СРАВНИТЕЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ ТРЕУГОЛЬНИКА И ТЕТРАЭДРА

А.Заславский

Дополнительный результат в задаче 7 части I, полученный участниками конференции.

Участники конференции М.Исаев и В.Филимонов нашли еще одно эквивалентное условие: точка касания вписанной сферы с одной из граней является точкой Торричелли этой грани. Для доказательства достаточности этого условия докажем сначала, что тогда и в остальных гранях точки касания совпадают с точками Торричелли.

Итак, пусть A', B', C', D' — точки касания вписанной сферы с гранями и $\angle AD'B = \angle BD'C = \angle CD'A = \frac{2\pi}{3}$. Так как AD' и AC' — касательные, проведенные к сфере из одной точки, $AD' = AC'$. Аналогично, $BD' = BC'$. Значит треугольники ABD' и ABC' равны и $\angle AC'B = \angle AD'B = \frac{2\pi}{3}$. Так же доказывается, что $\angle AB'C = \angle BA'C = \frac{2\pi}{3}$. Кроме того $\angle AB'D = \angle AC'D$, $\angle BA'D = \angle BC'D$, $\angle CA'D = \angle CB'D$, $\angle AB'D + \angle CB'D = \angle AC'D + \angle BC'D = \angle BA'D + \angle CA'D = \frac{4\pi}{3}$. Из этих соотношений следует, что все эти углы равны.

Теперь, так как D', C' — точки Торричелли соответствующих граней, прямые DC' и CD' являются биссектрисами углов $AC'B$ и $AD'B$ и, значит, пересекают ребро AB в точке X, удовлетворяющей условиям $\frac{AX}{BX} = \frac{AD'}{BD'} = \frac{AC'}{BC'}$. Следовательно, точки C, D, C', D' лежат в плоскости CDX и отрезки CC' и DD' пересекаются. Любые два других отрезка, соединяющие вершины с точками касания также пересекаются, а, поскольку, отрезки не лежат в одной плоскости, точка пересечения одна и та же. Аналогично доказывается необходимость условия.