Алгебра паркетов

И.И. Богданов, Г.Р. Челноков

August 8, 2003

Мы рассматриваем бесконечную в обе стороны клетчатую полоску ширины 1 (а в задачах 1 и 2 – также клетчатые плоскость и пространство).

Определение. *Фигурка* есть произвольное конечное множество клеток (не обязательно связное!). *Транслятом фигурки* называется ее образ при параллельном переносе (на целый вектор). *Паркет* – это замощение полоски (плоскости, пространства) транслятами одной фигурки. Если существует паркет из транслятов данной фигурки, то фигурка называется *паркетной.*

Трансверсалью фигурки $\mathcal{F}$ называется такое множество клеток, что в любом трансляте $\mathcal{F}$ содержится ровно одна клетка этого множества. *Барьерной функцией фигурки* $\mathcal{F}$ называется такая расстановка (комплексных) чисел в клетках, что сумма чисел в любом трансляте равна нулю. Расстановка чисел называется ограниченной, если существует такое M, что все числа не превосходят M по модулю.

Пункты повышенной трудности отмечены звездочкой. Пункты, не являющиеся необходимыми для продвижения по главной линии задачи, отмечены знаком $\sharp$.

1. В этом пункте мы рассматриваем паркеты на клетчатом пространстве произвольной размерности.

1a). Фигурка паркетна тогда и только тогда, когда у нее есть трансверсаль; более того, у нее столько же различных паркетов (м.б. бесконечное число!), сколько различных трансверсалей.

1b). Если фигурка паркетна, то у нее есть нетривиальная ограниченная барьерная функция.

1c). Докажите, что на одномерной полоске любой паркет периодичен.

1d). Докажите, что на одномерной полоске любая барьерная функция фигурки, принимающая конечное множество значений, периодична.

Обозначим через $\overline{\mathcal{F}}$ фигурку, полученную из $\mathcal{F}$ центральной симметрией (относительно точки с полуцелыми координатами).

1e)$^\sharp$. Трансверсаль для фигурки $\mathcal{F}$ является также трансверсалью для $\overline{\mathcal{F}}$.

1f)$^\sharp$. (Задача А.Я. Белова с 19 Турнира Городов) Салфетка имеет форму многоугольника. Докажите, что следующие условия равносильны:

(i) Как ни положить несколько транслятов такой салфетки на стол, всегда можно вбить несколько гвоздей так, что каждая салфетка прибита ровно одним гвоздем;

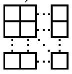
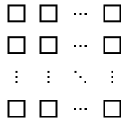
(ii) Из транслятов салфетки можно выложить паркет.

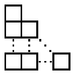
2. Занумеруем клетки полоски целыми числам по порядку так, чтобы самая левая клетка фигурки имела номер 0. Сопоставим фигурке $\mathcal{F}$ многочлен

$$P_{\mathcal{F}}(x) = \sum_{i\colon\, i\text{-я клетка принадлежит } \mathcal{F}} x^i$$

2a). Пусть ε – корень многочлена $P_{\mathcal{F}}$ (заметим, что $\varepsilon \neq 0$). Расставим в клетки числа так: в i-ю клетку поставим ε^i. Докажите, что полученная расстановка является барьерной функцией фигурки $\mathcal{F}$. Такую барьерную функцию мы будем называть *корневой*. Сформулируйте и докажите аналог этого утверждения для клетчатой плоскости.

2b)$^\sharp$. Фигурка называется n-паркетной, если ее непересекающимися транслятами можно покрыть полоску длины n. Докажите, что количество n-паркетных фигурок не больше, чем $2^{d(n)}$ (здесь $d(n)$ – количество натуральных делителей n, меньших n).

2c)$^\sharp$. Рассматривается клетчатая плоскость. Фигурка $\mathcal{F}$  состоит из всех клеток (a,b): $0 \leqslant a,b \leqslant 2k$; фигурка $\mathcal{G}$  состоит из всех клеток $(2a,2b)$: $0 \leqslant a,b \leqslant 2k$. Докажите, что любая барьерная функция для $\mathcal{F}$ является также барьерной функцией для $\mathcal{G}$.

2d)$^\sharp$. Рассмотрим расстановки в клетках плоскости остатков по модулю 2. Найдите все такие n, что любая расстановка, являющаяся барьерной для "уголка" , является также барьерной для "треугольника"  со стороной n.

Далее во всех задачах рассматриваются **только** замощения одномерной полоски.

3. Комплексное число ε называются *корнем n-й степени из единицы*, если $\varepsilon^n = 1$. При этом, если n – наименьшее число такое, что $\varepsilon^n = 1$, то ε называется *примитивным* корнем n-й степени из единицы, а n – степенью этого корня. Множество всех примитивных корней n-й степени из 1 будем обозначать R_n.

3a). Пусть есть последовательность a_k, периодичная с периодом длины n. Докажите, что она представляется в виде

$$a_k = \alpha_1\varepsilon_1^k + \alpha_2\varepsilon_2^k + \ldots + \alpha_n\varepsilon_n^k, \tag{1}$$

где числа ε_i – это все корни n-й степени из единицы, α_i – фиксированные (комплексные) числа.

3b). Докажите, что любая периодичная барьерная функция фигурки $\mathcal{F}$ представляется в виде (1), где ε_i пробегают множество корней из единицы, являющихся корнями многочлена $P_{\mathcal{F}}$.

3c). Пусть n_i – степени корней из единицы, являющихся корнями многочлена фигурки. Тогда период любого паркета делит НОК(n_i) и делится на площадь фигурки.

3d). Как при помощи этой техники доказать пункт **1e)** (для полоски)?

4. (Обобщение задачи С.Л. Берлова с X конференции ТурГора.) Здесь мы хотим найти критерий паркетности фигурки из p клеток (p – простое). Фигурки из p клеток мы в дальнейшем будем называть *p-фигурками*.

Определение. Фигурка называется *несжимаемой*, если попарные расстояния между ее клетками взаимно просты в совокупности (т.е., если нельзя выбрать "разрежение" нашей полоски, в котором фигурка целиком лежит). Понятно, что достаточно исследовать паркетность лишь несжимаемых фигурок.

4a). У многочлена p-фигурки есть корни $\in R_{p^k}$, не более чем для одного k. (Напомним, что R_n – множество всех примитивных корней степени n из 1.)

4b). Если у p-фигурки есть корень $\in R_{p^k}$ при $k > 1$, то она сжимаема.

4c)*. Пусть $\mathcal{F}$ – паркетная фигурка площади n, простое число p делит n. Сколько существует таких k, что у многочлена $\mathcal{F}$ есть корни $\in R_{p^k}$?

4d). Несжимаемая p-фигурка паркетна тогда и только тогда, когда номера всех ее клеток имеют разные остатки от деления на p.

Определение. Линейной комбинацией с рациональными (комплексными, etc.) коэффициентами выражений X_1, …, X_n называется выражение вида $a_1X_1 + \ldots + a_nX_n$, где a_i – рациональные (комплексные, etc.) числа.

5. Здесь мы собираемся исследовать область, на первый взгляд (и только!) не имеющую ничего общего с последующим. Именно, мы будем исследовать многочлены вида $P(x) = a_0 +$

$a_1x+\ldots+a_{n-1}x^{n-1}$ с рациональными коэффициентами такие, что $P(\alpha)=0$, где α – примитивный корень n-й степени из 1. Такие многочлены мы будем называть n-корневыми.

Пусть n делится на простое p, $n=pm$. *p-угольным многочленом* мы будем называть многочлен вида $x^i+x^{i+m}+\cdots+x^{i+(p-1)m}$, $i<m$.

5a). Докажите, что p-угольный многочлен является n-корневым.

5b). Докажите, что любой n-корневой многочлен представляется как линейная комбинация p-угольных (при различных p, делящих n).

5c). Если все коэффициенты исходного многочлена были целыми, то его можно представить как линейную комбинацию p-угольных многочленов с целыми коэффициентами.

5d). Докажите, что если многочлен, у которого лишь k коэффициентов отличны от нуля, является n-корневым, то он представляется в виде комбинации p-угольных при различных $p\leqslant k$.

5e)$^\sharp$. Докажите, что если сумма пяти корней из 1 равна нулю, то это либо вершины правильного 5-угольника, либо вершины правильного 3-угольника и концы диаметра окружности $|z|=1$.

5f)$^\sharp$. (Сформулирован К.А. Кнопом) Дан правильный n-угольник. Опишите все пары треугольников, вершины которых являются вершинами n-угольника, а точки пересечения медиан совпадают.

6. Цель данной серии – доказать, что для несжимаемой паркетной p-фигурки есть не более одного паркета (с точностью до параллельного переноса).

6a). Докажите, что для любого составного n есть несжимаемая фигурка площади n, для которой существует более одного паркета.

6b). Докажите, что если у p-фигурки есть более одного паркета, то у ее многочлена есть корень порядка, делящегося на p и большего p. Обозначим этот порядок n.

6c). Докажите, что в этом случае фигурка сжимаема либо в p раз, либо в n/p раз.

7. (Задача была добавлена на промежуточном финише.) Рассматриваются паркеты на клетчатом квадрате размера $p\times p$, противоположные стороны которого отождествлены (p – простое; такое клеточное множество мы в дальнейшем будем называть *тором* $p\times p$). (Эквивалентная переформулировка: рассматриваются покрытия клетчатой плоскости, самосовмещающиеся как при переносе на p клеток вверх, так и при переносе на p клеток влево.)

Пусть $\mathcal{F}$ – p-фигурка на этом торе. Докажите, что следующие условия равносильны:

(i) на тор можно положить несколько транслятов $\mathcal{F}$ так, что каждая клетка покрыта ровно k транслятами ($k<p$);

(ii) на торе существует $\mathcal{F}$-паркет;

(iii) клетки тора можно так раскрасить в p цветов, что в каждом $\mathcal{F}$-трансляте все цвета различны.

Следующими фактами можно пользоваться без доказательства. А можно и доказать …

Факт. a). Многочлен с целыми коэффициентами единственным образом раскладывается на неразложимые множители с целыми коэффициентами (с точностью до умножения на ±1 и перестановки сомножителей). Многочлен с комплексными коэффициентами имеет единственное представление вида $a(x-x_1)\ldots(x-x_n)$ (с точностью до перестановки сомножителей).

b). Корнями многочлена

$$F_{p^k}(x)=1+x^{p^{k-1}}+x^{2p^{k-1}}+\ldots+x^{(p-1)p^{k-1}}$$

является все элементы R_{p^k} и только они. Этот многочлен неприводим (над $\mathbb{Z}$), поэтому, если у многочлена с целыми коэффициентами есть корень, принадлежащий R_{p^k}, то он делится на F_{p^k}.

c)*. Многочлен $F_n(x)=\prod_{\varepsilon\in R_n}(x-\varepsilon)$ неприводим (над $\mathbb{Z}$).