Триангуляции

К. Кохась, Д. Ростовский

Условия задач

В этой серии задач мы предполагаем, что все рассматриваемые множества точек плоскости (например, вершины рассматриваемых многоугольников) находятся в общем положении.

1 *Триангуляции многоугольников*

1.1. Докажите, что произвольный многоугольник можно разбить на треугольники непересекающимися (во внутренних точках) диагоналями.

В комбинаторике очень популярна последовательность чисел Каталана c_n $(n \geqslant 0)$, которая однозначно определяются рекуррентным соотношением

$$c_{n+1} = c_0c_n + c_1c_{n-1} + \ldots + c_nc_0 \quad (n \geqslant 0)$$

и "начальным условием" $c_0 = 1$. Известна и явная формула для чисел Каталана: $c_n = \frac{1}{n+1}C_{2n}^n$.

Нетрудно проверить, что выпуклый n-угольник можно разбить на треугольники c_{n-2} способами.

Другая широко известная интерпретация чисел c_n — количество плоских корневых строго двоичных деревьев (у каждой вершины либо два сына, либо ни одного [и тогда это по определению лист]) с $n+1$ листьями (см. рис. 1).

1.2. Дайте биективное доказательство того, что количество плоских корневых строго двоичных деревьев с $n+1$ листьями равно c_n.

1.3. Сколькими способами можно разбить выпуклый n-угольник на треугольники так, чтобы хотя бы одна сторона каждого треугольника была внешней стороной n-угольника?

Триангуляцией многоугольника будем называть разбиение его на треугольники непересекающимися диагоналями или сам набор этих диагоналей. Пусть $n > 3$ — произвольное натуральное число. Будем говорить, что триангуляции T_1 и T_2 n-угольников P_1 и P_2 *совместны*, если можно так пронумеровать вершины этих n-угольников числами от 1 до n вдоль обхода контура, что для каждой диагонали первого многоугольника, принадлежащей триангуляции T_1, триангуляция T_2 содержит диагональ многоугольника P_2 с теми же номерами вершин.

Очевидно, не у каждых двух n-угольников существует совместная триангуляция (см. рис. 2)

Пусть внутри n-угольника отмечено несколько точек. Разбиение такого n-угольника на треугольники непересекающимися (во внутренних точках) отрезками, концы которых — это вершины n-угольника или отмеченные точки, будем называть *триангуляцией с дополнительными вершинами.* Дополнительные вершины называют также *точками Штейнера.*

Будем говорить, что n-угольники P_1 и P_2 допускают *совместную триангуляцию с k дополнительными вершинами*, если можно отметить в каждом из n-угольников по k точек, пронумеровать вершины этих n-угольников (вдоль обхода контура) числами от 1 до n, а добавленные точки — числами от $n+1$ до $n+k$ и триангулировать эти многоугольники так, что для каждого отрезка из триангуляции многоугольника P_1, найдется отрезок с такими же номерами вершин из триангуляции многоугольника P_2.

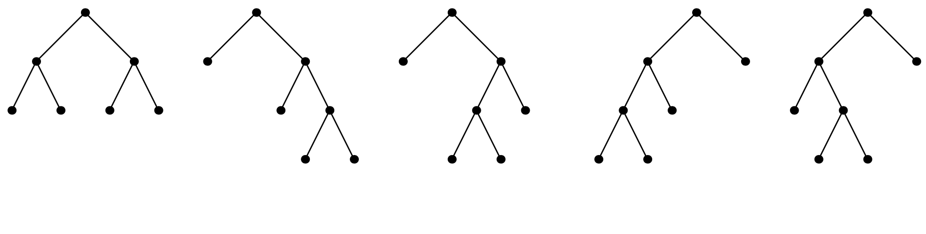

Рис. 1: $c_3 = 5$

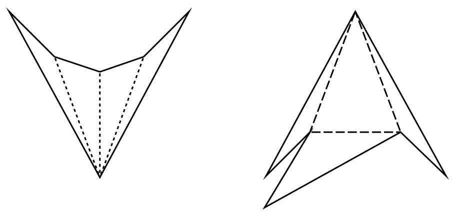

Рис. 2: Два многоугольника, не имеющих совместных триангуляций

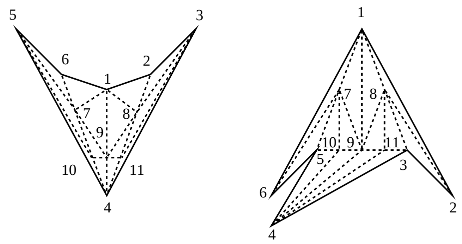

Рис. 3: Пример совместных триангуляций

1.4. Каждая триангуляция выпуклого многоугольника обязательно содержит диагональ, отрезающую от этого многоугольника треугольник. Такой треугольник (или отрезанную вершину) будем называть *ухом* триангуляции.

а) Докажите, что любая триангуляция (не обязательно выпуклого) многоугольника имеет не менее двух ушей.

б) Докажите, что количество триангуляций выпуклого n-угольника, имеющих ровно k ушей, равно

$$\frac{n}{k}2^{n-2k}C_{n-4}^{2k-4}c_{k-2}\,.$$

в) Докажите, что в среднем около четверти вершин многоугольника являются ушами триангуляции. Иными словами "средняя" триангуляция содержит около $n/4$ ушей.

1.5. Рассмотрим триангуляцию правильного n-угольника ($n \geqslant 5$) (возможно, с дополнительными вершинами), в которой все треугольники

а) остроугольные,

б) тупоугольные.

Какое наименьшее количество треугольников может быть в этой триангуляции?

1.6. Докажите, что все триангуляции выпуклого n-угольника с k дополнительными вершинами содержат поровну треугольников и поровну ребер.

1.7. Докажите, что для любых двух n-угольников существует совместная триангуляция с несколькими дополнительными вершинами (их количество зависит от многоугольников).

Оказывается, существует универсальная триангуляция с дополнительными вершинами.

1.8. а) Докажите, что для каждого $n > 3$ существует такое k, что каждый n-угольник можно так триангулировать с k дополнительными вершинами, что все полученные таким образом триангуляции будут попарно совместны.

б) Докажите, что существует универсальная триангуляция в более сильном смысле: для каждого n существует такое k, что любую триангуляцию любого n-угольника можно подразбить, добавив k дополнительных вершин так, что все полученные таким способом триангуляции окажутся попарно совместны.

1.9. Пусть $\kappa = \kappa(n)$ — наименьшее возможное значение параметра k, для которого можно триангулировать все n-угольники с k дополнительными вершинами так, что все полученные триангуляции окажутся попарно совместными. Докажите, что существуют такие константы c_1, c_2, $c_3 > 0$, что

а) $\kappa \leqslant c_1 n^2$.

б) $c_2 n^2 \leqslant \kappa$, в предположении, что у каждого многоугольника зафиксирован некоторый порядок вершин.

в) $c_3 n^2 \leqslant \kappa$, в предположении, что порядок вершин не фиксирован.

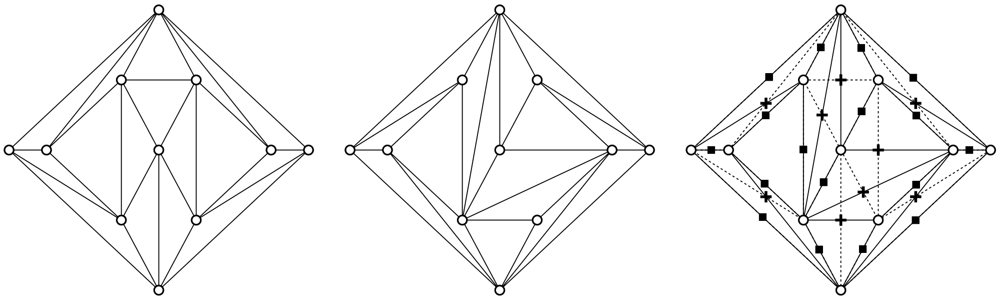

Рис. 4: К задаче 2.5.а: совпадающие соответственные ребра помечены квадратиком, пересекающиеся — крестиком.

2 *Триангуляции произвольных множеств*

Напомним, что мы рассматриваем множества точек плоскости общего положения.

Триангуляцией произвольного множества точек будем называть разбиение на треугольники выпуклой оболочки этих точек отрезками, с вершинами в этих точках.

Будем говорить, что два множества S_1 и S_2 из n точек каждое допускают *совместную триангуляцию*, если можно пронумеровать точки этих множеств числами от 1 до n и триангулировать эти множества так, что для каждого (элементарного) треугольника из триангуляции множества S_1, найдется (элементарный же) треугольник с такими же номерами вершин в триангуляции множества S_2. В частности, выпуклые оболочки множеств S_1 и S_2 имеют поровну вершин и занумерованы одинаково.

2.1. Докажите, что триангуляция n-точечного множества содержит не более $3n-6$ ребер (включая отрезки границы выпуклой оболочки).

2.2. Пусть в множествах S_1 и S_2 поровну точек и их выпуклые оболочки имеют поровну вершин. Допустим, что выпуклая оболочка множества S_1 содержит такую вершину P, что все точки множества $S_1 \setminus P$ находятся в выпуклом положении. Докажите, что множества S_1 и S_2 допускают совместную триангуляцию.

2.3. Пусть в множествах S_1 и S_2 поровну точек и их выпуклые оболочки имеют поровну вершин. Допустим, что внутри выпуклой оболочки каждого множества содержится не более

а) одной;

б) двух;

в) трех

точек. Докажите, что множества S_1 и S_2 допускают совместную триангуляцию.

2.4. *Открытая проблема.* Пусть в множествах S_1 и S_2 общего положения поровну точек и их выпуклые оболочки имеют поровну вершин. Верно ли, что множества S_1 и S_2 допускают совместную триангуляцию?

2.5. Пусть T_1 и T_2 — две триангуляции множества S.

а) Докажите, что существует взаимно однозначное соответствие между ребрами триангуляций T_1 и T_2, при котором соответственные ребра либо совпадают, либо пересекаются.

б) Докажите, что существует взаимно однозначное соответствие между треугольниками триангуляций T_1 и T_2, при котором соответственные треугольники либо совпадают, либо пересекаются.

в) Докажите, что существует взаимно однозначное соответствие между треугольниками триангуляций T_1 и T_2, при котором соответственные треугольники имеют хотя бы одну общую вершину и к тому же пересекаются во внутренних точках.

2.6. Допустим, что триангуляция T множества S обладает тем свойством, что каждое ребро этой триангуляции локально минимально, т. е. оно короче любого пересекающего его отрезка с вершинами из S. Докажите, что тогда T — "наикратчайшая триангуляция" (сумма длин ее ребер строго меньше суммы длин ребер любой другой триангуляции).

2.7. Пусть S_1 и S_2 — два n-точечных множества, выпуклые оболочки которых являются $(n-k)$-угольниками ($k \geqslant 2$), вершины которых пронумерованы (вдоль обхода) числами от 1 до $n-k$. Тогда существует совместная триангуляция этих множеств, использующая не более $k-2$ дополнительных вершин.

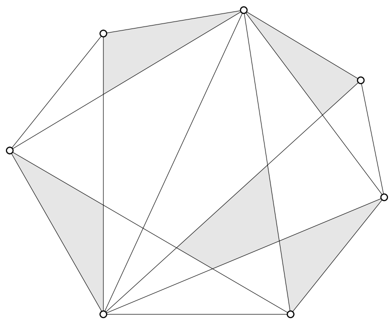

Рис. 5: К задаче 2.5.б: закрашенные области определяют соответственные треугольники

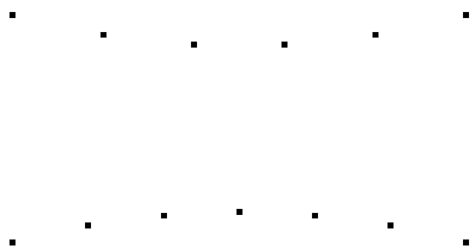

Рис. 6: К задаче 3.5.

3 Преобразования триангуляций

3.1. Многоугольник F, никакие три вершины которого не лежат на одной прямой, можно двумя способами разбить непересекающимися диагоналями на треугольники. Докажите, что некоторые четыре вершины F образуют выпуклый четырехугольник, лежащий целиком в F.

Рассмотрим некоторую триангуляцию произвольного множества точек. Назовем *перестройкой* следующее преобразование этой триангуляции: выбирается некоторый *выпуклый* четырехугольник, образованный прилегающими друг к другу треугольниками триангуляции, стирается его диагональ и вместо нее проводится вторая диагональ.

3.2. Докажите, что любую триангуляцию выпуклого n-угольника можно привести к любой другой его триангуляции при помощи последовательности перестроек, причем количество необходимых для этого операций

а) не превосходит $2n-7$;

б) не превосходит $2n-10$ при $n>12$.

в) (Открытая проблема) Попробуйте для каких-нибудь достаточно больших натуральных n найти такой выпуклый n-угольник, что для переделывания некоторых двух его триангуляций друг в друга требуется не менее $2n-10$ перестроек. Верно ли, что такой многоугольник существует при любом $n>12$?

3.3. Докажите, что из любой триангуляции произвольного (не обязательно выпуклого) многоугольника можно получить любую другую его триангуляцию.

Будем называть расстоянием между двумя триангуляциями многоугольника наименьшее число перестроек, необходимых для получения их друг из друга. Для данного n обозначим через $W(n)$ наименьшее число перестроек, при помощи которых заведомо можно получить из любой триангуляции произвольного n-угольника любую другую его триангуляцию.

3.4. Докажите, что существует $C>0$ такое, что при любом n $W(n) \leqslant Cn^2$.

Приведем теперь пример многоугольника, имеющего две довольно далекие друга от друга триангуляции.

3.5. Пусть $(a+b)$-угольник $Q_{a,b}$ имеет a вершин $X_1, \ldots, X_a$, расположенных на выпуклой вниз кривой, и b вершин $Y_1, \ldots, Y_b$, расположенных на выпуклой вверх кривой. При этом все вершины X_i лежат выше любой прямой Y_jY_k, и наоборот, все вершины Y_i лежат ниже любой прямой X_jX_k (см. рис. 6). Найдите две самые далекие друг от друга триангуляции многоугольника $Q_{a,b}$.

3.6. Докажите, что существует $c>0$ такое, что при любом n $W(n) \geqslant cn^2$.

4 *Подсчет количества триангуляций*

Будем рассматривать триангуляцию как плоский граф.

4.1. Пусть T — триангуляция некоторого множества из n точек плоскости общего положения. Для каждого $i \geqslant 3$ пусть v_i обозначает количество вершин степени i, лежащих внутри выпуклой оболочки всех этих точек, а b_j, $j \geqslant 2$, — количество вершин степени j, лежащих на границе выпуклой оболочки. Докажите, что

$$n + 6 \leqslant 4v_3 + 3v_4 + 2v_5 + v_6 + 3b_2 + 2b_3 + b_4 .$$

Пусть имеется триангуляция T некоторого множества A из n точек и пусть $p \in A$ — одна из точек. Будем говорить, что триангуляция T' множества $A \setminus \{p\}$ получена удалением точки p из T, если все отрезки триангуляции T, у которых точка p не является концевой, присутствуют также и в триангуляции T'. В этой же ситуации будем говорить, что триангуляция T получена из T' добавлением точки p. И удаление, и добавление точки, вообще говоря, можно совершить не единственным способом.

4.2. а) Пусть точка $p \in A$ лежит внутри выпуклой оболочки множества A; T' — некоторая триангуляция множества $A \setminus \{p\}$. Докажите, что существует не более 9 триангуляций, которые можно получить добавлением точки p к триангуляции T' и в которых p имеет степень 5.

б) Обобщите это утверждение

Обозначим через t_n наименьшее возможное количество триангуляций у n-элементного множества, а через T_n — наибольшее количество триангуляций. Вот таблица известных значений t_n и T_n, а также чисел Каталана при n, не превосходящих 10.

n	3	4	5	6	7	8	9	10
t_n	1	1	2	4	11	30	89	250
c_{n-2}	1	2	5	14	42	132	429	1430
T_n	1	2	5	14	42	150	780	4550

Таблица 1: Количества триангуляций при небольших n

Для оценки величины чисел Каталана и других выражений, содержащих факториалы, полезно пользоваться формулой Стирлинга $n! \sim \sqrt{2\pi n}\, n^n e^{-n}$ при $n \to \infty$.

4.3. Докажите, что $t_n \geqslant t_{n_1} t_{n_2}$, если $n_1 + n_2 = n + 2$, $n \geqslant 4$, n_1, $n_2 \geqslant 3$.

4.4. Докажите, что существуют такие величины A, B, D, E, что при всех $n \geqslant 5$

$$c_1 A^n \underset{(1)}{\leqslant} t_n \underset{(2)}{\leqslant} c_2 B^n , \qquad c_3 D^n \underset{(3)}{\leqslant} T_n \underset{(4)}{\leqslant} c_2 E^n .$$

В настоящее время эти неравенства установлены для $A = 2.0129$, $B = 3.4641$, $D = 8$, $E = 59$.