СРАВНИТЕЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ ТРЕУГОЛЬНИКА И ТЕТРАЭДРА

А.Заславский

II. Основные задачи

11. Пусть дан треугольник ABC и точка P. Прямые, симметричные AP, BP, CP относительно биссектрис соответствующих углов, пересекаются в одной точке (изогональное сопряжение).

а) Сформулировать аналогичное утверждение для тетраэдра.

б) Пусть A', B', C', D' — основания перпендикуляров, опущенных из точки P на грани BCD, DCA, DAB, ABC. Доказать, что перпендикуляры, опущенные из точек A, B, C, D на соответствующие грани тетраэдра $A'B'C'D'$, пересекаются в одной точке.

12. Точки касания стороны треугольника с вписанной и вневписанной окружностью симметричны относительно середины стороны.

а) Доказать, что точки касания грани тетраэдра с вписанной и вневписанной сферой изогонально сопряжены.

б) Какая точка изогонально сопряжена точке касания вневписанной сферы, касающейся основания, и боковой грани?

в) Доказать, что точка касания вневписанной сферы, касающейся основания, и боковой грани лежит на описанной окружности этой грани тогда и только тогда, когда сумма площадей этой грани и основания равна сумме площадей двух остальных граней.

13. Центр тяжести треугольника изогонально сопряжен точке, сумма квадратов растояний от которой до сторон треугольника минимальна (точка Лемуана). Верно ли аналогичное утверждение для тетраэдра?

14. Для каких классов тетраэдров пересекаются в одной точке отрезки, соединяющие вершины с

а) ортоцентрами противоположных граней; б) точками Жергонна; в) точками Нагеля;

г) центрами вписанных окружностей; д) точками Лемуана;

15. В пп.а-д) предыдущей задачи доказать, что, если два из указанных отрезков пересекаются, то два другие тоже пересекаются.

16. Доказать утверждение предыдущей задачи для отрезков, соединяющих вершины и точки касания противоположных граней с вписанной и вневписанными сферами.

III. Дополнительные задачи

В этой части приведены задачи, решение которых пока не получено.

17. В треугольнике центр тяжести, центр вписанной окружности и точка Нагеля лежат на одной прямой. Существует ли аналог этого утверждения для каких-либо классов тетраэдров?

18. В треугольнике ортоцентр и центр описанной окружности изогонально сопряжены. Верно ли аналогичное утверждение для ортоцентрического тетраэдра?

19. В треугольнике точки Жергонна и Нагеля изогонально сопряжены центрам гомотетии вписанной и описанной окружностей. Верно ли аналогичное утверждение для каких-либо классов тетраэдров?

20. Точка Жергонна треугольника является точкой Лемуана треугольника, образованного точками касания его сторон с вписанной окружностью. Верно ли аналогичное утверждение для какого-либо класса тетраэдров?

21. Прямая, соединяющая центры описанной и вписанной окружностей треугольника, проходит через центр тяжести треугольника, образованного точками касания его сторон с вписанной окружностью. Верно ли аналогичное утверждение для тетраэдра?

22. Ответить на вопрос задачи 14 для

а) центров описанных окружностей;

б) точек Торричелли (точкой Торричелли треугольника ABC называется точка пересечения прямых AA', BB', CC', где A', B', C' — вершины правильных треугольников ABC', BCA', CAB', расположенных вне ABC);

в) точек Аполлония, изогонально сопряженных точкам Торричелли (точки Аполлония характеризуются также тем, что основания перпендикуляров, опущенных из них на стороны треугольника, образуют правильный треугольник, а расстояния до вершин треугольника обратно пропорциональны его соответствующим сторонам).

23. Верно ли для каких-нибудь точек предыдущей задачи утверждение задачи 15?

24. Как и для каких тетраэдров можно определить точки, аналогичные точкам Торричелли и Аполлония?