# СРАВНИТЕЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ ТРЕУГОЛЬНИКА И ТЕТРАЭДРА

**А.Заславский**

## Решения задач части I.

1. Пусть $C'$, $D'$ — центры тяжести граней $ABD$, $ABC$, $P$ — середина $AB$. Так как точки $C'$, $D'$ лежат в плоскости $CDP$, отрезки $CC'$ и $DD'$ пересекаются. При этом из соотношений $CD' : D'P = DC' : C'P = 2 : 1$ следует, что их точка пересечения $M$ удовлетворяет соотношениям $DM : MD' = CM : MC' = 3 : 1$, что равносильно утверждению задачи.

2. Пусть $D'$ — центр окружности, описанной около треугольника $ABC$. Проведем через $D'$ прямую, перпендикулярную плоскости $ABC$. Любая точка этой прямой равноудалена от $A$, $B$ и $C$. Проведем через середину ребра $AD$ плоскость, перпендикулярную этому ребру, и найдем точку ее пересечения с построенной ранее прямой. Очевидно, она равноудалена от всех вершин тетраэдра, т.е. является центром описанной около него сферы. Отметим, что одновременно мы доказали следующий факт: перпендикуляры к плоскостям граней тетраэдра, проходящие через центры описанных около этих граней окружностей, пересекаются в одной точке — центре описанной сферы.

3. а) Построим сначала сферу, касающуюся всех граней тетраэдра (она называется вписанной). Рассмотрим центральный угол $DABC$. Построим биссекторные плоскости его двугранных углов при ребрах $DA$ и $DB$. Все точки первой плоскости равноудалены от плоскостей $DAB$ и $DAC$, все точки второй — от плоскостей $DAB$ и $DBC$, следовательно, все точки их линии пересечения равноудалены от всех трех плоскостей. Построим теперь биссекторную плоскость двугранного угла при ребре $AB$. Точка ее пересечения с построенной ранее прямой равноудалена от всех 4 граней тетраэдра, т.е. является центром вписанной сферы. Аналогично доказывается существование 4 вневписанных сфер, каждая из которых касается одной грани тетраэдра (с внешней стороны) и продолжений трех остальных граней. Кроме того, может существовать сфера, касающаяся продолжений двух граней за их общее ребро и продолжений двух других граней за концы этого ребра. Однако, нетрудно убедиться, что если такая сфера существует, например, для ребра $CD$, то ее радиус равен $\frac{3V}{S_{ABC}+S_{ABD}-S_{ACD}-S_{BCD}}$. Таким образом, при $S_{ABC} + S_{ABD} > S_{ACD} + S_{BCD}$ существует сфера, касающаяся продолжений двух граней за ребро $CD$, при $S_{ABC}+S_{ABD} < S_{ACD}+S_{BCD}$ — сфера, касающаяся продолжений двух граней за ребро $AB$, а при $S_{ABC}+S_{ABD} = S_{ACD}+S_{BCD}$ — ни одна из этих сфер. Следовательно, общее число сфер, касающихся плоскостей всех граней тетраэдра, может быть от 5 до 8.

б) Пусть сфера касается всех ребер тетраэдра. Тогда, так как касательные, проведенные к сфере из одной точки, равны, получаем $AB + CD = AC + BD = AD + BC$. Это условие является и достаточным, а удовлетворяющие ему тетраэдры называются *каркасными*. Известен еще ряд условий, эквивалентных каркасности, например, окружности, вписанные в любые две грани тетраэдра, касаются друг друга, или суммы двугранных углов при противоположных ребрах равны. Аналогично доказывается, что сфера, касающаяся трех ребер одной грани и продолжений трех других ребер, существует тогда и только тогда, когда разности противоположных ребер равны.

4. Пусть высоты $CC'$ и $DD'$ пересекаются. Тогда они лежат в одной плоскости, пересекающей ребро $AB$ в точке $P$. Прямая $CP$ является проекцией прямой $CC'$ на плоскость $ABC$, следовательно, по теореме о трех перпендикулярах она перпендикулярна $AB$. Так как кроме того $AB$ перпендикулярна $DD'$, она перпендикулярна плоскости $CPD$, а значит, и $CD$. Таким образом, если все высоты тетраэдра пересекаются, его противоположные ребра перпендикулярны. Это условие является и достаточным, а тетраэдры, удовлетворяющие ему, называются *ортоцентрическим.* Существуют и другие условия, эквивалентные ортоцентричности, например, суммы квадратов противоположных ребер равны или основание одной из высот является ортоцентром соответствующей грани.

5. Пусть $S_0, S_1, S_2, S_3$ — площади граней, $\alpha_{ij}$ — двугранные углы между соответствующими гранями. Так как площадь грани равна сумме площадей проекций на нее остальных граней, получаем систему уравнений.

$$\left\{\begin{array}{lcl} S_0 & = & S_1\cos\alpha_{01} + S_2\cos\alpha_{02} + S_3\cos\alpha_{03} \\ S_1 & = & S_0\cos\alpha_{01} + S_2\cos\alpha_{12} + S_3\cos\alpha_{13} \\ S_2 & = & S_0\cos\alpha_{02} + S_1\cos\alpha_{12} + S_3\cos\alpha_{23} \\ S_3 & = & S_0\cos\alpha_{03} + S_1\cos\alpha_{13} + S_2\cos\alpha_{23} \end{array}\right.$$

Умножив первое уравнение на $S_0$, второе на $S_1$, третье на $S_2$, четвертое на $S_3$, и вычтя первое уравнение из суммы остальных, получим утверждение задачи.

6. Докажем сначала **теорему синусов для трехгранного угла**: синусы двугранных углов относятся, как синусы противолежащих плоских. Для этого опустим из точки $C$ на ребре трехгранного угла $OABC$ перпендикуляр $CH$ на плоскость $OAB$ и заметим, что $CH = OC\sin AOC\sin\alpha = OC\sin BOC\sin\beta$, где $\alpha, \beta$ — двугранные углы при ребрах $OA, OB$. Теперь, пользуясь этой теоремой и теоремой синусов для треугольника, получаем

$$\frac{AB\cdot CD}{AC\cdot BD} = \frac{\sin ACB\sin DBC}{\sin ABC\sin BCD} = \frac{\sin AB\sin CD}{\sin AC\sin BD},$$

где $\sin AB$ означает синус двугранного угла при ребре $AB$.

Прежде, чем изложить решения следующих задач, докажем важную лемму.

**Лемма**. Пусть $C'$, $D'$ — точки граней $ABD$ и $ABC$. Отрезки $CC'$ и $DD'$ пересекаются тогда и только тогда, когда

$$\frac{S_{AD'C}}{S_{BD'C}} = \frac{S_{AC'D}}{S_{BC'D}}.$$

**Доказательство**. Так как отрезки $CC'$ и $DD'$ пересекаются, точки $C$, $D$, $C'$, $D'$ лежат в одной плоскости, пересекающей ребро $AB$ в точке $P$. При этом

$$\frac{AP}{BP} = \frac{S_{ACP}}{S_{BCP}} = \frac{S_{AD'P}}{S_{BD'P}} = \frac{S_{AD'C}}{S_{BD'C}},$$

что и доказывает лемму.

Напомним, что числа $\alpha = \frac{S_{BCD'}}{S_{ABC}}$, $\beta = \frac{S_{ACD'}}{S_{ABC}}$, $\gamma = \frac{S_{ABD'}}{S_{ABC}}$ называются *барицентрическими координатами* точки $D'$ относительно треугольника $ABC$.

7. Пусть $D'$ — точка касания вписанной сферы с гранью $ABC$, $X$, $Y$ — основания перпендикуляров, опущенных из $D'$ на $AC$ и $BC$, $r$ — радиус сферы. Тогда $D'X = r/\tan\frac{AC}{2}$, $D'Y = r/\tan\frac{BC}{2}$. Написав аналогичные соотношения для грани $ABD$ и применив лемму и теорему синусов, получим, что отрезки $CC'$ и $DD'$ пересекаются тогда и только тогда, когда $\cos\frac{AC}{2}\cos\frac{BD}{2} = \cos\frac{AD}{2}\cos\frac{BC}{2}$. Следовательно, все четыре отрезка пересекаются тогда и только тогда, когда произведения косинусов половин противоположных двугранных углов равны.

8. Аналогично предыдущей задаче получаем, что отрезки пересекаются в одной точке тогда и только тогда, когда произведения синусов половин противоположных двугранных углов равны.

9. Пусть $M_1$, $O_1$, $H_1$ — центр тяжести, центр описанной окружности и ортоцентр треугольника $ABC$. Эти точки лежат на прямой Эйлера треугольника $ABC$, а так как тетраэдр ортоцентрический, плоскость проходящая через эту прямую и перпендикулярная $ABC$, проходит через $D$. Следовательно, центр тяжести $M$, ортоцентр $H$ и центр описанной сферы $O$ тетраэдра лежат в этой плоскости. Аналогично они лежат в такой же плоскости, построенной для любой другой грани, а значит и на линии их пересечения. При этом нетрудно доказать, что $M$ — середина отрезка $OH$.

10. Утверждение сразу следует из леммы и того факта, что произведения барицентрических координат изотомически сопряженных точек равны.