Триангуляции

К. Кохась, Д. Ростовский

Условия задач

В этой серии задач мы предполагаем, что все рассматриваемые множества точек плоскости (например, вершины рассматриваемых многоугольников) находятся в общем положении.

1 *Триангуляции многоугольников*

1.1. Докажите, что произвольный многоугольник можно разбить на треугольники непересекающимися (во внутренних точках) диагоналями.

В комбинаторике очень популярна последовательность чисел Каталана c_n $(n \geqslant 0)$, которая однозначно определяются рекуррентным соотношением

$$c_{n+1} = c_0c_n + c_1c_{n-1} + \ldots + c_nc_0 \quad (n \geqslant 0)$$

и "начальным условием" $c_0 = 1$. Известна и явная формула для чисел Каталана: $c_n = \frac{1}{n+1}C_{2n}^n$.

Нетрудно проверить, что выпуклый n-угольник можно разбить на треугольники c_{n-2} способами.

Другая широко известная интерпретация чисел c_n — количество плоских корневых строго двоичных деревьев (у каждой вершины либо два сына, либо ни одного [и тогда это по определению лист]) с $n+1$ листьями (см. рис. 1).

1.2. Дайте биективное доказательство того, что количество плоских корневых строго двоичных деревьев с $n+1$ листьями равно c_n.

1.3. Сколькими способами можно разбить выпуклый n-угольник на треугольники так, чтобы хотя бы одна сторона каждого треугольника была внешней стороной n-угольника?

Триангуляцией многоугольника будем называть разбиение его на треугольники непересекающимися диагоналями или сам набор этих диагоналей. Пусть $n > 3$ — произвольное натуральное число. Будем говорить, что триангуляции T_1 и T_2 n-угольников P_1 и P_2 *совместны*, если можно так пронумеровать вершины этих n-угольников числами от 1 до n вдоль обхода контура, что для каждой диагонали первого многоугольника, принадлежащей триангуляции T_1, триангуляция T_2 содержит диагональ многоугольника P_2 с теми же номерами вершин.

Очевидно, не у каждых двух n-угольников существует совместная триангуляция (см. рис. 2)

Пусть внутри n-угольника отмечено несколько точек. Разбиение такого n-угольника на треугольники непересекающимися (во внутренних точках) отрезками, концы которых — это вершины n-угольника или отмеченные точки, будем называть *триангуляцией с дополнительными вершинами*. Дополнительные вершины называют также *точками Штейнера.*

Будем говорить, что n-угольники P_1 и P_2 допускают *совместную триангуляцию с k дополнительными вершинами*, если можно отметить в каждом из n-угольников по k точек, пронумеровать вершины этих n-угольников (вдоль обхода контура) числами от 1 до n, а добавленные точки — числами от $n+1$ до $n+k$ и триангулировать эти многоугольники так, что для каждого отрезка из триангуляции многоугольника P_1, найдется отрезок с такими же номерами вершин из триангуляции многоугольника P_2.

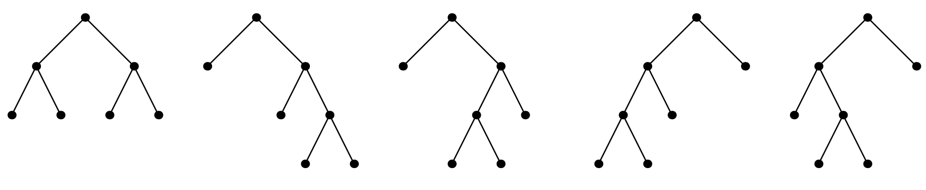

Рис. 1: $c_3 = 5$

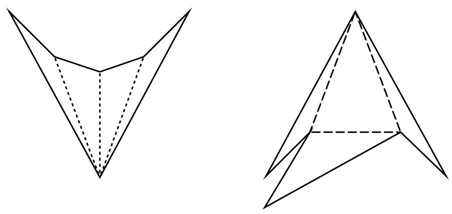

Рис. 2: Два многоугольника, не имеющих совместных триангуляций

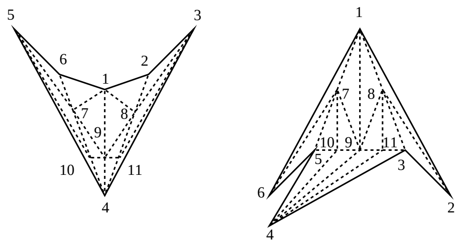

Рис. 3: Пример совместных триангуляций

1.4. Каждая триангуляция выпуклого многоугольника обязательно содержит диагональ, отрезающую от этого многоугольника треугольник. Такой треугольник (или отрезанную вершину) будем называть *ухом* триангуляции.

а) Докажите, что любая триангуляция (не обязательно выпуклого) многоугольника имеет не менее двух ушей.

б) Докажите, что количество триангуляций выпуклого n-угольника, имеющих ровно k ушей, равно

$$\frac{n}{k}2^{n-2k}C_{n-4}^{2k-4}c_{k-2}\,.$$

в) Докажите, что в среднем около четверти вершин многоугольника являются ушами триангуляции. Иными словами “средняя” триангуляция содержит около $n/4$ ушей.

1.5. Рассмотрим триангуляцию правильного n-угольника ($n \geqslant 5$) (возможно, с дополнительными вершинами), в которой все треугольники

а) остроугольные,

б) тупоугольные.

Какое наименьшее количество треугольников может быть в этой триангуляции?

1.6. Докажите, что все триангуляции выпуклого n-угольника с k дополнительными вершинами содержат поровну треугольников и поровну ребер.

1.7. Докажите, что для любых двух n-угольников существует совместная триангуляция с несколькими дополнительными вершинами (их количество зависит от многоугольников).

Оказывается, существует универсальная триангуляция с дополнительными вершинами.

1.8. а) Докажите, что для каждого $n > 3$ существует такое k, что каждый n-угольник можно так триангулировать с k дополнительными вершинами, что все полученные таким образом триангуляции будут попарно совместны.

б) Докажите, что существует универсальная триангуляция в более сильном смысле: для каждого n существует такое k, что любую триангуляцию любого n-угольника можно подразбить, добавив k дополнительных вершин так, что все полученные таким способом триангуляции окажутся попарно совместны.

1.9. Пусть $\kappa = \kappa(n)$ — наименьшее возможное значение параметра k, для которого можно триангулировать все n-угольники с k дополнительными вершинами так, что все полученные триангуляции окажутся попарно совместными. Докажите, что существуют такие константы c_1, c_2, $c_3 > 0$, что

а) $\kappa \leqslant c_1 n^2$.

б) $c_2 n^2 \leqslant \kappa$, в предположении, что у каждого многоугольника зафиксирован некоторый порядок вершин.

в) $c_3 n^2 \leqslant \kappa$, в предположении, что порядок вершин не фиксирован.

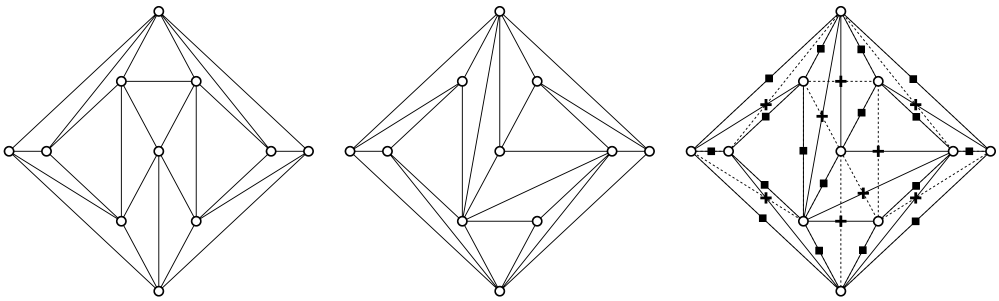

Рис. 4: К задаче 2.5.а: совпадающие соответственные ребра помечены квадратиком, пересекающиеся — крестиком.

2 *Триангуляции произвольных множеств*

Напомним, что мы рассматриваем множества точек плоскости общего положения.

Триангуляцией произвольного множества точек будем называть разбиение на треугольники выпуклой оболочки этих точек отрезками, с вершинами в этих точках.

Будем говорить, что два множества S_1 и S_2 из n точек каждое допускают *совместную триангуляцию*, если можно пронумеровать точки этих множеств числами от 1 до n и триангулировать эти множества так, что для каждого (элементарного) треугольника из триангуляции множества S_1, найдется (элементарный же) треугольник с такими же номерами вершин в триангуляции множества S_2. В частности, выпуклые оболочки множеств S_1 и S_2 имеют поровну вершин и занумерованы одинаково.

2.1. Докажите, что триангуляция n-точечного множества содержит не более $3n-6$ ребер (включая отрезки границы выпуклой оболочки).

2.2. Пусть в множествах S_1 и S_2 поровну точек и их выпуклые оболочки имеют поровну вершин. Допустим, что выпуклая оболочка множества S_1 содержит такую вершину P, что все точки множества $S_1 \setminus P$ находятся в выпуклом положении. Докажите, что множества S_1 и S_2 допускают совместную триангуляцию.

2.3. Пусть в множествах S_1 и S_2 поровну точек и их выпуклые оболочки имеют поровну вершин. Допустим, что внутри выпуклой оболочки каждого множества содержится не более

а) одной;

б) двух;

в) трех

точек. Докажите, что множества S_1 и S_2 допускают совместную триангуляцию.

2.4. *Открытая проблема.* Пусть в множествах S_1 и S_2 общего положения поровну точек и их выпуклые оболочки имеют поровну вершин. Верно ли, что множества S_1 и S_2 допускают совместную триангуляцию?

2.5. Пусть T_1 и T_2 — две триангуляции множества S.

а) Докажите, что существует взаимно однозначное соответствие между ребрами триангуляций T_1 и T_2, при котором соответственные ребра либо совпадают, либо пересекаются.

б) Докажите, что существует взаимно однозначное соответствие между треугольниками триангуляций T_1 и T_2, при котором соответственные треугольники либо совпадают, либо пересекаются.

в) Докажите, что существует взаимно однозначное соответствие между треугольниками триангуляций T_1 и T_2, при котором соответственные треугольники имеют хотя бы одну общую вершину и к тому же пересекаются во внутренних точках.

2.6. Допустим, что триангуляция T множества S обладает тем свойством, что каждое ребро этой триангуляции локально минимально, т. е. оно короче любого пересекающего его отрезка с вершинами из S. Докажите, что тогда T — “наикратчайшая триангуляция” (сумма длин ее ребер строго меньше суммы длин ребер любой другой триангуляции).

2.7. Пусть S_1 и S_2 — два n-точечных множества, выпуклые оболочки которых являются $(n-k)$-угольниками ($k \geqslant 2$), вершины которых пронумерованы (вдоль обхода) числами от 1 до $n-k$. Тогда существует совместная триангуляция этих множеств, использующая не более $k-2$ дополнительных вершин.

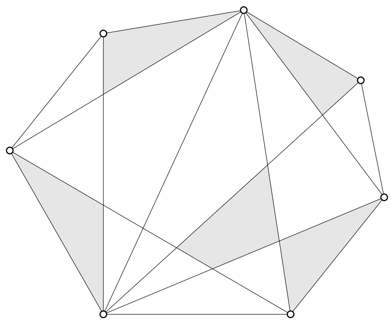

Рис. 5: К задаче 2.5.б: закрашенные области определяют соответственные треугольники

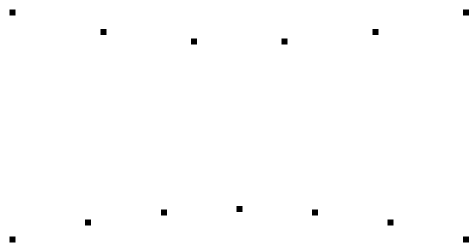

Рис. 6: К задаче 3.5.

3 *Преобразования триангуляций*

3.1. Многоугольник F, никакие три вершины которого не лежат на одной прямой, можно двумя способами разбить непересекающимися диагоналями на треугольники. Докажите, что некоторые четыре вершины F образуют выпуклый четырехугольник, лежащий целиком в F.

Рассмотрим некоторую триангуляцию произвольного множества точек. Назовем *перестройкой* следующее преобразование этой триангуляции: выбирается некоторый *выпуклый* четырехугольник, образованный прилегающими друг к другу треугольниками триангуляции, стирается его диагональ и вместо нее проводится вторая диагональ.

3.2. Докажите, что любую триангуляцию выпуклого n-угольника можно привести к любой другой его триангуляции при помощи последовательности перестроек, причем количество необходимых для этого операций

а) не превосходит $2n-7$;

б) не превосходит $2n-10$ при $n>12$.

в) (Открытая проблема) Попробуйте для каких-нибудь достаточно больших натуральных n найти такой выпуклый n-угольник, что для переделывания некоторых двух его триангуляций друг в друга требуется не менее $2n-10$ перестроек. Верно ли, что такой многоугольник существует при любом $n>12$?

3.3. Докажите, что из любой триангуляции произвольного (не обязательно выпуклого) многоугольника можно получить любую другую его триангуляцию.

Будем называть расстоянием между двумя триангуляциями многоугольника наименьшее число перестроек, необходимых для получения их друг из друга. Для данного n обозначим через $W(n)$ наименьшее число перестроек, при помощи которых заведомо можно получить из любой триангуляции произвольного n-угольника любую другую его триангуляцию.

3.4. Докажите, что существует $C>0$ такое, что при любом n $W(n)\leqslant Cn^2$.

Приведем теперь пример многоугольника, имеющего две довольно далекие друга от друга триангуляции.

3.5. Пусть $(a+b)$-угольник $Q_{a,b}$ имеет a вершин $X_1, \ldots, X_a$, расположенных на выпуклой вниз кривой, и b вершин $Y_1, \ldots, Y_b$, расположенных на выпуклой вверх кривой. При этом все вершины X_i лежат выше любой прямой Y_jY_k, и наоборот, все вершины Y_i лежат ниже любой прямой X_jX_k (см. рис. 6). Найдите две самые далекие друг от друга триангуляции многоугольника $Q_{a,b}$.

3.6. Докажите, что существует $c>0$ такое, что при любом n $W(n)\geqslant cn^2$.

4 Подсчет количества триангуляций

Будем рассматривать триангуляцию как плоский граф.

4.1. Пусть T — триангуляция некоторого множества из n точек плоскости общего положения. Для каждого $i \geqslant 3$ пусть v_i обозначает количество вершин степени i, лежащих внутри выпуклой оболочки всех этих точек, а b_j, $j \geqslant 2$, — количество вершин степени j, лежащих на границе выпуклой оболочки. Докажите, что

$$n + 6 \leqslant 4v_3 + 3v_4 + 2v_5 + v_6 + 3b_2 + 2b_3 + b_4 .$$

Пусть имеется триангуляция T некоторого множества A из n точек и пусть $p \in A$ — одна из точек. Будем говорить, что триангуляция T' множества $A \setminus \{p\}$ получена удалением точки p из T, если все отрезки триангуляции T, у которых точка p не является концевой, присутствуют также и в триангуляции T'. В этой же ситуации будем говорить, что триангуляция T получена из T' добавлением точки p. И удаление, и добавление точки, вообще говоря, можно совершить не единственным способом.

4.2. а) Пусть точка $p \in A$ лежит внутри выпуклой оболочки множества A; T' — некоторая триангуляция множества $A \setminus \{p\}$. Докажите, что существует не более 9 триангуляций, которые можно получить добавлением точки p к триангуляции T' и в которых p имеет степень 5.

б) Обобщите это утверждение

Обозначим через t_n наименьшее возможное количество триангуляций у n-элементного множества, а через T_n — наибольшее количество триангуляций. Вот таблица известных значений t_n и T_n, а также чисел Каталана при n, не превосходящих 10.

n	3	4	5	6	7	8	9	10
t_n	1	1	2	4	11	30	89	250
c_{n-2}	1	2	5	14	42	132	429	1430
T_n	1	2	5	14	42	150	780	4550

Таблица 1: Количества триангуляций при небольших n

Для оценки величины чисел Каталана и других выражений, содержащих факториалы, полезно пользоваться формулой Стирлинга $n! \sim \sqrt{2\pi n} n^n e^{-n}$ при $n \to \infty$.

4.3. Докажите, что $t_n \geqslant t_{n_1} t_{n_2}$, если $n_1 + n_2 = n + 2$, $n \geqslant 4$, n_1, $n_2 \geqslant 3$.

4.4. Докажите, что существуют такие величины A, B, D, E, что при всех $n \geqslant 5$

$$C_1 A^n \underset{(1)}{\leqslant} t_n \underset{(2)}{\leqslant} C_2 B^n , \qquad C_3 D^n \underset{(3)}{\leqslant} T_n \underset{(4)}{\leqslant} C_4 E^n .$$

В настоящее время эти неравенства установлены для $A = 2.0129$, $B = 3.4641$, $D = 8$, $E = 59$.

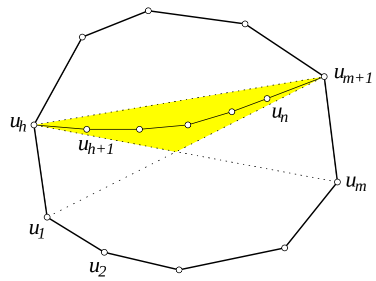

Рис. 7: Универсальное множество S_1

5 *Дополнительные задачи*

2.8. Докажите утверждение задач 2.3. б) и в) в дополнительном предположении, что (циклическая) нумерация вершин выпуклых оболочек множеств S_1 и S_2 задана изначально.

Следующая задача является существенным обобщением задачи 2.2.

2.9. Пусть S_1 и S_2 — два n-точечных множества, выпуклые оболочки которых являются h-угольниками, вершины которых пронумерованы (вдоль обхода против часовой стрелки) как $u_1, \ldots, u_h$ (у первого множества) и $v_1, \ldots, v_h$ (у второго). Обозначим внутренние точки множества S_1 через $u_{h+1}, \ldots, u_n$. Предположим, что при некотором $m \leqslant h-2$ множество $S_1 \setminus \{u_1, u_2, \ldots, u_m\}$ находится в выпуклом положении и, более того, все внутренние точки $u_{h+1}, \ldots, u_n$ расположены внутри треугольника, ограниченного прямыми $u_h u_{m+1}$, $u_h u_m$ и $u_1 u_{m+1}$ (см. рис. 7). Тогда множества S_1 и S_2 допускают совместную триангуляцию.

Наконец, последняя задача обобщает задачу 3.2.

3.7. Многоугольник $A_1 \ldots A_k B_{k+1} \ldots B_n$ называется *спиралевидным*, если его углы $\angle A_1, \ldots, \angle A_k$ меньше $180°$, а углы $\angle B_{k+1}, \ldots, \angle B_n$ больше $180°$.

Верно ли, что из любой триангуляции спиралевидного n-угольника можно получить любую другую его триангуляцию при помощи $O(n)$ перестроек?

Решения задач

1 *Триангуляции многоугольников*

1.1. Достаточно доказать, что в любом многоугольнике есть хотя бы одна диагональ, целиком лежащая внутри многоугольника.

Если многоугольник является выпуклым, подойдет любая его диагональ. В противном случае рассмотрим некоторый угол $\angle ABC$ многоугольника, больший, чем 180°. Начнем вращать луч с вершиной B от положения BA до положения BC, и в каждый момент вращения будем отмечать точку X пересечения этого луча с границей многоугольника, ближайшую к точке B. Все эти точки не могут располагаться на одной и той же стороне многоугольника, так как $\angle ABC > 180^\circ$. Поэтому в некоторый момент должен произойти "скачок" точки X с одной стороны на другую. При этом положении луча точка X окажется вершиной, причем диагональ BX будет полностью лежать внутри многоугольника.

1.2. Рассмотрим выпуклый n-угольник $A_1A_2\dots A_n$ и какую-нибудь триангуляцию. Отметим центры всех треугольников и середины всех сторон кроме A_1A_2. Соединим отрезками центры треугольников, имеющих общую сторону, а также середину каждой стороны n-угольника с центром того треугольника, который к ней примыкает. В качестве корня возьмем центр треугольника со стороной A_1A_2. Получится плоское корневое двоичное дерево. Это соответствие биективно.

1.3. [13, задача 1.41] Ответ: $n2^{n-5}$.

1.4. а) Построим по триангуляции граф. В каждом треугольнике отметим по одной точке. Соединим отрезком точки, находящиеся в соседних по сторонам треугольниках. Как и в предыдущем решении, полученный граф является деревом. Висячим вершинам этого дерева соответствуют уши триангуляции.

б) [11] Зафиксируем какую-нибудь вершину v и рассмотрим произвольную триангуляцию, у которой v является ухом. Треугольник, примыкающий к вершине v, будем обозначать той же буквой. Построим дерево U с корнем v, вершинами которого являются треугольники выбранной триангуляции, две вершины соединены ребром, если соответствующие треугольники имеют общую сторону. Ушам триангуляции в этом дереве будут соответствовать висячие вершины, а треугольникам, имеющим одну внешнюю сторону — вершины степени 2. Треугольники, у которых все стороны являются диагоналями n-угольника, имеют в этом дереве степень 3. Заметим, что это дерево, хранит следы еще одной структуры: если мы пришли в какую-либо вершину (т. е. треугольник), двигаясь из вершины v, то при дальнейшем удалении от v, мы можем двигаться или через сторону треугольника, находящуюся справа от нас или через сторону слева. Таким образом, каждый очередной потомок в нашем корневом дереве — либо левый, либо правый.

Заметим, что по корневому дереву U с этой дополнительной "бинарной" информацией триангуляция восстанавливается однозначно.

Проделаем с деревом U следующую процедуру: уберем из него все вершины степени 2, заменив каждую цепочку ребер, начинающуюся и кончающуюся в вершинах степени 1 или 3 и проходящую по вершинам степени 2, одним ребром. Полученный граф обозначим через U' (см. рис. 8). Вершина v в этом графе отмеченная. Таким образом, граф U' — бинарное корневое дерево. Если рассматриваемая триангуляция имеет k ушей, то у дерева U' есть k висячих вершин и $k-2$ внутренние вершины степени 3, а всего в нем $2k-2$ вершин.

Теперь, чтобы подсчитать количество триангуляций с k ушами, заметим, что

- всего имеется c_{k-2} способов выбора корневого бинарного дерева U' (это одна из широко известных реализаций чисел Каталана);

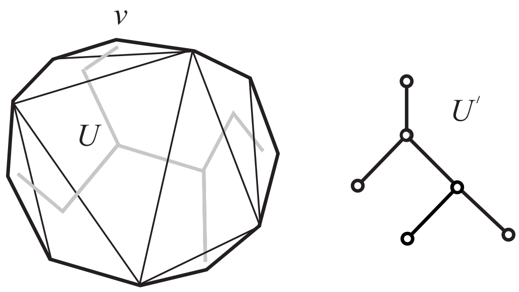

Рис. 8: Триангуляция как корневое бинарное дерево

- для каждого такого дерева U' количество способов распределить остальные $n-2k$ вершин степени 2 по ребрам дерева U' равно C_{n-4}^{2k-4};

  Действительно, подсчет этого числа способов — это в точности решение стандартной задачи о количестве способов разложить m одинаковых конфет по k различным карманам. Ответ в этой задаче C_{m+k-1}^{k-1}. Напомним решение: мы выкладываем $m+k$ конфет в ряд, убираем первую конфету и еще $k-1$ конфет в этом ряду, это можно сделать как раз C_{m+k-1}^{k-1} способами. Теперь в i-й карман $(1 \leqslant i < k)$ следует положить столько конфет, сколько осталось между i-й и $(i+1)$-й убранными конфетами, а в k-й карман — столько, сколько осталось после k-й убранной конфеты до конца ряда.

- добавляемые вершины должны быть либо левыми, либо правыми — следовательно, мы имеем выбор из 2^{n-2k} вариантов, независимо от того, куда мы добавляем эти вершины;

- наконец, выбор начальной вершины v мы можем осуществить n способами, при этом каждую триангуляцию мы учтем в наших подсчетах k раз (каждое ухо может быть назначено на роль вершины v).

Таким образом, всего имеется $\frac{n}{k}2^{n-2k}C_{n-4}^{2k-4}c_{k-2}$ триангуляций с k ушами.

в) [11] Рассмотрим сумму количеств ушей во всех триангуляциях. Каждая вершина дает в эту сумму вклад c_{n-3}, поскольку существует ровно столько триангуляций, у которых эта вершина может быть ухом. Следовательно, эта сумма равна nc_{n-3}, а среднее число ушей в триангуляции равно $\frac{nc_{n-3}}{c_{n-2}} = \frac{n(n-1)}{2(2n-5)}$.

1.5. Эту задачу мы взяли из книги [2, задача 7.1]. В обоих пунктах ответ — n треугольников.

а) Пример разбиения на n треугольников: соединим центр n-угольника со всеми вершинами. Меньшим количеством треугольников обойтись нельзя, поскольку две различные стороны n-угольника не могут принадлежать одному треугольнику (при $n \geqslant 5$ все углы n-угольника тупые).

б) Пример разбиения на n треугольников при нечетном n: проведем все диагонали из одной вершины. В полученной триангуляции только один треугольник остроугольный. В случае четного n проведем все диагонали из одной вершины, кроме диагонали, являющейся диаметром. Получится разбиение n-угольника на $n-4$ тупоугольных треугольника и 1 четырехугольник. Разобьем четырехугольник на два треугольника короткой диагональю. Опять получится триангуляция, в которой только один треугольник остроугольный. Теперь в обоих случаях разобьем остроугольный треугольник на три тупоугольных, добавив одну дополнительную вершину.

Меньшим числом треугольников обойтись нельзя, поскольку невозможно разбить правильный n-угольник на тупоугольные треугольники, не используя дополнительных вершин. Действительно, рассмотрим наибольшую диагональ n-угольника, участвующую в триангуляции. Она делит описанную окружность на две части. Треугольник, прилегающий к диагонали с той стороны, где лежит меньшая дуга, не может быть тупоугольным.

При наличии хотя бы одной дополнительной (внутренней) вершины число треугольников окажется не меньше n — следует из подсчета суммы углов.

1.6. В олимпиадном фольклоре эта задача известна давно. Обычно спрашивают, сколько треугольников имеет такая триангуляция при конкретных k и n. См., например, [4], задача 52.

Для решения задачи подсчитайте сумму углов всех этих треугольников, либо воспользуйтесь формулой Эйлера $В - Р + Г = 2$.

1.7. Это утверждение и рисунки 2, 3, 9 мы взяли из статьи [9].

Пусть даны два n-угольника P_1 и P_2. Пронумеруем вдоль обхода контура вершины каждого из них. Рассмотрим еще произвольный выпуклый n-угольник P, вершины которого тоже пронумерованы. Рассмотрим произвольную триангуляцию T_1 многоугольника P_1 и произвольную триангуляцию T_2 многоугольника P_2. Обозначим через T_1' и T_2' триангуляции многоугольника P, совместные с T_1 и T_2. Отметим, что по двум совместным триангуляциям T_i и T_i' мы можем построить кусочно линейное отображение $\mathcal{L}_i\colon P \to P_i$, которое отображает каждый треугольник триангуляции T_i' на соответственный треугольник в триангуляции T_i, а именно: вершины переходят в соответственные вершины, а внутри треугольника отображение определено по линейности.

Проведем в P все ребра обеих триангуляций T_1' и T_2' (см. рис. 9). Многоугольник P окажется разбит этими диагоналями на несколько выпуклых многоугольников. Подразобьем каждый из них на треугольники и обозначим через S полученную триангуляцию. Тогда $L_i^{-1}(S)$ — искомые совместные триангуляции.

1.8. Конструкция предыдущей задачи сразу позволяет построить универсальную триангуляцию. Для этого достаточно взять в качестве P выпуклый n-угольник общего положения, провести в нем все диагонали и подразбить полученные области на треугольники. Потом мы можем перенести эту триангуляцию в любой

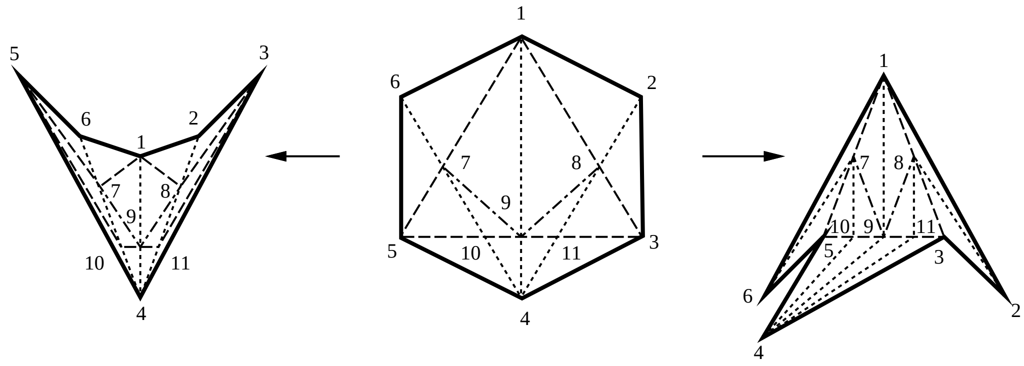

Рис. 9: Построение совместной триангуляции

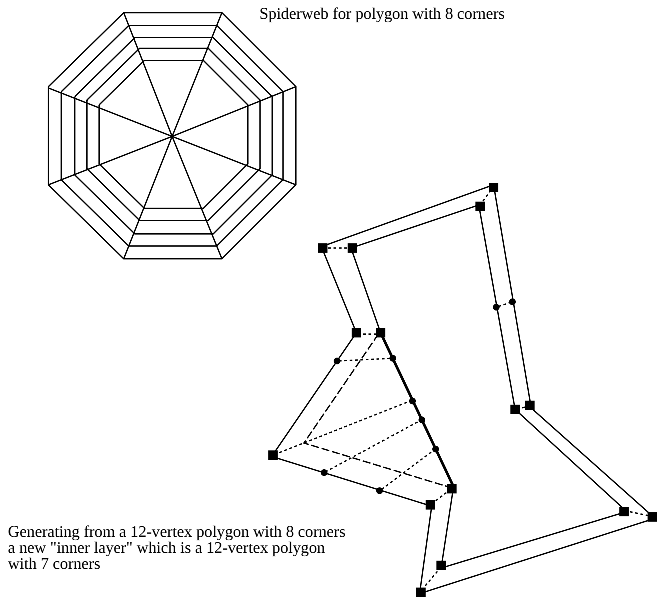

Рис. 10: Паутина и один шаг ее построения

другой n-угольник P_i, при помощи кусочно линейного отображения L_i^{-1}. Это дает решение обоих пунктов задачи.

1.9. Это утверждение и рисунки 10–14 мы также взяли из статьи [9].

а) Для доказательства неравенства $\kappa \leqslant c_1 n^2$ достаточно предъявить универсальную триангуляцию с квадратичным количеством дополнительных вершин. К сожалению, универсальная триангуляция, построенная в решении предыдущей задачи, имеет порядка n^4 дополнительных вершин.

Предъявим более экономную конструкцию универсальной (не в сильном смысле) триангуляции. Для выпуклого n-угольника эта триангуляция имеет вид “паутины”, состоящей из $n-2$ слоев, подобных исходному n-угольнику и n радиусов, идущих из центра (см. рис. 10). Четырехугольники, из которых составлены слои, подразбиты на треугольники произвольным способом (на рисунке не показано).

Произвольный n-угольник может быть триангулирован таким “паутинным” способом при помощи следующего итерационного процесса. Пусть у нас уже имеется k-угольник P, на сторонах которого, включая вершины, лежат n отмеченных точек. Существует диагональ, отрезающая от этого многоугольника треугольник Δ. Поместим внутри многоугольника P его слегка уменьшенную копию P'. Разность $P \setminus P'$ представляет собой “круговой коридор”, который устроен так же, как один слой в “паутине” (см. рис. 10). Рассмотрим треугольник в P' соответствующий треугольнику Δ. Заменим две его стороны на отрезающую его диагональ, поместив на этой диагонали подходящее число отмеченных точек. В результате получится многоугольник P'', у которого имеется уже $k-1$ углов. К нему будем применять очередную итерацию.

В результате выполнения этих итераций мы получим в конце концов треугольник, на сторонах которого, включая вершины, отмечено n точек. Триангулируем его из центральной точки. Эта конструкция требует $n(n-3)+1$ дополнительных точек.

б) Теперь мы предъявим пример двух n-угольников, для которых необходимо не меньше cn^2 дополнительных вершин для построения совместных триангуляций. Для удобства будем считать, что n делится на 4.

Эти n-угольники P_1 и P_2 изображены на рисунке 11 (P_1 — слева, P_2 — справа). Каждый из этих многоугольников состоит из двух “площадок” с $n/4$ вершинами, соединенных между собой змеевидным коридором из $n/4$ звеньев. Многоугольники отличаются сдвигом на $n/4$ нумерации вершин.

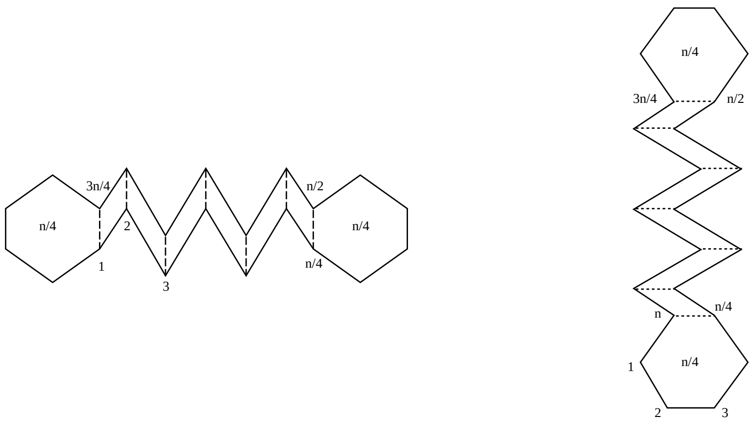

Рис. 11: $O(n^2)$ дополнительных вершин

Рассмотрим совместные триангуляции T_1 и T_2 многоугольников P_1 и P_2. Чтобы доказать, что для их построения потребуется квадратичное число вершин, достаточно в силу формулы Эйлера проверить, что триангуляции состоят из квадратичного числа треугольников.

Как и в задаче 1.7, мы будем пользоваться тем, что вместе с совместными триангуляциями наших n-угольников определены кусочно-линейные отображения каждого многоугольника на другой. Рассмотрим вертикальные диагонали многоугольника P_1, изображенные на рисунке 11 прерывистыми линиями. Соответствующее кусочно-линейное отображение переводит эти диагонали в некоторые ломаные, лежащие в многоугольнике P_2. Таким образом, мы построили $n/4$ непересекающихся ломаных в многоугольнике P_2, идущих с верхней площадки на нижнюю. Кроме того, в P_2 имеются $n/4$ горизонтальных отрезка, изображенных на рисунке 11 прерывистыми линиями. Взаиморасположение этих ломаных и отрезков показано на рисунке 12. Поскольку каждый отрезок пересекает каждую ломаную по крайней мере один раз, мы получаем $n^2/16$ точек пересечения.

Докажем, что каждый треугольник T_2 содержит не более 9 таких точек пересечения. Сначала заметим, что каждое ребро триангуляции T_2 в силу конструкции змеевидного коридора пересекает не более двух горизонтальных отрезков. Далее, каждое ребро триангуляции T_2 пересекает не более двух ломаных (т.к. иначе соответственное ребро в триангуляции T_1 пересекло бы какие-то три вертикальные диагонали, что тоже

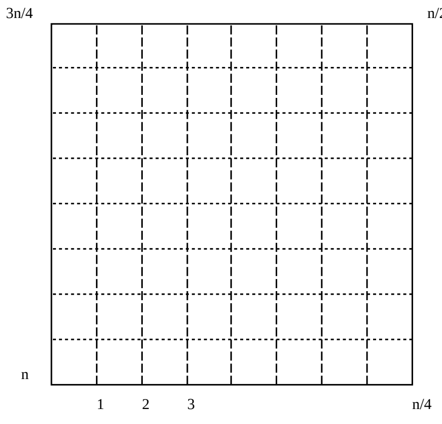

Рис. 12: Пересечения ломаных и отрезков

невозможно). Поскольку каждая ломаная или отрезок, заходя в треугольник, пересекают его контур по крайней мере в двух точках, то мы получаем, что не более трех ломаных и трех отрезков могут заходить в один треугольник, что дает нам не более 9 точек пересечения. Таким образом, триангуляция содержит не меньше $\frac{n^2}{16}/9 = \frac{n^2}{144}$ треугольников.

в) В случае не фиксированного порядка вершин все равно в наихудшем случае понадобится квадратичное количество точек Штейнера. Рассмотрим многоугольники, изображенные на рисунке 13. Рассмотрим ломаные, соответствующие вертикальным диагоналям первого многоугольника, и отрезки, разбивающие “щупальца” второго многоугольника на сегменты. Взаиморасположение этих ломаных и отрезков показано на рисунке 14. При любом выборе порядка вершин эти семейства линий имеют квадратичное количество точек пересечения.

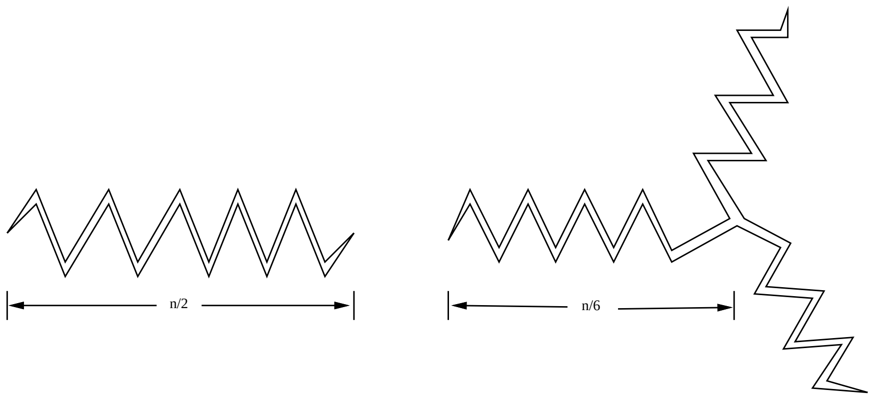

Рис. 13: Многоугольники с нефиксированным порядком вершин

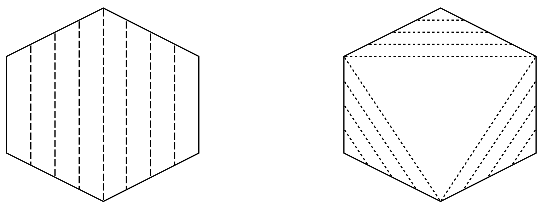

Рис. 14: Пересечения ломаных и отрезков в общем случае

2 Триангуляции произвольных множеств

2.1. По теореме Эйлера “В-Р+Г=2” чем больше в триангуляции треугольников, тем больше и ребер. Оценим сверху число треугольников. Сумма углов треугольников, примыкающих к каждой вершине триангуляции не более 2π. Поэтому сумма углов всех треугольников не более $2\pi n$. При этом мы не учли углы, принадлежащие дополнению выпуклой оболочки, — их сумма не меньше 5π. Следовательно, у нас не более $2n-5$ треугольников, а тогда по теореме Эйлера имеется не более $2n+n-6$ ребер.

2.2. Эту задачу и рис. 15 мы взяли из [6].

Пронумеруем точки множества S_1. Пусть P имеет номер 1, а остальные точки пронумеруем в соответствии с обходом их выпуклой оболочки. Соединим точку P со всеми точками выпуклой оболочки оставшегося множества, которые видны из нее, — это будут в точности все внутренние точки множества S_1 плюс еще две какие-то точки (см. рис. 15). Соединим теперь произвольную крайнюю точку множества S_2 со всеми внутренними точками множества S_2, а также с двумя соседними точками выпуклой оболочки S_2. Построим соответственную нумерацию точек множества S_2 и проведем отрезки, соответственные уже построенным в множестве S_1. Теперь нетриангулированная часть множества S_2 представляет собой некоторый многоугольник. Триангулируем его произвольным образом. А нетриангулированная часть множества S_1 представляет собой выпуклый многоугольник, поэтому ее можно триангулировать соответственно.

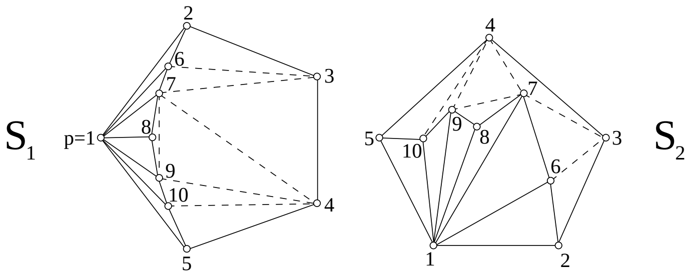

Рис. 15: Совместная триангуляция

2.3. Эту задачу мы также взяли из [6].

а) Если множества S_1 и S_2 имеют по одной внутренней точке, то всегда имеется совместная звездная триангуляция.

б) Пусть множества S_1 и S_2 имеют две внутренних точки. В множестве S_1 проведем отрезки из одной из них ко всем вершинам многоугольника. В один из полученных треугольников попадет вторая внутренняя точка — соединим ее с вершинами этого треугольника. точно такие же действия произведем в множестве S_2. Очевидно, что полученные таким образом триангуляции окажутся совместными.

в) Пусть выпуклые оболочки множеств S_1 и S_2 имеют по n граничных точек. Выделим в каждом из множеств S_1 и S_2 одну из внутренних точек и обозначим их через x. В обоих множествах произведем одну и ту же процедуру: соединим x со всеми вершинами выпуклой оболочки, разбив ее на n треугольников. Очевидно, что в одном из этих треугольников не содержится ни одной из двух других внутренних точек. Рассмотрим самую длинную цепочку подряд идущих треугольников, не содержащую ни одну из этих точек.

Теперь из двух полученных цепочек выберем более короткую — не умаляя общности, она относится к множеству S_1. Пусть в ней ℓ треугольников. Тогда укоротим цепочку в S_2 так, чтобы и она содержала ℓ подряд идущих треугольников без внутренних точек. В каждом из множеств обозначим вершины выпуклой оболочки, принадлежащие выбранным цепочкам, через $u_1, u_2, \ldots, u_{\ell+1}$, и продолжим нумерацию на остальные вершины: $u_{\ell+2}, \ldots, u_n$.

В обоих множествах соединим точку x с оставшимися двумя внутренними точками, обозначив их через y и z так, что отрезок xy ближе к отрезку xu_1, а xz ближе к $xu_{\ell+1}$ (см. рис. 16). Проведем отрезки yu_1, yu_n и $zu_{\ell+1}$, $zu_{\ell+2}$. Теперь нетриангулированная часть в каждом из множеств представляет собой многоугольник $yxzu_{\ell+2}\ldots u_n$, причем в множестве S_1 этот многоугольник выпуклый. Действительно, углы, большие $180°$, могут встретиться только при его вершинах y и z но это означало бы, что цепочку треугольников можно было продолжить, добавив треугольник u_1xu_n или $u_{\ell+1}zu_{\ell+2}$. Таким образом, можно завершить совместные триангуляции множеств S_1 и S_2.

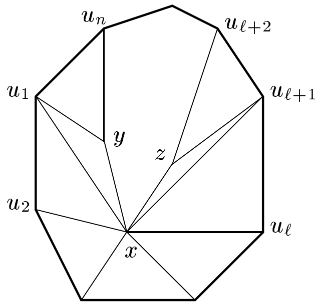

Рис. 16: К задаче 2.3в.

2.4. Как утверждается в [6], для множеств, состоящих из не более 8 точек, это утверждение верно.

2.5. Вариант теоремы Холла о паросочетаниях. Эту задачу и рис. 4–5 мы взяли из [7].

а) Назовем ребра первой триангуляции юношами, ребра второй девушками, и будем говорить, что юноша и девушка знакомы, если соответствующие ребра совпадают или пересекаются. Из утверждения задачи 1.6 мы знаем, что триангуляции содержат поровну ребер, скажем по n. Проверим условие теоремы Холла. Рассмотрим произвольную компанию *Ю*, состоящую из k юношей, и пусть $Д_1$ — множество знакомых им девушек. Проверим, что в множестве $Д_1$ не меньше k девушек. Обозначим через $Д_2$ дополнение множества $Д_1$. Заметим, что ребра из $Ю_1$ и $Д_2$ не пересекаются, поэтому суммарное количество ребер во множествах *Ю* и $Д_2$ не превосходит n. А суммарное количество ребер во множествах $Д_1$ и $Д_2$ в точности равно n. Следовательно, множество $Д_1$ содержит не меньше элементов чем *Ю*.

б) Совершенно аналогично.

в) На этот раз юноши и девушки — это треугольники. Опять рассмотрим произвольную компанию юношей *Ю* и множество *Д* знакомых им девушек. Тогда для каждой вершины P нашей триангуляции сумма углов треугольников множества *Ю*, прилегающих к P, не больше суммы углов треугольников множества *Д*, прилегающих к P. Суммируя по всем вершинам P, находим, что сумма углов всех треугольников из *Ю* не больше суммы углов треугольников множества *Д*. Значит, в *Д* не меньше треугольников, чем в *Ю*.

2.6. Следует из задачи 2.5.а [7]. Действительно, существует взаимно однозначное соответствие между ребрами нашей локально минимальной триангуляции и ребрами любой другой триангуляции, при котором соответственные либо пересекаются, либо совпадают. Тогда в каждой паре соответственных ребер ребро из локально минимальной триангуляции не длиннее парного ему ребра из второй триангуляции. Суммируя эти неравенства по всем ребрам, получаем утверждение задачи.

2.7. [5]. Будем вести доказательство индукцией по k. Обозначим через $\sigma(k)$ количество требующихся точек Штейнера. Для произвольного множества точек S и любой его крайней точки v *ухом* $E(v)$, соответствующим вершине v, будем называть треугольник, вершины которого — v и две соседних с нею вершины выпуклой оболочки S. Ухо называется пустым, если внутри него нет точек множества S.

Базу индукции дает утверждение задачи 2.3: $\sigma(2) = \sigma(3) = 0$. Пусть $k \geqslant 4$.

Обозначим через $v_1, v_2, \ldots, v_{n-k}$ вершины выпуклой оболочки множества S_1, $w_1, w_2, \ldots, w_{n-k}$ — соответствующие вершины выпуклой оболочки множества S_2; пусть и те и другие пронумерованы против часовой стрелки. Можно считать, что ни при каком i уши $E(v_i)$ и $E(w_i)$ одновременно не являются пустыми (иначе отрежем их и применим предположение индукции). Тогда возможны два случая.

1-й случай. При каком-то i оба уха $E(v_i)$ и $E(w_i)$ непусты. Пусть $p \in E(v_i)$ — первая точка, которая попадается при вращении луча $v_{i-1}v_i$ против часовой стрелки вокруг точки v_{i-1}. Добавим точку Штейнера s чуть левее луча $v_{i-1}p$ очень близко к стороне v_iv_{i+1} так, чтобы треугольник v_ips и три прилегающие к нему треугольника были пустыми (см. рис. 17а). Аналогичную конструкцию выполним для множества S_2, построив соответственно точки q и t. Теперь мы можем применить предположение индукции к множествам $S_1 \cup \{s\} \setminus \{v_i, p\}$ и $S_2 \cup \{t\} \setminus \{w_i, q\}$. Мы уменьшили количество внутренних точек на 1, но при этом использовали одну точку Штейнера.

2-й случай. При каждом i ровно одно ухо $E(v_i)$ или $E(w_i)$ непусто. Пусть сначала $n - k \geqslant 5$, т. е. выпуклые оболочки множеств S_1 и S_2 — многоугольники не менее чем с пятью вершинами. Случай, когда эти выпуклые оболочки — четырехугольники, будет разобран отдельно, а треугольниками эти выпуклые оболочки в рассматриваемой ситуации быть не могут. Одно из множеств, скажем, S_1, имеет тогда по крайней

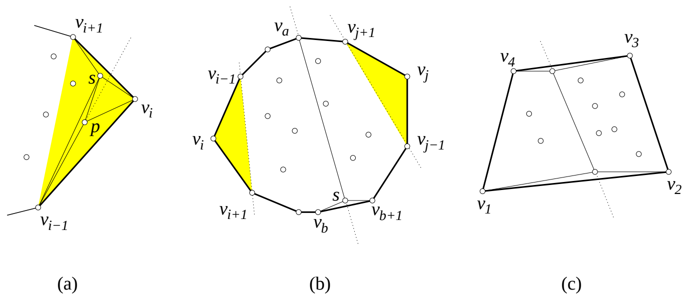

Рис. 17: Добавление точек Штейнера

мере три пустых уха. Выберем два из них, которые не пересекаются: E_{v_i} и E_{v_j}, $j \geqslant i+2$. Рассмотрим такую триангуляцию T_1 выпуклого многоугольника $v_1 \dots v_{i-1}v_{i+1} \dots v_{j-1}v_{j+1} \dots v_{n-k}$, что уши E_{v_i} и E_{v_j} лежат по разные стороны от каждого ее ребра. Пусть T_2 — совместная триангуляция соответствующего многоугольника для S_2. Рассмотрим движущуюся прямую ℓ_1, которая последовательно заметает все треугольники из T_1 следующим образом: начальное положение прямой — $v_{i-1}v_{i+1}$; при движении через треугольник $v_a v_b v_{b+1}$ прямая поворачивается вокруг точки v_a, пересекая в каждый момент ребро $v_b v_{b+1}$; конечное положение прямой — ребро $v_{j-1}v_{j+1}$. Аналогичную прямую ℓ_2 будем рассматривать для триангуляции T_2; пусть α_i $(i = 1,\ 2)$ — количество внутренних точек множества S_i слева от прямой ℓ_i. В начале движения $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 \geqslant 1$, в конце — $\alpha_1 = k$, $\alpha_2 \leqslant k-1$, следовательно, в какой-то момент имело место равенство $\alpha_1 = \alpha_2$. Пусть в этот момент прямая ℓ_1 пересекала треугольник $v_a v_b v_{b+1}$. Выберем в этот момент точку Штейнера s на прямой ℓ_1 очень близко к стороне $v_b v_{b+1}$ (см. рис. 17b). Проведем отрезки, соединяющие точку s с v_a, v_b, v_{b+1}; аналогичное построение сделаем для множества S_2. К образовавшимся половинкам множеств применим предположение индукции.

Теперь разберем случай, когда выпуклые оболочки множеств S_1 и S_2 — четырехугольники. Выберем прямую ℓ_1, пересекающую отрезки v_1v_2 и v_3v_4 и такую, что слева от нее имеется ровно две внутренние точки множества S_1, а остальные $k-2 \geqslant 2$ внутренние точки — справа. Аналогичную линию можно найти и для множества S_2. Выберем две точки Штейнера на линии ℓ_1 близко к сторонам v_1v_2 и v_3v_4 и построим два соответствующих треугольника как показано на рис. 17c. Аналогичные построения выполним для множества S_2. Опять применим индукционные предположения к образовавшимся половинкам множеств.

2.8. Эту задачу и рис. 18, 19 мы также взяли из [6].

б) Если множества S_1 и S_2 имеют две внутренних точки, проведем в каждом из множеств прямую через внутренние точки. Нетрудно проверить, что существуют два номера a и b, для которых точки этими номерами лежат по разные стороны от проведенной прямой в обоих множествах. Построим по два треугольника, соединив эти точки со внутренними точками каждого множества. Оставшиеся множества S_1 и S_2 можно триангулировать совместно, соединяя внутренние точки с внешними.

в) Обозначим три внутренние точки множества S_1 через x, y и z. Рассмотрим те вершины выпуклой оболочки S_1, которые лежат по другую сторону от прямой yz, нежели сам треугольник xyz, — будем назвать такие точки внешними относительно стороны yz. Множество всех этих вершин обозначим D_x. Аналогично определим множества D_y и D_z и точно так же обозначим множества вершин S_2, состоящие из точек с теми же номерами. (см. рис. 18). Теперь проведем прямые через три внутренние точки S_2 и будем использовать ту же терминологию: точки, лежащие по другую сторону от одной из этих прямых, нежели сам треугольник с вершинами во внутренних точках, называются внешними относительно этой прямой.

Теперь рассмотрим два возможных случая расположения множеств D_x, D_y и D_z в выпуклой оболочке S_2.

1. В множестве D_x найдется вершина, внешняя относительно одной из трех проведенных прямых, в множестве D_y найдется вершина, внешняя относительно другой прямой и в множестве D_z найдется вершина, внешняя относительно оставшейся прямой. Тогда нарисуем внутренний треугольник и три треугольника, примыкающие к его сторонам и имеющие третьи вершины в найденных точках. В силу определения множеств D_x, D_y и D_z треугольники с соответствующими вершинами не перекрываются и в множестве S_1. Кроме того, аналогично предыдущему пункту, оставшиеся части множеств S_1 и S_2 можно совместно триангулировать, соединяя внутренние вершины с внешними.

2. В противном случае нетрудно сообразить, что подмножества D_x, D_y и D_z множества S_2 должны располагаться примерно так, как на рис. 18(б). Точнее, два из них должны полностью содержаться в одном из трех углов, образованных тремя проведенными прямыми. Для определенности будем считать, что это мно-

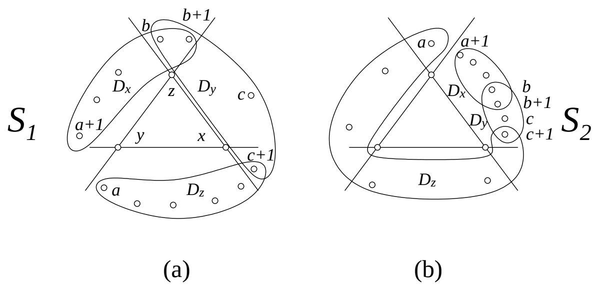

Рис. 18:

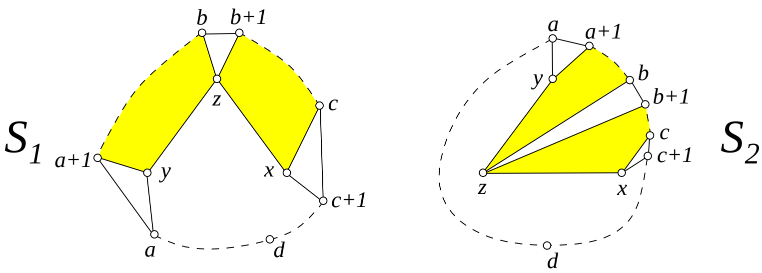

Рис. 19:

жества D_x и D_y. Тогда занумеруем внутренние вершины S_2 так, как показано на рис. 19. Можно считать, что множества D_x, D_y и D_z попарно не пересекаются. (В крайнем случае, можно переопределить эти множества, удалив точки пересечения двух множеств из одного из них. Это всегда возможно, кроме случая, когда два из них состоят из единственной точки P. Но тогда множество $S_1 \setminus P$ находится в выпуклом положении и совместные триангуляции существуют по утверждению задаче 2.1.) Пусть множество D_x состоит теперь из точек с номерами от $a+1$ до b, D_y — из точек с номерами от $b+1$ до c, и D_z — из точек с номерами от $c+1$ до a. Проведем в обоих множествах ребра, показанные на рис. 18. Многоугольник в S_1 с вершинами z, y, $a+1$, $\ldots$, b — выпуклый, поэтому допускает совместную триангуляцию с соответствующими многоугольником S_2. То же самое можно сказать и про многоугольник с вершинами x, z, $b+1$, $\ldots$, c. Поэтому осталось построить совместную триангуляцию многоугольников $yzx(c+1)\ldots d$. В этом многоугольнике в S_1 “невыпуклые” углы могут располагаться только при вершинах x и y. Если, например, угол при вершине x действительно оказался “невыпуклым”, то, как нетрудно видеть, найдется точка d в $D_z \setminus D_y$, для которой $\angle dxz < 180°$, причем отрезок xd не пересекает уже нарисованные ребра. Аналогичная точка найдется и для вершины y. Таким образом, проведя совместным образом не более двух ребер, мы разобьем многоугольник $yzx(c+1)\ldots d$ в S_1 на выпуклые части, которые уже можно триангулировать совместно с их аналогами в S_2.

2.9. Для доказательства нам потребуется следующая

Лемма. Рассмотрим выпуклый многоугольник P с вершинами v_1, $\ldots$, v_h, занумерованными против часовой стрелки, и произвольное множество I внутренних точек. Тогда для любых двух вершин v_i и v_j, между которыми есть хотя бы одна вершина многоугольника (т.е. $1 \leqslant i, j \leqslant h$, $i \leqslant j-2$), найдется простой путь π, удовлетворяющий следующим условиям:

(a) π начинается в v_i, проходит по всем внутренним точкам I и заканчиваетсяся в v_j.

(b) Многоугольник, ограниченный путем π и ломаной $v_i v_{i+1} \ldots v_j$ можно триангулировать, не задействуя ребер, соединяющих две вершины из π.

Если эта лемма будет доказана, ее можно будет применить к выпуклой оболочке множества S_2 и вершинам v_h, v_{m+1}. Триангуляцию многоугольника, упомянутую в свойстве (b), можно перенести на многоугольник $u_h u_{h+1} \ldots u_n u_{m+1} u_m \ldots u_2 u_1$. После этого для произвольной триангуляции оставшейся части S_2 можно создать совместную триангуляцию выпуклого многоугольника $u_h u_{h+1} \ldots u_n u_{m+1} u_{m+2} \ldots u_{h-1}$.

Доказательство леммы проведем индукцией по количеству d вершин P, расположенных между v_i и v_j. Пусть $d = j - i = 2$, т.е. между ними лежит только одна вершина v_{i+1} многоугольника. Тогда можно соединить точки из I в том порядке, в котором они видны из v_{i+1} по часовой стрелке, и связать их ребрами

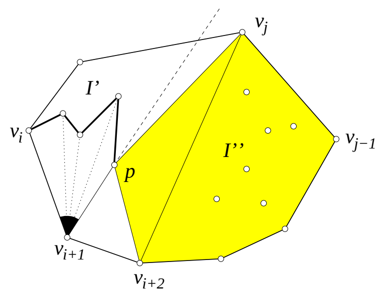

Рис. 20:

с точкой v_{i+1}.

Совершим индукционный переход от $d-1$ к d. Если все точки I лежат правее отрезка $v_{i+2}v_j$, вырежем из P треугольник $v_iv_{i+1}v_{i+2}$ и в оставшегося многоугольнике воспользуемся индукционным предположением для прежних вершин v_i и v_j: расстояние вдоль выпуклой оболочки между ними уменьшилось на 1.

В противном случае, когда левее отрезка $v_{i+2}v_j$ присутствуют точки из I, выберем из них такую точку p, для которой угол $\angle v_iv_{i+1}p$ максимален (см. рис. 20). Соединим p с v_{i+1} и v_{i+2} и заметим, что в получившемся треугольнике нет точек I. Рассмотрим теперь многоугольник $Q = pv_{i+2}\ldots v_j$ (закрашенный на рис. 20). Пусть I' и I'' — подмножества I, состоящие из точек, лежащих вне и внутри Q, соответственно. По построению, справа от $v_{i+1}p$ нет точек I'. Аналогично рассуждениям, проведенным для случая $d=2$, построим простой путь, состоящий из вершин $I' \cup \{v_i, p\}$, и триангулируем многоугольник, органиченный этим путем и ломаной $v_iv_{i+1}p$. Наконец, применим индукционное предположение к многоугольнику Q, в котором расстояние между вершинами p и v_j равно $d-1$. Мы получим простой путь по вершинам $I'' \cup \{p, v_j\}$. Объединение двух построенных путей по-прежнему является простым путем и полностью удовлетворяет требованиям леммы.

3 Преобразования триангуляций

3.1. Автор задачи Ю. Лифшиц, задача предлагалась на Санкт-Петербургской олимпиаде 2002 г. Мы приводим решение из замечательной книжки [1], задача 77.

Докажем утверждение задачи индукцией по числу вершин. База (четырехугольник) очевидна. Переход. Найдем треугольник ABC в первом разрезании, две стороны которого — AB и BC — совпадают со сторонами F. Такой треугольник существует — это хорошо известный факт. Например, можно взять диагональ разрезания, соединяющую вершины, между которыми расположено наименьшее число сторон. Эта диагональ и отрезает требуемый треугольник. Если во втором разрезании треугольник ABC также присутствует, то можно его отрезать и применить индукционное предположение к много- угольнику $F \setminus \triangle ABC$. В противном случае рассмотрим все треугольники с вершиной B, входящие во второе разбиение: ABD_1, D_1BD_2, $\ldots$, $D_{k-1}BD_k$, D_kBC. Покажем, как найти выпуклый четырехугольник, лежащий в F.

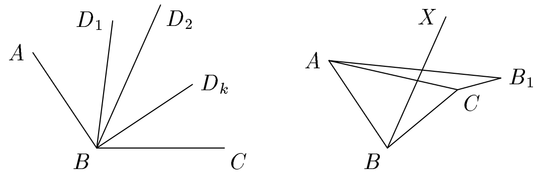

Рис. 21:

1-й способ (рис. 21, слева). В случае, когда хотя бы один из углов $\angle AD_1D_2$, $\angle D_1D_2D_3$, $\ldots$, $\angle D_{k-1}D_kC$ меньше 180°, два соответствующих соседних треугольника образуют искомый выпуклый четырехугольник. Если же все эти углы больше 180°, то поскольку вершины D_1, D_2, $\ldots$, D_k лежат вне треугольника ABC, сумма углов $\angle D_1AB$, $\angle ABC$ и $\angle BCD_k$ также больше 180°. Таким образом, сумма углов многоугольника $CBAD_1D_2\ldots D_k$ больше $(k+1)\cdot 180°$, что невозможно. Противоречие.

2-й способ. Докажем, что один из четырехугольников $ABCD_i$ целиком лежит в F. Проведем через вершины D_1, $\ldots$, D_k прямые ℓ_1, $\ldots$, ℓ_k, параллельные диагонали AC. Пусть прямая ℓ_m — ближайшая к AC. Тогда диагонали BD_i (при $i \neq m$, $1 \leqslant i \leqslant k$) во внутренних точках пересекают прямую ℓ_m, следовательно, четырехугольник BAD_mC содержится в многоугольнике $BAD_1\ldots D_kC$, а значит, и в F.

3-й способ (рис. 21, справа). Нам потребуется существование внутри угла ABC лишь одной вершины X многоугольника F, для которой отрезок BX лежит внутри F (в качестве X можно взять любую из вершин D_k). Дальше мы рассматриваем только первое разбиение. К стороне AC прилегает треугольник ACB_1, причем точка B_1 лежит вне угла ABC (иначе B_1ABC — нужный выпуклый четырехугольник). Не умаляя общности можно считать, что отрезок AB_1 пересекает луч BC. Может ли отрезок AB_1 быть стороной F? Нет, не может, поскольку отрезки BX и AB_1 пересекаются. Значит, AB_1 — диагональ и к ней прилегает еще один треугольник, AB_1C_1. Опять же, один из отрезков, B_1C_1 или AC_1, пересекает обе стороны угла ABC и луч BX (иначе ACB_1C_1 — нужный нам четырехугольник). И этот отрезок снова не может быть стороной F из-за пересечения с BX. Продолжая в том же духе, получим, что у F бесконечно много вершин, — противоречие.

3.2. Задача предлагалась на осеннем туре X Турнира городов ([3]), ее предложил Д. Фомин по мотивам результатов статьи [16].

а) Зафиксируем какую-нибудь вершину X нашего выпуклого n-угольника. Пусть в некоторой триангуляции T_1 из этой вершины выходят k диагоналей. Тогда не более чем за $n-3-k$ перестройки ее можно привести к триангуляции T_X, в которой все $n-3$ диагонали выходят из вершины X. Для этого достаточно научиться за одну перестройку увеличивать количество выходящих из X диагоналей. Это совсем просто: пусть некоторая диагональ XY не является ребром текущей триангуляции. Рассмотрим ближайшие к ней диагонали (или стороны) XA и XB, выходящие из X, и выполним перестройку в четырехугольнике $AXBY$, в результате которой XY станет ребром триангуляции.

Теперь рассмотрим две данные триангуляции T_1 и T_2. Выберем вершину X так, что бы из нее выходило хотя бы одно ребро в T_1. Тогда для преобразования T_1 в триангуляцию T_X потребуется не более $n-4$ перестроек, а для обратного преобразования T_X в T_2 — не более $n-3$. Итого, всего не более $2n-7$ ходов.

б) Достаточно применить способ из предыдущего пункта, выбрав вершину X так, чтобы из нее суммарно в обоих триангуляциях выходило не менее 4 диагоналей. Такая вершина обязательно найдется. Действительно, предположим, что из любой вершины в T_1 и в T_2 в сумме выходит не более трех диагоналей. Тогда всего в этих двух триангуляциях не более $3n/2$ диагоналей. Но общее число диагоналей равно, разумеется, $2(n-3)$. Осталось заметить, что $3n/2 < 2(n-3)$ при $n > 12$. Противоречие.

в) В статье [16] доказано, что при всех достаточно больших n существуют две триангуляции, для преобразования которых друг в друга потребуется $2n-10$ перестроек. Но неизвестно, при всех ли $n > 12$ этот факт имеет место.

В дальнейшем под термином "внутренняя диагональ" мы будем понимать диагональ многоугольника, полностью расположенную внутри него.

3.3. Проведем индукцию по числу вершин многоугольника. Если в нем всего три вершины, то утверждение задачи очевидно. Совершинм индукционный переход.

Рассмотрим первую триангуляцию T_1 данного многоугольника. Найдем в ней "ухо" ABC. Пусть во второй триангуляции T_2 из вершины B выходит k диагоналей BD_1, BD_2, $\ldots$, BD_k (k может оказаться равным нулю). Тогда треугольники ABD_1, D_1BD_2, $\ldots$, $D_{k-1}BD_k$, D_kBC присутствуют в триангуляции T_2, причем все вершины $D_1, \ldots D_k$ лежат вне треугольника ABC, ибо он входит в первую триангуляцию. Из этого, как и в решении задачи 3.1, следует, что один из углов $\angle AD_1D_2$, $\angle D_1D_2D_3$, $\ldots$, $\angle D_{k-1}D_kC$ меньше 180°. Если, скажем, $\angle D_{i-1}D_iD_{i+1} < 180°$, то в выпуклом четырехугольнике $BD_{i-1}D_iD_{i+1}$ можно сделать перестройку. Эта операция удаляет диагональ BD_i, что уменьшает количество диагоналей, выходящих из вершины B во второй триангуляции. Через несколько шагов ни одной такой диагонали не останется, то есть в T_2 будет присутствовать ребро AC и треугольник ABC. Теперь можно отрезать от многоугольника этот треугольник и воспользоваться индукционным предположением.

3.4. Если внимательно изучить решение предыдущей задачи, нетрудно убедиться, что количество перестроек, необходимых для перевода триангуляции T_1 многоугольника P в триангуляцию T_2, не превосходит количества *внутренних* диагоналей P.

Действительно, количество операций, при помощи которых во вторую триангуляцию удалось вставить треугольник ABC из первой триангуляции, не превосходит количества внутренних диагоналей, выходящих из вершины B. После отрезания треугольника ABC мы будем работать с оставшейся частью многоугольника, и в ней не остнется ни одной из этих диагоналей. Поэтому ни одну из внутренних диагоналей многоугольника мы не "используем" более одного раза.

Осталось заметить, что число внутренних дианоналей многоугольника не превосходит общего числа его диагоналей, т. е. $n(n-3)/2 \leqslant n^2/2$, так что в качестве константы C в условии можно взять $C = 1/2$.

3.5. [12, теорема 3.8] Рассмотрим произвольную триангуляцию многоугольника $Q_{a,b}$. Все ее треугольники можно разделить на два класса: примыкающие к верхней ломаной (выпуклой вниз) и примыкающие к нижней ломаной (выпуклой вверх). Поставим в каждый треугольник первого класса цифру 1, а в каждый треугольник второго класса — цифру 0. Теперь, просматривая последовательность треугольников слева направо, мы получаем последовательность, состоящую из a единиц и b нулей. Ясно, что любая перестройка приводит к перестановке (транспозиции) двух соседних цифр в этой последовательности. Нетрудно показать, что любые две такие последовательности можно перевести друг в друга при помощи не более, чем ab транспозиций (для этого достаточно, например, сначала поставить самую первую единицу на свое место, затем вторую, и т. д. — каждый из a этапов занимает не более b шагов). С другой стороны, последовательности $11\ldots100\ldots0$ и $00\ldots011\ldots1$ нельзя получить друг из друга быстрее (для этого потребуется количество транспозиций, не меньшее, чем разность между суммами порядковых мест единиц в конечной и начальной позициях). Поэтому эти две последовательности (и соответствующие им триангуляции) и являются самыми далекими друг от друга — расстояние между ними равно ab.

3.6. Для четного $n = 2k$ рассмотрим многоугольник $Q_{k,k}$ из предыдущей задачи. Расстояние между описанными выше его триангуляциями равно $k^2 = n^2/4$, так что $W(n) \geqslant n^2/4$. Поэтому для четных n подойдет константа $c = 1/4$.

Для нечетного $n = 2k+1$ из рассмотрения многоугольника $Q_{k,k+1}$ получаем, что

$$W(n) \geqslant k(k+1) = (n^2-1)/4\,.$$

Значит, для нечетных n подойдет, например, $c = 1/5$.

3.7.

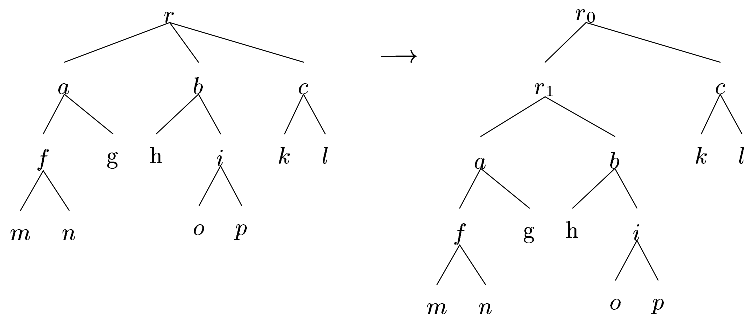

Рис. 22: Корень степени 3 получается стягиванием ребра.

4 Подсчет количества триангуляций

4.1. [14] Пусть $v = \sum v_i$ — количество внутренних, $b = \sum b_j$ — количество граничных точек выпуклой оболочки данного множества, e и t — количество ребер и треугольников в триангуляции T. Подсчитывая ребра по их принадлежности треугольникам, мы получаем, что $3t = 2e - b$. По формуле Эйлера $t - e + b + v = 1$. Эти два равенства дают нам, что

$$6v + 4b = 6 + 2e\,.$$

С другой стороны, подсчитывая ребра при помощи вершин, мы находим, что

$$2e = \sum iv_i + \sum jb_j\,.$$

Следовательно, $6v + 4b = 6 + \sum iv_i + \sum jb_j$. Подставим $v = \sum v_i$, $b = \sum b_j$ и добавим к обеим частям $n = \sum v_i + \sum b_j$. Убрав отрицательные слагаемые из правой части, получим требуемое неравенство.

4.2. а, б) [14] Обозначим через h_k количество триангуляций, которые можно получить добавлением точки p, в которых точка p имеет степень k. Докажем, что

$$h_k \leqslant c_{k-1} - c_{k-2} = \frac{3}{2k-3} C_{2k-3}^{k-3}\,.$$

Обозначим через Δ треугольник триангуляции T', который содержит точку p. После добавления точки p объединение k треугольников с вершиной p будет представлять собой “звездообразный” многоугольник Q с “центром” p, являющийся объединением $k-2$ треугольников триангуляции T' и не содержащий внутри других точек множества A. И наоборот, любой многоугольник с такими свойствами дает способ добавления точки p к триангуляции.

Очевидно, каждый из треугольников t триангуляции T', составляющих Q, целиком виден из точки p в том смысле, что строго внутри выпуклой оболочки $t \cup p$ не содержится точек множества A. Пусть G обозначает дуальный граф триангуляции T' (его вершины — это треугольники из T'; ребрами соединены треугольники, имеющие общую сторону; мы уже сталкивались с таким графом в решении задачи 1.4в). Обозначим через W подграф в G, порожденный треугольниками, видимыми из p. Этот подграф заведомо не содержит циклов, поскольку если изобразить W на плоскости, располагая его вершины в центрах треугольников, то любой цикл будет содержать внутри вершину одного из треугольников, которая будет “заслонять” какой-то из треугольников этого цикла. Тогда W — это лес. Рассмотрим дерево V, которое содержит Δ; можно считать, что Δ — его корень. Число h_k равно количеству корневых поддеревьев в V с $k-2$ вершинами.

Заметим, что V — это дерево, корень которого имеет степень не более 3, а все его поддеревья суть бинарные деревья. Число поддеревьев с $k-2$ вершинами, содержащих корень, не превосходит числа таких поддеревьев в бесконечном дереве, корень которого имеет трех сыновей, каждый из которых является корнем бесконечного бинарного дерева. Мы можем интерпретировать корень степени 3 как результат стягивания ребра в настоящем бесконечном бинарном дереве (см. рис. 22). Тогда нас интересуют те корневые поддеревья, которые всегда содержат левый потомок корня (т. е. содержат стянутое ребро) и имеют $k-1$ вершин. Очевидно, имеется $c_{k-1} - c_{k-2}$ таких поддеревьев.

Отметим, что для точки p, которая является вершиной выпуклой оболочки n-точечного множества A, аналогично можно доказать оценку $h_k \leqslant c_{k-2}$.

4.3. [8] Выберем прямую, проходящую через какие-нибудь две из данных точек, такую что по разные стороны от нее лежит соответственно n_1 и n_2 точек (точки на прямой мы относим к обеим полуплоскостям, поэтому $n_1+n_2=n+2$). Любая триангуляция множеств точек, лежащих в полуплоскостях может быть достроена до триангуляции всего множества точек. Но таким способом мы, конечно, сумеем задать не все триангуляции.

4.4. 1. [8] Нетрудно доказать оценку $t_n \geqslant \alpha^{n-2}$ для всех n, если только она верна для небольших n. Это следует из задачи 4.3. Действительно, последовательность $u_n = \alpha^{n-2}$, очевидно, удовлетворяет всем рекуррентным соотношениям вида $u_p u_q = u_{p+q-2}$. Если $t_n \geqslant u_n$, скажем, при $n = k, \ldots, 2k-3$, то оно выполнено и при $n \geqslant 2k-2$. В самом деле, при $m \geqslant 0$

$$t_{2k-2+m} \geqslant t_k t_{k+m} \geqslant u_k u_{k+m} = u_{2k-2+m}\,.$$

В качестве конкретного α возьмем, например, $\alpha = \sqrt[3]{2}$. Тогда $t_n \geqslant \alpha^{n-2}$ при $n = 5, 6, 7$, как легко проверить с помощью таблицы 4.

2. [14] Для получения верхней оценки на t_n достаточно привести пример множества из n точек, которое допускает довольно мало триангуляций.

Рассмотрим выпуклый многоугольник $P = A_1A_2\ldots A_k$. Близко к середине каждой стороны A_iA_{i+1} внутри многоугольника поставим точку B_i (около середины стороны A_kA_1 поставим точку B_k). Подсчитаем количество триангуляций получившегося $2k$-точечного множества.

В любой триангуляции обязаны присутствовать треугольники $A_1B_1A_2, \ldots, A_kB_kA_1$. Поэтому количество триангуляций этого множества совпадает с количеством триангуляций многоугольника $Q = A_1B_1A_2B_2\ldots A_kB_k$.

Пусть B_i' — точка, симметричная B_i относительно A_iA_{i+1} $(i = 1, \ldots, k)$, а Q' — выпуклый многоугольник $A_1B_1'A_2B_2'\ldots A_kB_k'$. Ясно, что количество триангуляций у Q в точности равно числу тех триангуляций Q', в которых отсутствуют диагонали A_iA_{i+1}, т.,е. ни одна из вершин B_i' не является ухом. Это число нетрудно найти с помощью формулы включений-исключений: оно равно $N = \sum\limits_{i=0}^{k}(-1)^iC_k^i c_{2k-i-2}$. Можно проверить неравенство $N \leqslant 12^k$. Таким образом, получена оценка $t_n \leqslant 12^{n/2} = \sqrt{12}^{\,n}$.

3. Достаточно взять множество множество вершин многоугольника $Q_{n,n}$ (в обозначениях задачи 3.5), состоящее из $2n$ точек. Любая триангуляция такого множества необходимо содержит границу выпуклой оболочки и все отрезки, соединяющие соседние точки на каждой из двух выпуклых кривых. Эти "необходимые" отрезки делят выпуклую оболочку на три части, две из которых — это сплюснутые выпуклые n-угольники, а третья — сам многоугольник $Q_{n,n}$. Чтобы построить триангуляцию, необходимо триангулировать каждую из частей. Таким образом, это множество имеет $(c_{n-2})^2 C_{2n-2}^{n-1}$ триангуляций, что дает оценку $T_{2n} \geqslant 4^{3n+O(\log n)}$, т. е. $T_n \geqslant 2^{3n+O(\log n)}$.

4. Мы опишем две конструкции, дающие оценку сверху.

[15] Предлагается закодировать триангуляцию двоичной последовательностью. Удается обойтись последовательностью из $13n$ знаков, что дает оценку $E = 2^{13}$. В конструкции используется утверждение проблемы четырех красок.

Будем кодировать триангуляцию n точек последовательностью из $f(n)$ битов. Будем строить кодировку так, чтобы последовательность $f(n)$ была возрастающей.

Пусть дана некоторая триангуляция. Рассмотрим ее как плоский граф, тогда согласно теореме о четырех красках, вершины этого графа можно правильно раскрасить в четыре цвета. Это значит, что найдется множество из не менее чем $n/4$ независимых вершин. Удалим временно эти вершины из триангуляции вместе со всеми выходящими из них ребрами. При удалении одной вершины, если она не была крайней, образуется "дыра". Разным удаляемым вершинам в силу их независимости будут соответствовать разные дыры. После удаления всех намеченных вершин триангулируем получившиеся дыры произвольным образом. Получится триангуляция некоторого множества из $\lfloor 3n/4 \rfloor$ вершин. Теперь посмотрим, какую информацию нам следует сохранить, чтобы по этой триангуляции можно было восстановить исходную триангуляцию.

Мы считаем, что все наши точки с самого начала пронумерованы и тем самым и точки и ребра лексикографически упорядочены.

Во-первых, всего при помощи n битов мы можем указать, какие вершины были удалены: i-й бит несет информацию о том, была ли удалена i-я вершина или нет.

Во-вторых, по утверждению задачи 2.1 любая триангуляция любого множества из k точек содержит не более $3k$ ребер. Следовательно, если у нас осталась триангуляция множества из не менее чем $3n/4$ точек, то чтобы сообразить, какие ребра этой триангуляции были добавлены при "залатывании дыр", нам потребуется не более $3 \cdot 3n/4$ битов. Действительно, возьмем цепочку битов такой длины и договоримся, что k-й бит несет информацию о том, является ли k-е по счету ребро (относительно лексикографического порядка) добавленным или нет.

Таким образом, чтобы закодировать триангуляцию n-точечного множества, нам потребуется

$$f(n) \leqslant n + \frac{9n}{4} + f(\lfloor 3n/4 \rfloor)$$

битов. Вместе с начальным условием $f(3) = 0$ это дает нам решение $f(n) \leqslant 13n$.

В работе [15], из которой мы взяли это рассуждение, приводится также рецепт, как слегка улучшить оценку в правой части. Для этого заметим, что множество из $\lfloor 3n/4 \rfloor$ вершин можно выбрать $C_n^{\lfloor 3n/4 \rfloor} \leqslant 2^{0.8113n}$ способами. Значит, нам вместо n в общем-то хватит $0.8113n$ битов.

Опишем самую сильную из известных на данный момент оценок [14].

Пусть $N(v, b)$ обозначает максимально возможное количество триангуляций у множества, имеющего b граничных и v внутренних точек. Докажем по индукции, что $N(v, b) \leqslant 59^v \cdot 7^b / C^6_{v+b+6}$. База индукции $b = 3$, $v = 0$: $59^0 \cdot 7^3 / C^6_{0+3+6} = 49/12 \geqslant 1 = N(3, 0)$.

Переход. Пусть множество A имеет b граничных и v внутренних точек. Для каждого $i \geqslant 3$ обозначим через V_i сумму по всем триангуляциям множества A количества внутренних вершин степени i. Для каждого $j \geqslant 2$ обозначим через B_j сумму по всем триангуляциям множества A количества граничных вершин степени j. Пусть N — число триангуляций множества A. Заметим, что при удалении одной внутренней точки из множества A получается получается множество, имеющее b граничных и $v - 1$ внутренних точек; при удалении же граничной точки получается множество из $v + b - 1$ точек, не более v из которых — внутренние, количество триангуляций такого множества оценивается сверху величиной $N(v, b - 1)$.

Число триангуляций множества A, в которых определенная вершина p имеет степень i не превосходит количества способов добавить вершину p степени i к триангуляциям множества $A \setminus \{p\}$. Неравенство может быть строгим, поскольку добавления вершины к разным триангуляциям могут приводить к одному и тому же результату. По утверждению задачи 4.2a) количество способов h_5 добавить внутреннюю вершину степени 5 не превосходит 9. Следовательно,

$$V_5 \leqslant 9vN(v - 1, b)\,.$$

Пользуясь оценками задачи 4.2, мы легко установим, что при добавлении внутренней вершины $h_3 = 1$, $h_4 \leqslant 3$, $h_6 \leqslant 28$; а при добавлении граничной вершины $h_2 \leqslant 1$, $h_3 \leqslant 1$, $h_4 \leqslant 2$. Это дает нам неравенства

$$\begin{aligned} V_3 &\leqslant vN(v-1,b)\,, & B_2 &\leqslant bN(v,b-1)\,,\\ V_4 &\leqslant 3vN(v-1,b)\,, & B_3 &\leqslant bN(v,b-1)\,,\\ V_6 &\leqslant 28vN(v-1,b)\,, & B_4 &\leqslant 2bN(v,b-1)\,. \end{aligned}$$

Теперь воспользуемся неравенством из задачи 4.1, которое просуммируем по всем триангуляциям:

$$(6 + v + b)N \leqslant 4V_3 + 3V_4 + 2V_5 + V_6 + 3B_2 + 2B_3 + B_4 \leqslant 59vN(v - 1, b) + 7bN(v, b - 1)\,.$$

По предположению индукции $N(v-1, b) \leqslant \frac{59^{v-1} \cdot 7^b}{C^6_{v+b+5}}$ и $N(v, b-1) \leqslant \frac{59^v \cdot 7^{b-1}}{C^6_{v+b+5}}$. Следовательно,

$$(6 + v + b)N \leqslant (v + b)\,\frac{59^v \cdot 7^b}{C^6_{v+b+5}} = (6 + v + b)\,\frac{59^v \cdot 7^b}{C^6_{v+b+6}}\,.$$

Литература

[1] *Берлов С., Иванов С., Карпов Д., Кохась К., Петров Ф., Храбров А.* Задачи Санкт-Петербургской олимпиады школьников по математике. 2002. СПб.: Невский Диалект, 2002.

[2] *Васильев Н.Б., Молчанов С.А., Розенталь А.Л., Савин А.П.* Математические соревнования. Геометрия. М.: Наука, 1974.

[3] *Двенадцать турниров.* Под ред. Константинова Н. Н. М.: инф. центр международного математического Турнира городов, 1991.

[4] *Дынкин Е.Б., Молчанов С.А., Розенталь А.Л., Толпыго А.К.* Математические задачи. М.: Наука, 1965.

[5] *Aichholzer O., Aurenhammer F., Hurtado F., Krasser H.* Towerds compatible triangulations.

[6] *Aichholzer O., Aurenhammer F., Krasser H.* On compatible triangulations of point sets.

[7] *Aichholzer O., Aurenhammer F., Cheng S.-W., Katoh N., Rote G., Taschwer M., Xu Y.-F.* Triangulations intersect nicely. // ??

[8] *Aichholzer O., Hurtado F., Noy M.* On the number of triangulations every planar point set must have. // Proc. 13th ann. Canadian conf. on computational geometry CCCG 2001, Waterloo, Canada. P. 13–16.

[9] *Aronov B., Seidel R., Souvaine D.* On compatible triangulations of simple polygons. // Computational Geometry: Theory and applications. V. 3. 1993. P. 27–35.

[10] *Hanke S., Ottmann T., Schuierer S.* The edge-flipping distance of triangulations.

[11] *Hurtado F., Noy M.* Ears of triangulations and Catalan numbers. // Discrete Math. V. 149. 1996. P. 319–324.

[12] *Hurtado F., Noy M., Urrutia J.* Flipping edges in triangulations. // Discrete and Comp. Geometry. V. 22. 1999. P. 333-346.

[13] *Lovász L.* Combinatorial problems and exercises. Budapest: Akadémiai Kiadó, 1979.

[14] *Santos F., Seidel R.* A better upper bound on the number of triangulations of a planar point set.

[15] *Seidel R.* Note on the number of triangulations of planar point sets // Combinatorica. V. 18 (2). 1998. P. 297–299.

[16] *Sleator D. D., Tarjan R. E., Thurston W. R.* Rotation distance, triangulations and hyperbolic geometry // Journal of the AMS. V. 1. 1988. N. 3. P. 647–681.