# СРАВНИТЕЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ ТРЕУГОЛЬНИКА И ТЕТРАЭДРА

А.Заславский

Решения задач части II и части III.

## II. Основные задачи

11.

а) Прежде всего отметим следующий факт. Пусть дан трехгранный угол $OABC$ и луч $OP$. Построим плоскость, симметричную плоскости $OCP$ относительно биссекторной плоскости двугранного угла при ребре $OC$, и две аналогичные плоскости при ребрах $OA$ и $OB$. Тогда три построенные плоскости пересекутся по прямой $OP'$. Доказательство легко получить с помощью теоремы синусов для трехгранного угла. Прямую $OP'$ назовем сопряженной прямой $OP$ относительно трехгранного угла $OABC$.

Теперь докажем следующее утверждение. Прямые, сопряженные $AP$, $BP$, $CP$, $DP$ относительно соответствующих трехгранных углов пересекаются в одной точке. Действительно, если расстояния от $P$ до плоскостей $BCD$, $CDA$, $DAB$, $ABC$ относятся, как $a:b:c:d$, то каждая из сопряженных прямых проходит через точку $P'$, расстояния от которой до тех же плоскостей относятся, как $\frac{1}{a}:\frac{1}{b}:\frac{1}{c}:\frac{1}{d}$. Точку $P'$ будем называть *изогонально сопряженной* $P$.

б) Пусть плоскость, проходящая через $A', B', C'$ отсекает от тетраэдра $ABCD$ тетраэдр $DUVW$. Тогда расстояния от $P$ до граней $ABD$, $ACD$, $BCD$ обратно пропорциональны косинусам двугранных углов при основании тетраэдра $PUVW$, а расстояния от любой точки перпендикуляра, опущенного из $D$ на плоскость $A'B'C'$, прямо пропорциональны этим косинусам. Следовательно, все четыре перпендикуляра проходят через точку $P'$, изогонально сопряженную $P$.

12.

а) При решении задач 7, 8 было показано, что что расстояния от точки касания вписанной сферы до сторон грани относятся, как котангенсы половин двугранных углов при ребрах этой грани, а от точки касания вневписанной сферы, касающейся этой грани и продолжений остальных граней, как тангенсы половин этих углов. Следовательно, эти точки изогонально сопряжены.

б) Аналогично п.а) получаем, что точка касания грани $ABC$ с сферой, касающейся грани $ABD$ и продолжений остальных граней, изогонально сопряжена точке касания $ABC$ с сферой, касающейся либо продолжений граней $ABC$ и $ABD$ за ребро $AB$, либо продолжений граней $ACD$ и $BCD$ за ребро $CD$ (в зависимости от того, какая из этих сфер существует).

в) Утверждение сразу следует из п. б) и того факта, что точки описанной окружности треугольника не имеют изогонально сопряженных (соответствующие прямые параллельны).

13. Так как расстояния от центра тяжести до граней тетраэдра обратно пропорциональны площадям этих граней, расстояния от изогонально сопряженной точки до граней прямо пропорциональны их площадям. Докажем, что эта точка минимизирует сумму квадратов. Пусть $S_a, S_b, S_c, S_d$ — площади граней, $a, b, c, d$ — расстояния от некоторой точки до эих граней, $V$ — объем тетраэдра. Тогда $aS_a + bS_b + cS_c + dS_d = 3V$, следовательно

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = a^2 + b^2 + c^2 + \left(\frac{3V - aS_a - bS_b - cS_c}{S_d}\right)^2$$

Рассматривая это выражение как квадратный трехчлен относительно $c$, получаем, что его минимум достигается при $c = \frac{-aS_aS_c - bS_bS_c + 3VS_c}{S_c^2 + S_d^2}$, что равносильно

$$\frac{c}{S_c} = \frac{3V - aS_a - bS_b - cS_c}{S_d^2} = \frac{d}{S_d}.$$

Выписав аналогичные условия минимума по $a$ и $b$, получим $a:b:c:d = S_a : S_b : S_c : S_d$, что и требовалось доказать.

14.

а) Из решения задачи 4 следует, что искомый тетраэдр ортоцентрический.

б) Барицентрические координаты точки Жергонна обратно пропорциональны $p-a$, $p-b$, $p-c$, где $a, b, c$ — стороны треугольника, $p$ — его полупериметр. Применив лемму, убеждаемся, что искомый тетраэдр каркасный.

в) Барицентрические координаты точки Нагеля пропорциональны $p-a$, $p-b$, $p-c$. По лемме искомый тетраэдр каркасный.

г) Барицентрические координаты центра вписанной окружности пропорциональны $a$, $b$, $c$. Применив лемму получаем, что в искомом тетраэдре произведения противоположных ребер равны. Такой тетраэдр называется *инцентрическим.*

д) Барицентрические координаты точки Лемуана пропорциональны $a^2$, $b^2$, $c^2$. По лемме искомый тетраэдр инцентрический.

15–16. Применяя лемму, убеждаемся, что во всех случаях условия пересечения для отрезков из точек $A$ и $B$ совпадают с условиями пересечения для отрезков из точек $C$ и $D$.

## III. Дополнительные задачи (некоторые соображения)

18. Утверждение неверно (воспользуйтесь задачей 11б).

24. Если все углы треугольника меньше $\frac{2\pi}{3}$, то точка Торричелли минимизирует сумму расстояний до его вершин, при этом все стороны треугольника видны из нее под углом $\frac{2\pi}{3}$. Аналогично можно доказать, что если внутри тетраэдра существует точка $T$, из которой противоположные ребра видны под равными углами, то она минимизирует сумму расстояния до вершин тетраэдра. При этом точка $T'$, изогонально сопряженная $T$, характеризуется тем свойством, что ее проекции на грани образуют равногранный тетраэдр (тетраэдр называется *равногранным*, если все его грани равные треугольники. Есть много условий, равносильных равногранности, например, противоположные ребра равны, или противоположные двугранные углы равны, или совпадают две из трех точек: центр тяжести, центр вписанной сферы, центр описанной сферы). Есть гипотеза, что условие существования точки $T$ следующее: сумма двугранных углов при любой вершине тетраэдра меньше $2\pi$ (равносильное условие: сумма косинусов плоских углов при любой вершине больше $-1$).

*Дополнительный результат в задаче 7 части I, полученный участниками конференции.*

Участники конференции М.Исаев и В.Филимонов нашли еще одно эквивалентное условие: точка касания вписанной сферы с одной из граней является точкой Торричелли этой грани. Для доказательства достаточности этого условия докажем сначала, что тогда и в остальных гранях точки касания совпадают с точками Торричелли.

Итак, пусть $A'$, $B'$, $C'$, $D'$ — точки касания вписанной сферы с гранями и $\angle AD'B = \angle BD'C = \angle CD'A = \frac{2\pi}{3}$. Так как $AD'$ и $AC'$ — касательные, проведенные к сфере из одной точки, $AD' = AC'$. Аналогично, $BD' = BC'$. Значит треугольники $ABD'$ и $ABC'$ равны и $\angle AC'B = \angle AD'B = \frac{2\pi}{3}$. Так же доказывается, что $\angle AB'C = \angle BA'C = \frac{2\pi}{3}$. Кроме того $\angle AB'D = \angle AC'D$, $\angle BA'D = \angle BC'D$, $\angle CA'D = \angle CB'D$, $\angle AB'D + \angle CB'D = \angle AC'D + \angle BC'D = \angle BA'D + \angle CA'D = \frac{4\pi}{3}$. Из этих соотношений следует, что все эти углы равны.

Теперь, так как $D'$, $C'$ — точки Торричелли соответствующих граней, прямые $DC'$ и $CD'$ являются биссектрисами углов $AC'B$ и $AD'B$ и, значит, пересекают ребро $AB$ в точке $X$, удовлетворяющей условиям $\frac{AX}{BX} = \frac{AD'}{BD'} = \frac{AC'}{BC'}$. Следовательно, точки $C$, $D$, $C'$, $D'$ лежат в плоскости $CDX$ и отрезки $CC'$ и $DD'$ пересекаются. Любые два других отрезка, соединяющие вершины с точками касания также пересекаются, а, поскольку, отрезки не лежат в одной плоскости, точка пересечения одна и та же. Аналогично доказывается необходимость условия.