{F}}$. Тогда числа $\overline{\varepsilon}_i=\varepsilon_i^{-1}$ являются, очевидно, как корнями $P_{\mathcal{F}}$, так и корнями $P_{\overline{\mathcal{F}}}$. Поэтому наша функция является барьерной для $\overline{\mathcal{F}}$, т. е. трансверсаль является трансверсалью для $\overline{\mathcal{F}}$, что и требовалось.

4a). Пусть $\mathcal{F}$ – наша p-фигурка. Заметим, что площадь фигурки равна $P_{\mathcal{F}}(1)=p$. Согласно факту **b)**, если у многочлена есть корень в R_{p^k}, то он делится на $F_{p^k}(x)$. Многочлены $F_{p^k}(x)$ при различных k не имеют общих корней и поэтому взаимно просты. Поэтому, если $P_{\mathcal{F}}(x)$ имеет корни в множествах $R_{p^{k_1}}$ и $R_{p^{k_2}}$, то он делится на многочлен $F_{p^{k_1}}(x)F_{p^{k_2}}(x)$, а частное имеет целые коэффициенты согласно факту **a)**. Однако $P_{\mathcal{F}}(1)=p$, а $F_{p^{k_1}}(1)F_{p^{k_2}}(1)=p^2$, поэтому частное должно иметь значение $1/p$ в единице, что противоречит целости его коэффициентов.

4b). Аналогично предыдущему, имеем $P_{\mathcal{F}}(x)=F_{p^k}(x)Q(x)$, где $Q(x)$ – многочлен с целыми коэффициентами. Выделив степени, дающие фиксированный остаток от деления на p^{k-1}, представим многочлен $Q(x)$ в виде

$$Q(x)=Q_0(x^{p^{k-1}})+xQ_1(x^{p^{k-1}})+\dots+x^{p^{k-1}-1}Q_{p^{k-1}-1}(x^{p^{k-1}}).$$

Тогда

$$P_{\mathcal{F}}(x)=\sum_{i=0}^{p^{k-1}-1}P_i(x),\qquad \text{где}\quad P_i(x)=x^iQ_i(x^{p^{k-1}})F_{p^k}(x),$$

причем в разных многочленах $P_i(x)$ степени x, при которых стоят ненулевые коэффициенты, различны; поэтому все коэффициенты многочленов $P_i(x)$ неотрицательны. Кроме того, $P_i(1)$ делится на p, поскольку $F_{p^k}(1)=p$. Отсюда, поскольку $P_{\mathcal{F}}(1)=p$, получаем, что только одно из слагаемых ненулевое. Но свободный член $P_{\mathcal{F}}(x)$ равен единице, поэтому

$$P_{\mathcal{F}}(x)=P_0(x)=Q_0(x^{p^{k-1}})F_{p^k}(x)=Q_0(x^{p^{k-1}})F_p(x^{p^{k-1}})$$

и фигурка сократима в p^{k-1} раз.

4c)*. **Ответ.** $\mathrm{ord}_p n$, т. е. максимальная степень p, на которую делится n.

Из соображений, абсолютно аналогичных решению **4a)**, ясно, что требуемое количество не превышает $\mathrm{ord}_p n$. Пусть паркет имеет период m. Рассмотрим отрезок длины m, отметим на нем клетки, на которых лежат левые клетки фигурок паркета, и назовем это множество клеток “характером паркета” $\mathcal{G}$ (сдвинув паркет и отрезок, можно считать, что нулевая клетка принадлежит $\mathcal{G}$).

Из соображений решения **3c)** вытекает, что, если оставить только фигурки, лежащие на этих клетках, то останется ровно одна клетка каждого остатка от деления на m. На языке многочленов это условие (являющееся критерием паркетности) записывается так: многочлен $P_{\mathcal{F}}(x)P_{\mathcal{G}}(x)\equiv 1+x+\dots+x^{m-1} \pmod{x^m-1}$. Заметим, что это утверждение симметрично относительно $\mathcal{F}$ и $\mathcal{G}$, поэтому можно считать $\mathcal{G}$ паркетной фигуркой, а $\mathcal{F}$ – “характером паркета”. Тогда аналогично получаем, что количество k, для которых $P_{\mathcal{G}}(x)$ делится на F_{p^k}, не превышает $\mathrm{ord}_p\ell$, где $\ell=P_{\mathcal{G}}(1)$ – площадь $\mathcal{G}$ (тогда $n\ell=m$). Однако заметим, что многочлены $1+x+\dots+x^{m-1}$ и x^m-1 делятся на все F_{p^k} при $1\leqslant k\leqslant \mathrm{ord}_p m$, поэтому многочлен $P_{\mathcal{F}}(x)P_{\mathcal{G}}(x)$ должен делиться на $\mathrm{ord}_p m=\mathrm{ord}_p n+\mathrm{ord}_p\ell$ таких многочленов. Следовательно, оба упомянутых неравенства обращаются в равенство, т. е. количество для $P_{\mathcal{F}}(x)$ равно $\mathrm{ord}_p n$, а количество для $P_{\mathcal{G}}(x)$ равно $\mathrm{ord}_p\ell$.

4d). Если все клетки имеют разные остатки, то, очевидно, все переносы на векторы, кратные p, образуют паркет. Докажем обратное.

Из вышедоказанного следует, что многочлен $P_{\mathcal{F}}(x)$ делится на $F_p(x)$. Нам надо доказать, что $P_{\mathcal{F}}(x)\equiv 1+x+\dots+x^{p-1} \pmod{x^p-1}$. Предположим противное. Тогда среди степеней x в $P_{\mathcal{F}}(x)$ нет какого-то остатка i от деления на p. Тогда $x^{p-i-1}P_{\mathcal{F}}(x)\equiv Q(x) \pmod{x^p-1}$, где $\deg Q(x)\leqslant p-2$, $Q(x)\neq 0$ (опять посмотрим на значение в единице!). Однако любой примитивный корень из 1 степени p является общим корнем многочленов $P_{\mathcal{F}}(x)$ и x^p-1, поэтому многочлен $Q(x)$ имеет хотя бы $p-1$ корень. Противоречие.

5a). Пусть ε – примитивный корень из 1 степени n. Тогда $\varepsilon^i+\varepsilon^{i+m}+\dots+\varepsilon^{i+(p-1)m}=\varepsilon^i(1+\varepsilon^m+\dots+\varepsilon^{(p-1)m})$, в скобках стоит сумма всех корней из 1 степени p, равная нулю.

5b). Известно, что НОД любых двух многочленов представляется в виде их линейной комбинации. Легко показать по индукции, что это верно и для НОД конечного числа многочленов. Тогда и любой многочлен, кратный НОД, также представляется в таком виде:

$$P(x)=\sum_{p|n}Q_p(x)(1+x^{n/p}+\dots+x^{(p-1)n/p}).$$

Если мы заменим многочлен $Q_p(x)$ его остатком от деления на $x^{n/p}-1$, то многочлен $P(x)$ заменится его остатком по модулю x^n-1, т. е. не изменится; при этом мы получим требуемое представление для $P(x)$.

Итак, поскольку любой n-корневой многочлен делится на $F_n(x)$, достаточно показать, что НОД всех p-угольных многочленов есть $F_n(x)$.

(Некратными!) корнями p-угольного многочлена $1+x^m+\dots+x^{(p-1)m}=\dfrac{x^n-1}{x^{n/p}-1}$ являются те корни степени n, которые не являются корнями степени n/p. Тогда корни НОД – это в точности корни n-й степени, не являющиеся корнями n/p-й при любом $p\,|\,n$, т. е. как раз все корни $F_n(x)$, что и требовалось.

Для изучения n-корневых многочленов весьма полезен следующий язык.

При исследовании n-корневых многочленов часто бывает достаточно рассматривать не сами многочлены, а их остатки от деления на многочлен x^n-1. Комбинаторно это означает следующее. Многочлены отождествляются со стоящими по кругу n-ками чисел (на i-й позиции стоит сумма всех коэффициентов многочлена при степенях, сравнимых с i по модулю n, $0\le i\le n-1$). При этом многочлену вида $x^i(1+x^{n/p}+x^{2n/p}+\dots+x^{(p-1)n/p})$ для p, делящего n, соответствует набор единиц, стоящих в вершинах правильного p-угольника (что оправдывает название "p-угольный многочлен"). Операции сложения и умножения на таких наборах вводятся естественным образом так, что сумма и произведение двух наборов, соответствующих многочленам P и Q – это наборы, соответствующие многочленам $P+Q$ и PQ (читателю предоставляется доказать, что это возможно). Ниже буквами p и q всегда будут обозначаться какие-то простые делители числа n.

Множество позиций на n-круге вида $i+kd$ при фиксированом i будем называть *d-разрежением* (естественно полагать $d\,|\,n$). Легко понять, что существует ровно d различных d-разрежений. *Следом многочлена* на разрежении будем называть набор его коэффициентов, попавших в данное разрежение. Очевидно, след суммы двух многочленов есть сумма следов этих многочленов; след произведения равен произведению следов, если в разрежении лежит ноль. Поэтому d-разрежение имеет естественную структуру n/d-круга, и далее мы будем иногда отождествлять следы многочлена на d-разрежении n-круга с остатками многочленов от деления на $x^{n/d}-1$, то есть с наборами из n/d коэффициентов, стоящих по кругу.

Из вышесказанного очевидно, что все коэффициенты q-угольника лежат в одном p-разрежении, при $q\ne p$, то есть все следы q-угольного многочлена на p-разрежении являются n-корневыми многочленами. В частности, если через n_0 обозначить произведение всех простых, делящих n, $d=n/n_0$, то понятно, что любой p-угольник лежит целиком в каком-то d-разрежении, то есть след n-корневого многочлена на любом d-разрежении является n-корневым. Таким образом, часто бывает достаточно исследовать n-корневые многочлены для n, свободных от квадратов.

Заметим, что, поскольку $(x^{n/p}-1)(1+x^{n/p}+\dots+x^{(p-1)n/p})\equiv 0 \pmod{x^n-1}$, то верна следующая

Лемма 3 (о повороте n-угольника). Пусть $P(x)$ – n-корневой многочлен, $n=p^id$. Тогда следы многочлена $(x^{n/p}-1)P(x)$ на p^i-разрежениях также являются n-корневыми.

5c). В предыдущем пункте доказано, что любой n-корневой многочлен представляется в виде линейной комбинации p-угольных. Отсюда следует, что если любой n-корневой многочлен домножить на многочлен вида $(1-x^{k_1n/p_1})(1-x^{k_2n/p_2})\cdots(1-x^{k_\ell n/p_\ell})$, то получим нулевой многочлен (здесь $p_1,\dots,p_\ell$ – все простые делители числа n). В самом деле, представим исходный многочлен в виде суммы p-угольников, и разложим ее на "компоненты" – сумму всех p_1-угольников, сумму всех p_2-угольников, и так далее. Сумма всех p_i-угольников становится нулем после домножения на i-ю скобку, а значит она ноль и после домножения на все произведение. Значит, вся сумма после домножения станет равна нулю.

Далее мы будем считать, что n свободно от квадратов (т. е. $n=n_0$). Как известно (см. подобное рассуждение в предыдущем решении), любое число K в этом случае представляется в виде

$$K \equiv k_1 n/p_1 + k_2 n/p_2 + \dots + k_\ell n/p_\ell \pmod n, \qquad 0 \leqslant k_i < p_i, \tag{$*$}$$

причем единственным способом. Назовем коэффициент, в представлении номера(!) которого в виде $(*)$ хотя бы одно из k_i равно нулю, *выделенным*.

Докажем, что n-корневой многочлен, у которого все выделенные коэффициенты нулевые, сам равен нулю. Пусть у него есть хотя бы один ненулевой (невыделенный!) коэффициент a_t, и его номер t представляется в виде $(*)$ при помощи набора $k_1,\dots,k_\ell$. Домножим наш n-корневой многочлен на $(1-x^{-k_1(n/p_1) \pmod n})(1-x^{-k_2(n/p_2) \pmod n})\cdots(1-x^{-k_l(n/p_\ell) \pmod n})$ (получился ноль) и рассмотрим, из чего получился свободный член произведения. Это линейная комбинация некоторых коэффициентов исходного многочлена, причем они все, кроме a_t, выделенные. Поскольку выделенные коэффициенты равны нулю, линейная комбинация равна нулю; однако при a_t в этой линейной комбинации стоит ненулевой коэффициент, откуда получаем $a_t=0$.

Значит, нам достаточно для целочисленного n-корневого многочлена предъявить целочисленную линейную комбинацию p-угольников, вычитание которой из исходного многочлена обнуляет все его выделенные коэффициенты. Будем их обнулять индукцией по числу ненулевых k_j в представлении $(*)$ номера коэффициента.

Вычтя любой p-угольник, покрывающий нулевой коэффициент, обнулим этот коэффициент. Теперь, пусть нам нужно обнулить некоторый выделенный коэффициент, у которого t различных k_j не равны нулю. Рассмотрим любое i, для которого $k_i=0$. Возьмем p_i-угольник, покрывающий обнуляемый коэффициент. Представления в виде $(*)$ номеров остальных коэффициентов, которые покрывает данный p_i-угольник, отличаются от нашего только значениями k_i, поэтому в каждом из них есть $t+1$ различных k_j, не равных нулю; поэтому, если мы обнулим данный коэффициент, используя данный p_i-угольник, мы не испортим ранее обнуленных коэффициентов.

5d). Разложим многочлен $P(x)$ из условия в сумму его следов $x^i P_i(x^p)$ на p-разрежениях. Если каждый из следов является n-корневым, то мы можем считать их n/p-корневыми (на n/p-круге). Поскольку ненулевых коэффициентов у каждого из них не больше, чем у P, доказательство завершает спуск по n. В самом деле, все $P_i(x)$ представляются в виде суммы q-угольников, где $q \le p$ по предположению спуска, а q-угольник в n/p-угольнике соответствует q-угольнику в n-угольнике.

Пусть теперь один из следов не был n-корневым. Тогда следы p-угольников на нем не образовывали n-корневого многочлена (поскольку попавшие в этот P_i q-угольники при $q \neq p$ образуют n-корневые многочлены). Поэтому на всех p-разрежениях p-угольники образуют не n/p-корневой многочлен (поскольку следы p-угольников на p-разрежениях переводятся друг в друга поворотами), а, значит, все следы не равны нулю. Тогда в каждом следе есть ненулевой коэффициент, откуда $p \leqslant k$.

Замечание. Пусть данный n-корневой многочлен можно представить в виде комбинации q-угольников при $q \leqslant p$, и пусть n не делится на простые, превосходящие p. Назовем p-угольник *необходимым* для данного n-корневого многочлена $P(x)$, если след $P(x)$ на некотором pn/n_0-разрежении не n-корневой (напомним, что n_0 – это максимальный бесквадратный делитель n; число $u=pn/n_0$ выбрано так, что в u-разрежении лежат все q-угольники, кроме случая $q=p$). Тогда, если p-угольник не необходим, то можно обойтись q-угольниками при $q<p$. При этом Лемму 3 можно уточнить следующим образом.

Лемма 4 (о присутствии p-угольника). Пусть $P(x)$ – n-корневой многочлен с неотрицательными коэффициентами, $P(1)=p$, и p-угольник необходим для p. Тогда $P(x)$ является p-угольным.

Доказательство. Можно считать, что n бесквадратно, т. к. из предыдущего пункта очевидно, что $P(x)$ лежит в n/n_0-разрежении. Тогда следы p-угольников на p-разрежениях ненулевые и равные с точностью до поворота; поэтому в каждом разрежении сумма коэффициентов следа равна 1, т. е. в каждом разрежении есть ровно одна единица. Умножим многочлен $P(x)$ на $x^{n/p}-1$. По лемме 3, след получившегося многочлена на любом p-разрежении также n-корневой. Обозначим этот след на r-м разрежении через $P_r(x)$.

У любого многочлена $P_r(x)$ будет ровно один коэфициент 1 и один коэффициент -1 (возможно, взаимно уничтожившиеся). Предположим, что они не уничтожились, то есть $P_r(x)$ имеет вид x^a-x^b, где $a\equiv b \pmod p$ (будем для удобства считать $a>b$). Однако многочлен $x^a-x^b=(x^{a-b}-1)x^b$ не может быть n-корневым, так как для примитивного корня n-й степени ε имеем $P_r(\varepsilon)=(\varepsilon^{a-b}-1)\varepsilon^b\neq 0$, ибо $0<a-b<n$. Противоречие.

Итак, все $P_r(x)$ нулевые, то есть в многочлене $P(x)$ вместе с каждой степенью x^k присутствует степень $x^{k+n/p \pmod n}$; тогда в $P(x)$ уже присутствуют члены $1,x^{n/p},\dots,x^{(p-1)n/p}$ (мы считаем свободный член ненулевым). Поскольку $P(1)=p$, то других ненулевых коэффициентов у него нет, и $P(x)$ – p-угольный, что и требовалось.

5e)$^\sharp$. Можно считать, что один из корней равен 1. Пусть n – НОК степеней наших корней, ε – примитивный корень из 1 степени n. Тогда нашу сумму можно записать как n-корневой многочлен с неотрицательными коэффициентами: $P(\varepsilon)=0$, $P(1)=5$; при этом надо доказать, что этот многочлен – либо 5-угольный, либо сумма 2-угольного и 3-угольного. По предыдущему пункту, все p-угольные многочлены при $p>5$ не необходимы.

Если 5-угольник необходим для $P(x)$, то $P(x)$ является 5-угольным по Лемме 4; покажем, что в противном случае $P(x)$ является суммой 2- и 3-угольника. Докажем несколько более сильное утверждение (оно пригодится и позже): *если $P(x)$ имеет целые неотрицательные коэффициенты и представляется в виде комбинации 2- и 3-угольников, то он представляется в таком виде с неотрицательными коэффициентами.* Очевидно, требуемое отсюда следует. Отметим, что все следы на $n/6$-угольниках являются n-корневыми, поэтому достаточно это доказать для следа на одном $n/6$-разрежении, т. е. для многочлена с коэффициентами, лежащими в 6-угольнике.

Заметим, что сумма коэффициентов при произвольном 3-угольнике и произвольном 2-угольнике неотрицательна (ибо есть коэффициент нашего многочлена, на который влияют ровно эти два). Кроме того, мы можем заменить сумму трех различных 2-угольников на сумму двух различных 3-угольников (и наоборот). Заметим, что если мы будем таким образом увеличивать отрицательные коэффициенты, скажем, при 2-угольников, то отрицательных коэффициентов при 3-угольниках появиться не может (2 и 3 в этом предложении можно поменять местами). Тогда через несколько таких замен получится требуемое.

5f)$^\sharp$. Сначала переформулируем нашу задачу в удобных терминах. Отождествим вершины n-угольника с корнями n-й степени из 1 на комплексной окружности $|z|=1$. Тогда условие на вершины наших треугольников (a_1,a_2,a_3), (b_1,b_2,b_3) записывается так: $a_1+a_2+a_3=b_1+b_2+b_3$. Числа $c_i=-b_i$ (треугольник с вершинами c_i центрально симметричен треугольнику из b_i) являются корнями НОК$(2,n)$-й степени, и выполняется условие $\sum a_i+\sum c_i=0$; наоборот, если эти 6 корней дают в сумме 0, то вершины a_i, b_i являются почти искомыми – надо только выяснить, когда b_i являются корнями n-й (а не только $2n$-й) степени из 1. Далее мы временно полагаем, что n четно (т. е. временно заменим n на $2n$ в случае нечетного).

Итак, опишем все шестерки корней с нулевой суммой. Рассуждения идут по той же схеме, что и в предыдущем пункте. Необходимыми могут быть только 2-, 3- и 5-угольные многочлены. Пусть 5-угольные необходимы. Тогда есть (ровно!) 5 (n-)некорневых следов нашего многочлена $P(x)$ на $5n/n_0$-расширениях; в одном из них есть ровно один ненулевой коэффициент. Вычтем 5-угольник, задевающий этот коэффициент; тогда этот след становится корневым. Более того, тогда уже в каждом $5n/n_0$-разрежении после этого вычитания образуется корневой многочлен.

Посмотрим в наши 5 разрежений (т. е. в те, которые задевает вычтенный 5-угольник). Хотя бы в четырех из них было ровно по одной единице. Тогда в них осталось по многочлену вида x^a-x^b, что, как мы видели при доказательстве Леммы 4, означает, что эти следы обнулились. Итого, после остался n-корневой многочлен с двумя коэффициентами 1 (или одним коэффициентом 2) и одним -1. Опять же аналогичные рассуждения показывают, что это правильный 3-угольник минус правильный 2-угольник (одна вершина у них совпадает). Полученную ситуацию мы будем называть $5+3-2$, и это единственный случай, когда необходимы 5-угольники.

Пусть они не необходимы, т. е. достаточно только 2- и 3-угольников. Тогда по утверждению из предыдущего пункта возможных еще только два варианта: два 3-угольника (ситуация $3+3$) и три 2-угольника (ситуация $2+2+2$).

Итак, мы получили три возможных ситуации: $5+3-2$, $3+3$ и $2+2+2$. Осталось выяснить, каким треугольникам соответствуют эти ситуации. Заметим, что одной комбинации могут соответствовать несколько типов троек, т. к. эти 6 корней можно по-разному разбить на тройки!

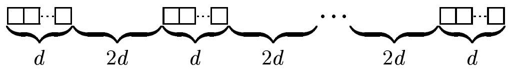
(i) $2+2+2$. Если в один треугольник попали по одному корню из каждой пары, то полученные после симметрии **треугольники совпадают**. Иначе мы получили после симметрии **два прямоугольных треугольника с общей вершиной прямого угла** (для этого n должно быть четным).

(ii) $3+3$. Либо все три вершины одного 3-угольника попали в один треугольник – получились **два правильных треугольника** (для этого нужно $n\,\vdots\,3$); либо в треугольнике две вершины одного и одна другого – получилась первая трудноугадываемая серия: **у каждого треугольника есть сторона, стягивающая на описанной окружности дугу** $4\pi/3$**; при этом третья вершина одного есть середина *этой* (т. е. большей** π**) дуги, и наоборот** (и для этого тоже нужно $n\,\vdots\,3$).

(iii) $5+3-2$. Напомним, что это означает. Вершины правильных 5-угольника и 3-угольника, из которых выкинута пара диаметрально противоположных вершин. Ясно, что наша конфигурация лежит в вершинах правильного 30-угольника; более того, мы увидим, что это возможно лишь при $n\,\vdots\,30$. Занумеруем вершины нашего 3-=угольника в порядке обхода; тогда наша 6-ка вершин имеет номера 6,12,18,24,5,25; выкинуты вершины 0 и 15. Выпишем все возможные ситуации (с точностью до симметрий; в скобках – номера вершин одного треугольника):
1) **(5,6,12)**, **(3,9,10)**; 2) **(5,6,18)**, **(9,10,27)**; 3) **(5,12,24)**, **(3,10,21)**; 4) **(5,18,24)**, **(10,21,27)**; 5) **(5,6,25)**, **(3,9,27)**; 6) **(5,12,25)**, **(3,9,21)**; 7) **(5,6,24)**, **(3,10,27)**.

Замечание. Методами последних двух пунктов можно исследовать и суммы большего числа корней. Правда, будут получаться все более и более длинные переборы; это связано не с неоптимальностью алгоритма, а с действительно растущим количеством случаев.

6a). Пусть $n=dk$, $d,k>1$. Тогда рассмотрим фигурку следующего вида:



где количество блоков по d клеток равно k. По пункту **1a)**, достаточно предъявить две трансверсали этой фигурки, не переводящиеся одна в другую параллельным переносом; такими являются клетки, при делении на $3n$ дающие остатки (i) $0,d,2d$; (ii) $0,2d,4d$.

Замечание. Нетрудно видеть, что в данном случае фигурку можно "сократить" по-другому: полоска режется на блоки по d клеток, каждый из которых либо пустой, либо состоит из клеток фигурки. Несколько сложнее построить фигурку, несократимую еще и в этом смысле. Авторы это умеют, но в целях экономии пространства (и своего времени) здесь не приводят.

6b). Предположим противное: единственными корнями порядка, кратного p, являются корни порядка p (они есть согласно **4c)**). Обозначим барьерную функцию паркета, отличного от стандартного, через (a_k). Напомним, что эта функция принимает только два значения.

Рассмотрим ее разложение (1) в сумму корневых. Пусть (b_k) – сумма всех членов в (1), соответствующих корням, порядки которых не делятся на p, а (c_k) – сумма членов, соответствующих остальным корням, $a_k=b_k+c_k$.

Заметим, что последовательность (c_k) неконстантна, ибо иначе период не кратен p. Из предположения вытекает, что период (c_k) равен p, а период (b_k) взаимно прост с p. Тогда и (b_k)

неконстантна, ибо иначе период паркета равен p; пусть период (b_k) равен d. Т. о., найдутся такие k и ℓ, что $b_k \neq b_0$, $c_\ell \neq c_0$. По китайской теореме об остатках, найдутся такие числа r_{k0}, $r_{0\ell}$, $r_{k\ell}$, что $r_{0\ell} \equiv 0 \pmod d$, $r_{k0} \equiv r_{k\ell} \equiv k \pmod d$, $r_{k0} \equiv 0 \pmod p$, $r_{0\ell} \equiv r_{k\ell} \equiv \ell \pmod p$. Тогда, как легко видеть, среди чисел $a_0 = b_0 + c_0$, $a_{r_{k0}} = b_k + c_0$, $a_{r_{0\ell}} = b_0 + c_\ell$, $a_{r_{k\ell}} = b_k + c_\ell$ хотя бы три различных. Противоречие.

6c). Пусть $P(x)$ – остаток от деления $P_{\mathcal{F}}(x)$ на $x^n - 1$, $P(1) = p$. Многочлен $P(x)$ является n-корневым. Достаточно показать, что $P(x)$ является p-угольным многочленом. Действительно, тогда все степени x в $P(x)$ (а, значит, и в $P_{\mathcal{F}}(x)$) делятся на n/p, что и требовалось. Однако в многочлене $P(x)$ степени x, при которых стоят ненулевые коэффициенты, дают все возможные остатки при делении на p, причем для каждого остатка такой коэффициент ровно один (здесь используется несократимость фигурки в p раз). Поэтому след $P(x)$ уже на p-разрежении не n-корневой, и p-угольник необходим для $P(x)$. Применение Леммы 4 завершает доказательство.

7. Утверждения (ii) и (iii) равносильны согласно решениям **1a)** и **1e)**: любой цвет раскраски является трансверсалью, и по паркету раскраска тривиально строится. Также очевидно, что из (ii) следует (i). Для завершения достаточно доказать (i) $\Longrightarrow$ (iii).

Ясно, что, оперируя многочленами для фигурки $\mathcal{F}$ и "характера паркета" $\mathcal{G}$, мы действуем *по модулю многочленов* $x^p - 1$ *и* $y^p - 1$ (то есть, мы можем заменить $x^n y^m$ на $x^{n \pmod p} y^{m \pmod p}$). Тогда(!), говоря о значениях (в частности, о корнях) многочлена, мы можем говорить *только* о значениях в тех точках, которые являются корнями этих двух многочленов (ибо остальные значения при подобной замене могут измениться). Таким образом, мы говорим только о таких корнях (ε,δ), что $\varepsilon^p = \delta^p = 1$. При этом мы знаем, что $P_{\mathcal{F}}(x,y) P_{\mathcal{G}}(x,y) = k F_p(x) F_p(y)$, ибо каждая клетка покрыта k раз; с другой стороны, очевидно, что $P_{\mathcal{F}}(x,y) F_p(x) F_p(y) = p F_p(x) F_p(y)$. Заметим, что многочлены $p P_{\mathcal{G}}(x,y)$ и $k F_p(x) F_p(y)$ не равны (в первом есть нулевые коэффициенты!); отсюда получаем, что существует ненулевой многочлен $Q(x) = p P_{\mathcal{G}}(x,y) - k F_p(x) F_p(y)$ такой, что $P_{\mathcal{F}}(x,y) Q(x,y) = 0$; при этом степени Q по x и по y не превосходят $p-1$.

Покажем, что у многочлена $P_{\mathcal{F}}$ существует корень (ε,δ) (такой, что $\varepsilon^p = \delta^p = 1$). Из этого будет следовать требуемое: барьерная функция, получающаяся из этого корня, имеет p различных значений; при этом, как указывалось еще в решении **4d)**, сумма p таких чисел равна нулю тогда и только тогда, когда они все различны. Поэтому это и есть требуемая раскраска.

Пусть у многочлена $P_{\mathcal{F}}$ нет корня требуемого вида; тогда они все есть у $Q(x,y)$. Представим $Q(x,y) = Q_0(x) + Q_1(x) y + \dots + Q_{p-1}(x) y^{p-1}$. При подстановке любого ε вместо x получается многочлен от y степени $\leqslant p-1$, имеющий p корней (любое $y = \delta$); поэтому этот многочлен – тождественный ноль, и коэффициенты его (т. е. значения многочленов $Q_i(x)$) – нули. Поэтому каждый из этих многочленов (степень которых $\leqslant p-1$) имеет по p корней и, следовательно, также тождественный ноль. Отсюда $Q(x,y) = 0$ – противоречие.

Если у Вас появились интересные мысли, которые Вы не успели придумать или записать за время Конференции, Вы можете написать авторам по следующим адресам:

iibogdanov@yahoo.com
grisha@chelnokov.mccme.ru