СРАВНИТЕЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ ТРЕУГОЛЬНИКА И ТЕТРАЭДРА

А.Заславский

Общая постановка практически всех приведенных ниже задач: рассматривается некоторое свойство треугольника. Верен ли пространственный аналог этого свойства для произвольного тетраэда, и, если нет, то как описать класс тетраэдров, для которых он выполняется. Разумеется, приводимый список задач может быть расширен.

Часть I.

Хотя задачи этой части, в основном, известны, имеет смысл решить их "для разминки".

1. Медианы треугольника пересекаются в одной точке и делят друг друга в отношении 2:1. — Отрезки, соединяющие вершины тетраэдра с центрами тяжести противоположных граней пересекаются в одной точке и делят друг друга в отношении 3:1.

2. Вокруг любого треугольника можно описать окружность. — Около любого тетраэдра можно описать сферу.

3. Для любого треугольника существует окружность, касающаяся всех его сторон, и 3 окружности, касающиеся одной стороны и продолжений двух других.

а) Сколько существует сфер, касающихся некоторых граней тетраэдра и продолжений остальных граней?

б) Существует ли сфера, касающаяся всех ребер тетраэдра или части ребер и продолжений остальных ребер?

4. Высоты треугольника пересекаются в одной точке. При каких условиях высоты тетраэдра пересекаются в одной точке?

5. Доказать **теорему косинусов для тетраэдра**: квадрат площади основания равен сумме квадратов площадей боковых граней минус сумма удвоенных произведений боковых граней на косинусы двугранных углов между ними

6. Доказать **теорему синусов для тетраэдра**: произведения противоположных ребер относятся, как произведения синусов двугранных углов при этих ребрах.

7. Отрезки, соединяющие вершины треугольника и точки касания противоположных сторон с вписанной окружностью, пересекаются в одной точке (точка Жергонна). Для каких тетраэдров отрезки, соединяющие их вершины и точки касания противоположных граней с вписанной сферой, пересекаются в одной точке?

8. Отрезки, соединяющие вершины треугольника и точки касания противоположных граней с вневписанными окружностями, пересекаются в одной точке (точка Нагеля). Для каких тетраэдров отрезки, соединяющие вершины и точки касания противоположных граней с вневписанными сферами, пересекаются в одной точке?

9. В треугольнике центр тяжести, ортоцентр и центр описанной окружности лежат на одной прямой (прямая Эйлера), причем центр тяжести делит отрезок между ортоцентром и центром описанной окружности в отношении 2:1. Верно ли аналогичное утверждение для ортоцентричных тетраэдров?

10. Пусть дан треугольник ABC и точка P. Прямые AP, BP, CP пересекают противоположные стороны треугольника в точках A', B', C'. Тогда прямые соединяющие вершины треугольника с точками, симметричными A', B', C' относительно середин соответствующих сторон, пересекаются в одной точке (изотомическое сопряжение). Сформулировать аналогичное утверждение для тетраэдра.