Задача предложена М. Скопенковым, О. Скрябиным и А. Шаповаловым (при участии И. Дынникова и А. Скопенкова)

Первая часть этой задачи посвящена доказательству следующей теоремы:

Теорема 1. *(Теорема Конвея–Гордона–Закса, 1981) Пусть в пространстве даны 6 точек, никакие 4 из которых не лежат в одной плоскости. Тогда найдутся два зацепленных треугольника с вершинами в этих точках.*

Вторая часть посвящена ее обобщению на произвольные зацепления (определения и примеры даны ниже). Две части задачи почти не используют друг друга, поэтому ее можно начинать решать как с пункта 1.1, так и с пункта 2.1.

1. Зацепленные треугольники

1.1 В любой компании из 6-ти человек найдутся либо трое попарно знакомых, либо трое попарно незнакомых.

1.2 На плоскости даны 5 точек, никакие три из которых не лежат на одной прямой. Докажите, что какие-то два отрезка с концами в этих точках пересекаются во внутренней точке.

Определение общего положения. Будем говорить, что набор точек в пространстве находится *в общем положении*, если никакие 4 из них не лежат в одной плоскости.

Пример 1. (Рис. 1) Рассмотрим в горизонтальной плоскости правильный шестиугольник. Набор точек A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6, расположенных в точности над его вершинами на высотах 1, 2, 3, 4, 5, 6 соотвественно, находится в общем положении.

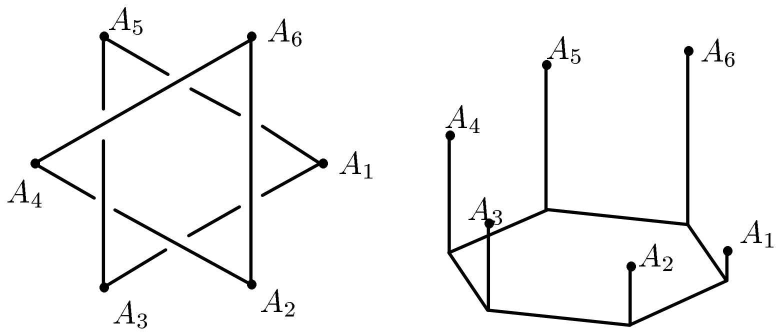


Рис. 1.

Пример 2. Точки $(t; t^2; t^3)$ в декартовой системе координат, где $t \in \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$, находятся в общем положении (предлагаем проверить это самостоятельно).

Определение коэффициента зацепления треугольников. Пусть Δ, Δ' — два треугольника, набор 6 вершин которых находится в общем положении. Будем говорить, что эти треугольники *зацеплены*, если контур треугольника Δ пересекает внутренность треугольника Δ' в единственной точке. *Коэффициентом зацепления* этих треугольников назовем число

$$\mathrm{lk}(\Delta, \Delta') = \begin{cases} 1, & \text{если } \Delta \text{ и } \Delta' \text{ зацеплены,} \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Пример 3. Треугольники $A_1A_3A_5$ и $A_2A_4A_6$ из примера 1 зацеплены.

1.3 Если контур одного из треугольников Δ и Δ' не пересекается с плоскостью, в которой лежит другой треугольник, то $\mathrm{lk}(\Delta, \Delta') = 0$.

Определение зацепленных пар точек. Пусть на горизонтальной прямой отмечено 2 красных и 2 синих точки (точки попарно различны). Будем говорить, что эти пары *зацеплены*, если они расположены на прямой в порядке (красная, синяя, красная, синяя) или (синяя, красная, синяя, красная), считая справа.

1.4 Треугольники Δ и Δ' зацеплены $\Leftrightarrow$ выполнены следующие 3 условия:

1) плоскости треугольников Δ и Δ' пересекаются по некоторой прямой l;

2) каждое из множеств $\Delta \cap l$ и $\Delta' \cap l$ состоит из двух точек (здесь и далее Δ и Δ' обозначают контуры треугольников);

3) пары точек $\Delta \cap l$ и $\Delta' \cap l$ зацеплены на прямой l.

1.5 $\mathrm{lk}(\Delta, \Delta') = \mathrm{lk}(\Delta', \Delta)$.

1.6 $\mathrm{lk}(\Delta, \Delta') = \mathrm{const}$, если Δ движется так, что набор 6 вершин треугольников Δ и Δ' остается в общем положении.

1.7 Пусть точка A_1 из примера 1 движется вверх с постоянной скоростью. Постройте график зависимости $\mathrm{lk}(A_1A_3A_5, A_2A_4A_6)$ от времени.

Определение зацепленности шестерки точек. Пусть в пространстве даны 6 точек общего положения. Назовем *разделенной парой* два треугольника с вершинами в этих точках, не имеющие общих вершин. *Зацепленностью* данной шестерки точек назовем количество зацепленных разделенных пар.

Замечание. Зацепленность шестерки точек равна

$$\sum \mathrm{lk}(\Delta, \Delta'),$$

где сумма берется по всем разделенным парам (Δ, Δ').

1.8 Докажите, что четность зацепленности не зависит от выбора шестерки точек.

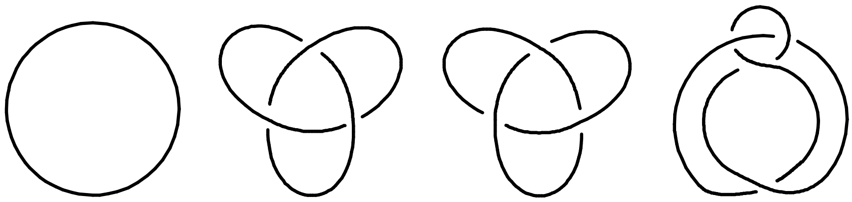
1.9 Приведите пример шестерки точек, зацепленность которой равна 1.

1.10 Докажите теорему 1.

2. Вписанные узлы и зацепления

Основные понятия. *Узел* можно представлять себе как веревку, концы которой соединены. Веревку будем считать эластичной, и узлы, получающиеся друг из друга деформацией веревки, различать не будем.

Примеры *различных* узлов: тривиальный K, правый и левый трилистники T, восьмерка E (рис. 2).

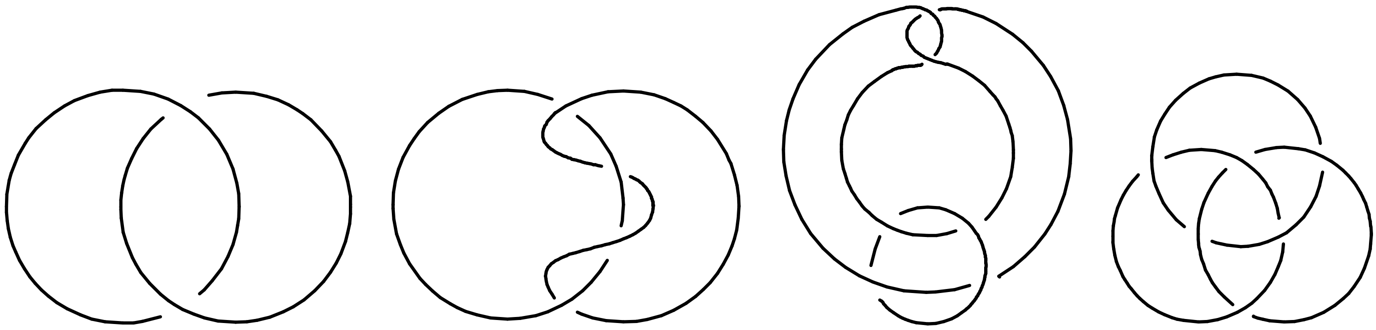


K $\quad$ $T п$ $\quad$ $T л$ $\quad$ E

Рис. 2.

Если взять не одну веревку, а несколько, и у каждой из них соединить концы, то получим *зацепление*.

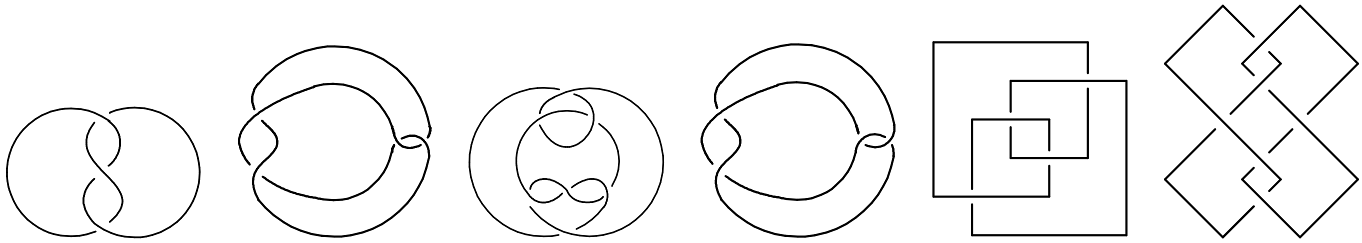
Примеры *различных* зацеплений: зацепление Хопфа H (или простое зацепление), двойное зацепление D, зацепление Уайтхеда W, кольца Борромео B (рис. 3).



H $\quad$ D $\quad$ W $\quad$ B

Рис. 3.

2.1 В какие из узлов и зацеплений, изображенных на рис. 2 и 3, можно продеформировать узлы и зацепления на рис. 4?



а *б* *в* *г* *д* *е*

Рис. 4.

Определение вписанного узла и зацепления. Пусть в пространстве дано некоторое множество точек и узел. Если веревку продеформировать в ломаную, все вершины которой принадлежат данному множеству то получим узел, *вписанный* в данное множество точек. (При этом часть точек множества может остаться незадействованной). Будем говорить также, что полученная ломаная *представляет* данный узел. Аналогично определяется *вписанное* зацепление.

Замечание. Если каждую точку множества соединить прямолинейным отрезком с каждой из остальных точек, то вписанный узел является подмножеством полученной фигуры.

Теорема 2. *(Теорема Негами, 1991) Для любого узла найдется число N такое, что в любое множество N точек в пространстве, никакие 4 из которых не лежат в одной плоскости, можно вписать данный узел.*

(Попробуйте доказать эту теорему для трилистника. Указания, а также связанные с этой теоремой открытые вопросы будут даны в задачах после промежуточного финиша.)

2.2 Докажите, что всякий узел, вписанный в набор из ≤ 5 точек, тривиален.

2.3 В какой наименьший набор точек можно вписать а) простое зацепление; б) кольца Борромео; в) трилистник; г) двойное зацепление; д) восьмерку; е) зацепление Уайтхеда? (Доказательства минимальности мы не требуем).

2.4 Найдите коэффициенты зацепления (см. определение выше):

а) двух треугольников, представляющих простое зацепление;

б) двух из трех треугольников, представляющих кольца Борромео.

2.5 Пусть даны два треугольника в пространстве. Предположим, что проекции никаких 3 из их 6 вершин на горизонтальную плоскость не лежат на одной прямой. Изобразим на рисунке проекции треугольников и в каждой точке пересечения проекций (*перекрестке*) укажем, сторона какого треугольника проходит выше (рис. 1). Докажите, что коэффициент зацепления равен четности числа перекрестков, в которых сторона первого треугольника проходит выше стороны второго.

Вписанные зацепления: дополнительные задачи

1. Зацепленные четырехзвенные ломаные

Теорема 1'. *(Теорема Закса, 1981) Пусть в пространстве даны 4 красные и 4 синие точки, причем никакие два отрезка с разноцветными концами не имеют общих внутренних точек. Тогда найдутся две зацепленные замкнутые четырехзвенные ломаные с вершинами в этих точках, звенья которых соединяют точки разных цветов.*

1'.1 На плоскости даны три синие и три красные точки, причем никакие три точки не лежат на одной прямой. Докажите, что найдутся два отрезка с разноцветными концами, пересекающиеся во внутренней точке.

Определение коэффициента зацепления четырехзвенных ломаных. Пусть $\square$ и $\square'$ — две замкнутые четырехзвенные ломаные в пространстве, с вершинами A, B, C, D и A', B', C', D' соответственно, находящимися в общем положении. Их *коэффициентом зацепления* назовем остаток при делении на 2 количества точек пересечения контура $ABCD$ с объединением треугольников $A'B'C'$ и $A'D'C'$.

1'.2 Докажите, что $\mathrm{lk}(ABCD, A'B'C'D') = \mathrm{lk}(ABCD, B'C'D'A')$.

1'.3 Докажите свойства коэффициента зацепления замкнутых четырехзвенных ломаных, аналогичные 1.5, 1.6.

1'.4 Дайте определение коэффициента зацепления четырехзвенных ломаных в случае, когда требование общего положения заменено более слабым требованием $\square \cap \square' = \emptyset$ так, чтобы сохранились предыдущие свойства.

Определение общего положения в случае двух цветов. Набор точек в пространстве, окрашенных в два цвета, называется набором *общего положения*, если никакие два отрезка с разноцветными концами не имеют общих внутренних точек.

Определение разделенной пары четырехзвенных ломаных. Пусть в пространстве дан набор 4-х красных и 4-х синих точек общего положения. Назовем *разделенной парой* две замкнутые четырехзвенные ломаные со следующими свойствами: (1) их вершины расположены в данных точках; (2) они не имеют общих вершин; (3) их звенья соединяют точки разных цветов.

1'.5 Пусть 4 красные точки лежат на одной прямой, а 4 синие — на другой прямой, скрещивающейся с ней. Найдите в этом случае все разделенные пары $(\square, \square')$, для которых $\square$ и $\square'$ зацеплены.

1'.6 Дайте определение зацепленности для четверки синих и четверки красных точек и докажите, что она четна.

1'.7 Докажите теорему 1'.

1'.8 Докажите, что в предположениях теоремы 1' найдутся хотя бы две пары зацепленных замкнутых четырехзвенных ломаных.

Задачи, предложенные после промежуточного финиша

(Решения не используют результатов предыдущих пунктов)

2. Вписанные узлы и зацепления

Определение узла (зацепления), вписанного в раскрашенное множество. Пусть в пространстве дано множество точек, окрашенных в два цвета. Тогда под *вписанным узлом* будем понимать ломаную, представляющую данный узел, звенья которой соединяют точки разных цветов. *Вписанное зацепление* определяется аналогично (см., например, теорему 1').

Теорема 2'. *(Теорема Миёчи, 1994) Для любого узла (зацепления) найдется число N такое, что в любое множество N синих и N красных точек в пространстве, никакие 4 из которых не лежат в одной плоскости, можно вписать данный узел (зацепление).*

(Очевидно, теорема Негами следует из теоремы Миёчи).

Определение положительного набора. Пусть в пространстве дан набор N синих и N красных точек, находящийся в общем положении (смотри определение выше). Проведем все отрезки, соединяющие точки разного цвета. Нарисуем на горизонтальной плоскости проекцию полученной фигуры. В дальнейшем нас будет интересовать только эта плоская картинка, и мы будем говорить 'точка набора' и 'отрезок', подразумевая соответственно 'проекция точки набора' и 'проекция проведенного нами отрезка'.

Пусть точки набора не попадают внутрь отрезков. В каждой точке пересечения отрезков (*перекрестке*) укажем, какой из отрезков проходит выше (как в задаче 2.5). Назовем перекресток *положительным* (рис. 1' слева), если при движении по отрезку, который проходит выше, от синего конца к красному синий конец другого отрезка остается слева. Иначе перекресток назовем *отрицательным* (рис. 1' справа).

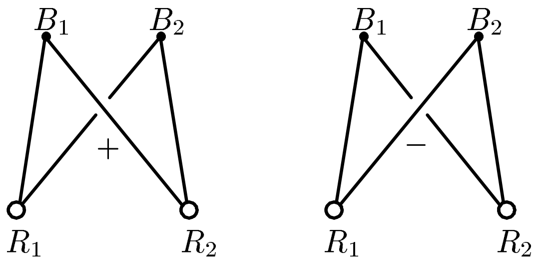


Рис. 1'.

Исходный набор точек назовем *положительным*, если для любых двух синих точек B_1, B_2 и любых двух красных точек R_1, R_2 одна из пар отрезков B_1R_1, B_2R_2 и B_1R_2, B_2R_1 пересекается во внутренней точке, причем полученный перекресток положителен. Аналогично определяется *отрицательный* набор.

Пример 1'. Пример положительного набора изображен на рис. 2' (сравни с задачей 1'.5).

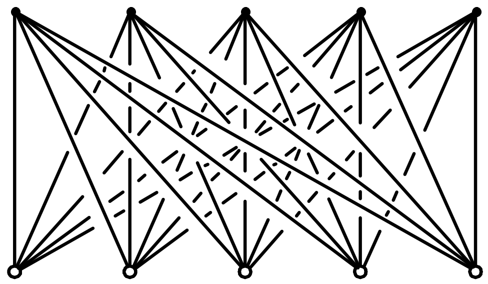


Рис. 2'.

2'.1 Раскрасьте точки из примера 1 в два цвета так, чтобы получился отрицательный набор.

В задачах 2'.2–2'.5 предполагается, что дан некоторый положительный набор, причем $N \geq 2$.

2'.2 Все синие точки лежат по одну сторону от любой прямой, соединяющей две красные точки.

Определение порядка '>'. Пусть дан положительный набор. Пусть R_1 и R_2 — две красные точки. Скажем, что $R_1 > R_2$, если при движении по прямой R_1R_2 от R_1 к R_2 все синие точки остаются справа.

2'.3 Если $R_1 > R_2$ и $R_2 > R_3$, то $R_1 > R_3$.

2'.4 Если отрезок R_1B_1 проходит выше R_2B_2, то $R_1 > R_2$.

2'.5 Красные и синие точки можно занумеровать так, что при любых $i < j$ и $k \neq l$ отрезок R_iB_k проходит выше R_jB_l.

2'.6 Впишите трилистник в набор точек из примера 1'.

2'.7 В любой положительный набор 5 синих и 5 красных точек можно вписать трилистник.

2'.8 (Теоремы Рамсея) а) Докажите, что для любых m и n найдется такое $R(m,n)$, что при любой раскраске ребер полного графа с $R(m,n)$ вершинами в два цвета найдется либо полный подграф первого цвета с m вершинами, либо полный подграф второго цвета с n вершинами.

б) Сформулируйте и докажите обобщение пункта а) на случай трех цветов.

в) Сформулируйте и докажите обобщение пунктов а) и б) на полные двудольные графы.

г) Назовем набор точек общего положения в пространстве, окрашенных в два цвета, *нейтральным*, если проекции на плоскость любых двух отрезков с разноцветными концами не пересекаются (во внутренних точках). Докажите, что для любого n найдется такое $R(n)$, что любой набор $R(n)$ синих и $R(n)$ красных точек общего положения в пространстве содержит либо положительный, либо отрицательный, либо нейтральный набор n синих и n красных точек.

д) Докажите, что для любого n найдется такое $R(n)$, что любой набор $R(n)$ синих и $R(n)$ красных точек общего положения в пространстве содержит либо положительный, либо отрицательный набор n синих и n красных точек.

2'.9 Докажите теоремы Миёчи и Негами для трилистника.

2'.10 Впишите узлы и зацепления на рис. 2, 3 в какие-нибудь положительные наборы точек и докажите для них теоремы Миёчи и Негами.

Вписанные зацепления: домашнее задание

2. Вписанные узлы и зацепления

Лемма о двух спицах. *Пусть в пространстве даны две скрещивающиеся прямые. Для любого узла найдется такое N, что данный узел можно вписать в множество, состоящее из N красных точек на первой прямой и N синих точек на второй прямой.*

(Иными словами, любой узел можно натянуть на две спицы.)

Определение прямоугольного представления узла. (Рис. 3' слева, рис. 2д) Будем говорить, что задано *прямоугольное представление* узла, если проекция веревки на плоскость обладает следующими свойствами:

$\sqsubset$) проекция состоит из некоторого числа вертикальных и горизонтальных отрезков;

$-$) никакие два вертикальных отрезка не лежат на одной вертикальной прямой и никакие два горизонтальных отрезка не лежат на одной горизонтальной прямой;

$\div$) если вертикальный и горизонтальный отрезок пересекаются, то "горизонтальная" часть веревки проходит выше "вертикальной".

Определение *прямоугольного представления* зацепления аналогично.

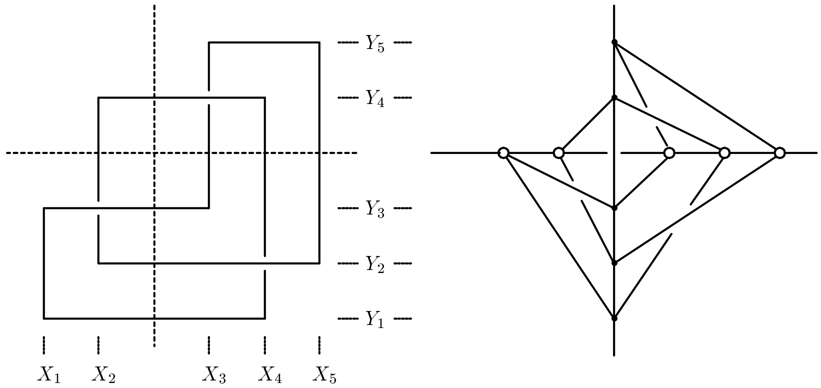


Рис. 3'.

2'.11 Постройте прямоугольные представления узлов и зацеплений с рис. 2 и 3.

Определение двойственного узла. (Рис. 3') Пусть дано прямоугольное представление некоторого узла. Пусть $X_1, X_2, \ldots, X_N$ — "координаты" вертикальных, а $Y_1, Y_2, \ldots, Y_M$ — "координаты" горизонтальных отрезков его проекции (рис. 3'). Рассмотрим две прямые, параллельные плоскости рисунка, одна из которых расположена под этой плоскостью и проходит горизонтально, а вторая расположена над этой плоскостью и проходит вертикально. Отметим на горизонтальной прямой точки с координатами $X_1, X_2, \ldots, X_N$, а на вертикальной — точки с координатами $Y_1, Y_2, \ldots, Y_M$. Обозначим через R_i точку на первой прямой с координатой X_i, а через B_j — точку на второй прямой с координатой Y_j. Соединим отрезками все пары отмеченных точек R_i, B_j, для которых точка (X_i, Y_j) на плоскости рисунка является концом некоторого отрезка проекции узла. В результате получим некоторую замкнутую ломаную. Узел, который представдяется этой ломаной, назовем узлом, *двойственным* к исходному. Определение *двойственного зацепления* аналогично.

Пример 2'. На рис. 3' изображены трилистник и двойственный к нему узел (трилистник).

2'.12 Нарисуйте двойственные узлы и зацепления для построенных Вами в задаче 2'.11 прямоугольных узлов и зацеплений. Что это за узлы?

2'.13 а) Докажите, что для любого узла существует прямоугольное представление.

б) Докажите, что любой узел можно продеформировать в двойственный к нему;

2'.14 Докажите лемму о двух спицах.

2'.15 Выведите из леммы о двух спицах теоремы Миёчи и Негами.

2'.16 (трудная) Описать все графы, при любом расположении которых в пространстве найдется пара зацепленных циклов.

2'.17 (известная открытая проблема) Описать все графы, при любом расположении которых в пространстве некоторый цикл оказывается заузленным.

[1] J. Conway, C. Gordon, *Knots and links in spatial graphs*, Journal of Graph Theory **7** (1983), 445–453.

[2] S. Negami, *Ramsey-type theorem for spatial graphs*, Graphs and Combinatorics **14** (1998), 75–80.

[3] M. Skopenkov, *Embedding products of graphs into Euclidean spaces*, Fundamenta Mathematicae, to appear.

Решения задач, предложенных до промежуточного финиша

1.1 Рассмотрим граф, состоящий из шести вершин и всех ребер, соединяющих их. Каждому человеку сопоставим вершину этого графа. Если двое людей знакомы, то ребро, соединяющее соответствующие им вершины, покрасим в красный цвет, иначе — в синий цвет. Рассмотрим некоторую вершину A. По принципу Дирихле найдутся три вершины X_1, X_2 и X_3 такие, что ребра AX_1, AX_2, AX_3 одного цвета. Для определенности считаем, что это — красный цвет. Если какое-то из ребер X_iX_j $(i,\ j \in \{1;2;3\})$ красного цвета, то все стороны треугольника AX_iX_j имеют красный цвет, и тем самым задача решена. В противном случае все стороны треугольника $X_1X_2X_3$ имеют синий цвет. И в этом случае задача тоже решена.

1.2 *Первое решение.* Если выпуклая оболочка рассматриваемых точек четырех- или пятиугольник, то утверждение задачи очевидно: пересекутся две диагонали. Рассмотрим случай, когда выпуклой оболочкой является треугольник ABC. Две оставшиеся точки D и E из данных пяти лежат внутри треугольника ABC. E лежит внутри одного из треугольников DAB, DAC или DBC — допустим, в DAC. Тогда EB пересекается с одним из отрезков DA или DC.

Второе решение. Утверждение этой задачи является двумерным аналогом теоремы 1 и может быть доказано аналогичным образом. Набор точек на плоскости назовем набором *общего положения*, если никакие три из них не лежат на одной прямой. Назовем *зацепленностью* пятерки точек общего положения число пар отрезков с концами в этих точках, пересекающихся во внутренней точке. Легко привести пример пятерки, зацепленность которой равна 1. После этого для доказательства утверждения задачи достаточно показать, что четность зацепленности не зависит от выбора 5 точек. Пусть даны две пятерки. Одну из них можно перевести в другую, по очереди двигая точки (причем движение можно считать равномерным). Пока точки движутся так, что пятерка остается в общем положении, зацепленность, очевидно, не меняется. Как только одна из точек (скажем, A) попадает на отрезок с концами в двух других точках (скажем, B и C), зацепленность либо не меняется, либо меняется на ± 2. Действительно, в такой момент меняется "состояние " (т. е. пересекающиеся отрезки становятся непересекающимися, и наоборот) ровно двух пар отрезков: AD, BC и AE, BC (где D и E две оставшиеся точки пятерки).

1.3 Достаточно доказать, что если $lk(\Delta, \Delta') = 1$ или $lk(\Delta', \Delta) = 1$, то контур треугольника Δ пересекает плоскость треугольника Δ'. Первый случай очевиден. Во втором случае контур треугольника Δ' пересекает внутренность треугольника Δ. Поэтому внутренность треугольника Δ пересекает плоскость треугольника Δ'. Однако в таком случае и контур треугольника Δ персекает плоскость треугольника Δ'.

1.4 Пусть треугольник Δ зацеплен с треугольником Δ'. Тогда выполнение условия 1) очевидно. Выполнение условия 2) следует из задачи 1.3. Действительно, так как треугольник Δ пересекает плоскость треугольника Δ', то множество $\Delta \cap l$ непусто. Из соображений общего положения следует, что оно не может состоять из одной точки. Докажем теперь выполнение условия 3). Пусть множество $\Delta \cap l$ состоит из двух точек A и B, а множество $\Delta' \cap l$ состоит из двух точек A' и B'. Все общие точки контура треугольника Δ и внутренности треугольника Δ' лежат на отрезке $A'B'$. Значит, ровно одна из точек A и B принадлежит отрезку $A'B'$. А это означает, что пары A, B и A', B' зацеплены на l.

Обратно, пусть пары A, B и A', B' зацеплены на l. Тогда согласно сказанному выше контур треугольника Δ пересекает внутренность треугольника Δ' в единственной точке, то есть Δ зацеплен с Δ'.

1.5 Каждое из условий $lk(\Delta, \Delta') = 1$ и $lk(\Delta', \Delta) = 1$ в соответствии с утверждением задачи 1.4 равносильно одному и тому же условию.

1.6 Из задачи 1.4 следует, что $lk(\Delta, \Delta') = 1$ тогда и только тогда, когда выполняются условия 1)-3). Никакое из этих свойств не может измениться при допустимом движении. В проверке нуждается только сохранения свойства 1), которое может нарушиться, только когда плоскости треугольников Δ и Δ' становятся параллельны. Но тогда из задачи 1.3 следует, что в этот момент, а также непосредственно до и после него $lk(\Delta, \Delta') = 0$.

1.7 При построении графика может оказаться полезной следующая лемма:

Лемма Пусть вершина A треугольника Δ движется равномерно по отрезку в пространстве, а остальные две вершины и треугольник Δ' неподвижны. Обозначим через Δ_t положение треугольника в момент времени t, где $0 \le t \le 2$. Предположим, что набор 6 вершин треугольников Δ_t и Δ' находится в общем положении при всех t, кроме $t = 1$.

а) Если $\Delta_1 \cap \Delta' = \emptyset$, то $\mathrm{lk}(\Delta_0, \Delta') = \mathrm{lk}(\Delta_2, \Delta')$.

б) Если Δ_1 и Δ' пересекаются в единственной точке, не совпадающей ни с одной из их вершин, то числа $\mathrm{lk}(\Delta_0, \Delta')$ и $\mathrm{lk}(\Delta_2, \Delta')$ отличаются на 1.

Доказательство этой леммы, построение графика и задачи 1.8-1.10 остаются в качестве задач после промежуточного финиша.

2.1 Самый правильный способ решить эту задачу — это взять веревку, завязать на ней узел с рис. 4 и попытаться продеформировать его в один из узлов на рис. 2, 3. То же относится к зацеплениям. Деформацию веревки удобно изображать на бумаге в виде серии картинок, в которой соседние картинки получаются друг из друга небольшой деформацией и отличаются мало.

2.2 Достаточно показать, что замкнутая ломаная с ≤ 5 звеньями незаузлена (то есть представляет тривиальный узел). Ясно, что треугольник незаузлен. Ясно, что если в n-угольнике (то есть n-звенной замкнутой ломаной) натянутый на пару соседних звеньев треугольник не пересечен никаким другим звеном, то эту пару звеньев можно стянуть по диагонали, то есть получить представление того же узла $(n-1)$-угольником. Поскольку в 4-угольнике препятствий для стягивания нет, то он стягивается в треугольник, и, значит, незаузлен. Пусть в 5-угольнике $ABCDE$ есть препятствие для стягивания пары звеньев AB и BC. Тогда звено DE пересекает треугольник ABC. Но тогда звено AE не пересекает треугольник BCD, так как они лежат по разные стороны от плоскости ABC.

2.3 *Ответы:* а) 6; б) 9; в) 6; г) 7; е) 8.

Пример к пункту а) изображен на рисунке 1. Другой пример: правильный треугольник ABC в горизонтальной плоскости, второй треугольник DEF с вершиной F, лежащей вне треугольника ABC в его плоскости, и вершинами D и E, расположенными соответственно в точности над и под центром треугольника ABC.

Минимальность. В пунктах а) и б) — очевидна. В пункте в) следует из задачи 2.2. Докажем минимальность набора в пункте г). Для этого достаточно показать, что любая пара треугольников в пространстве либо представляет простое зацепление, либо их можно расцепить. Если контур одного из треугольников не пересекает внутренность другого, то препятствий для расцепления нет. Иначе каждый из контуров треугольников должен пересекать внутренность другого в единственной точке. Рассмотрим плоскость одного из треугольников (скажем, ABC). Будем считать ее горизонтальной. Пусть сторона DE треугольника пересекает треугольник ABC, а F — ето третья вершина. Двигая F вертикально (и вместе с ней — стороны FD и FE), мы можем поместить ее на горизонтальную плоскость. После этого мы можем подвинуть вершины D и E (вместе с соответствующими сторонами) и получить описанный выше пример к пункту а).

Примеры к пунктам б)–е), минимальность в пункте е) и пункт д) целиком остаются в качестве задач после промежуточного финиша.

2.4 а) Ответ: 1; следует из примера 3. б) Ответ: 0, решение остается в качестве задачи.

2.5 Доказательство этого утверждения также остается в качестве задачи после промежуточного финиша. Это утверждение может оказаться полезным при решении задач из первой части.

Решения задач, предложенных до промежуточного финиша (продолжение)

1.7 Зависимость коэффициента зацепления от времени выглядит следующим образом:

$$lk(t) = \begin{cases} 1, & t \in (-\infty; 2) \cup (3,5; 4,5) \cup (6; +\infty) \\ 0, & t \in (2; 3,5) \cup (4,5; 6). \end{cases}$$

Вид этой зависимости следует из примера 3 и леммы, приведенной в указании к этой задаче (выданном после промежуточного финиша). Сама лемма легко следует, например, из задачи 1.4.

1.8 Пусть наборы точек N, X_1, X_2, X_3, X_4, и X_5, а также N', X_1, X_2, X_3, X_4, и X_5 находятся в общем положении. Соединим точки N и N' ломаной, не проходящей через отрезки X_iX_j. Будем равномерно двигать точку N вдоль этой ломаной, через N_t обозначим ее полжение в момент времени t. В соответствии с леммой из указания к задачи 1.7 (выданного после промежуточного финиша) зацепленность шестерки точек N, X_1, X_2, X_3, X_4, X_5 может изменится лишь в те моменты времени, когда $N_t \in X_iX_jX_k$ для некоторых $1 \leq i < j < k \leq 5$. Поэтому достаточно доказать, что при прохождении точки N через плоскость $X_iX_jX_k$, четность зацепленности нашей шестерки не меняется (считаем, что $i = 1$, $j = 2$, $k = 3$). Среди всех возможных отрезков с концами в точках N, X_i, X_j, X_k или вообще нет двух пересекающихся отрезков, или имеется только одна пара пересекающихся отрезков. В первом случае контуры любых двух пар треугольников с концами в точках N, X_1, X_2, X_3, X_4, и X_5 не пересекаются; в соответствии с указанной леммой зацепленность шестерки точек измениться не может. Рассмотрим второй случай. Пусть A_1, A_2, A_3, A_4 — такая перестановка точек N, X_1, X_2, X_3, что отрезок A_1A_2 пересекается с отрезком A_3A_4. Существуют две пары треугольников с концами в точках N, X_1, X_2, X_3, X_4, и X_5, контуры которых пересекаются: $X_4A_1A_2$ и $X_5A_3A_4$, $X_5A_1A_2$ и $X_4A_3A_4$. Из нашей леммы следует, что коэффициент зацепления каждой из этих пар треугольников поменяется, а коэффициент зацепления остальных пар треугольников останется неизменным. Утверждение задачи доказано.

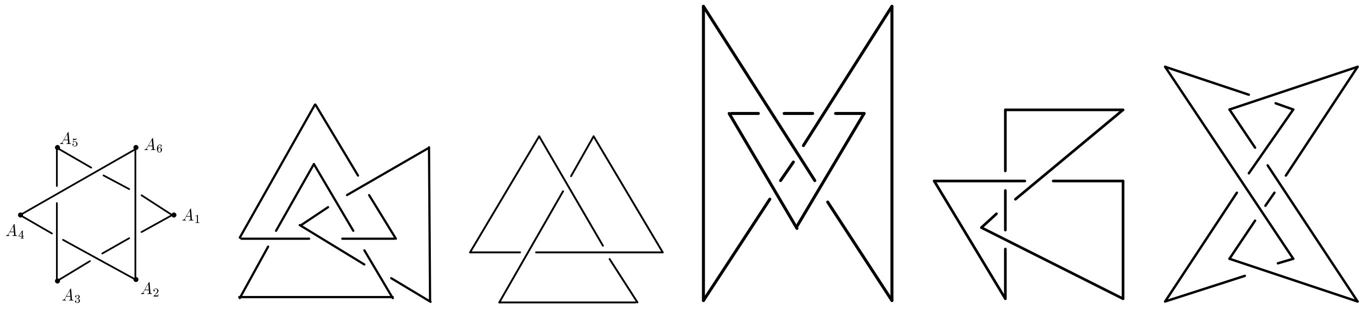
1.9 Подходит набор точек из примера 1. Другой пример можно получить, чуть пошевелив набор точек из решения задачи 2.3.а (выданного после промежуточного финиша).

1.10 Утверждение задачи следует из двух предыдущих задач.

2.1 Данные задачи можно легко решить с использованием веревки. Ответ: а), б) правый трилистник; в) восьмерка; г) тривиальный узел; д) восьмерка; е)зацепление Уайтхеда.

2.3 Ответ: а) 3; б) 9; в) 6; г) 7; д) 7; е) 8. На рисунках приведены проекции узлов и зацеплений, вписанных в наименьший набор точек. Для каждой проекции нужно еще проверить, что она реализуема, т. е. действительно существует конфигурация в пространстве, которая проецируется в данную картинку.

В пункте д) авторы задачи не умеют доказывать минимальность.



а *б* *в* *г* *д* *е*

Рис. 4'.

2.5 Решение *Д.Коробицына.* Пусть треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ лежат выше горизонтальной плоскости. Пусть $A'B'C'$ — проекция треугольника ABC на плоскость. Рассмотрим простой многогранник τ, ограниченный многоугольниками ABC, $A'B'C'$, $ABA'B'$, $BCB'C'$ и $CAC'A'$.

Коэффициент зацепления треугольников ABC и $A_1B_1C_1$ равен числу L (здесь и в дальнейшем все равенства понимаются по модулю 2) точек пересечения контура треугольника ABC с внутренностью треугольника $A_1B_1C_1$. Пусть U — число точек пересечения контура треугольника ABC с боковыми гранями многогранника τ. Число точек пересечения контура с многогранником четно. Поэтому $L+U=0 \Rightarrow L=U \Rightarrow L=$ числу точек пересечения контуров проекций треугольников ABC и $A_1B_1C_1$, в которых сторона треугольника $A_1B_1C_1$ проходит ниже стороны треугольника ABC.

Решения задач, предложенных после промежуточного финиша

1'.1 *Первое решение.* Допустим, утверждение задачи неверно. Синие точки обозначим C_1, C_2 и C_3, а красные — K_1, K_2 и K_3. Тогда стороны четырехугольника $C_1K_1C_2K_2$ не пересекаютсю во внутренних точках. Отрезок C_3K_3 не пересекается с контуром четырехугольника $C_1K_1C_2K_2$. Поэтому точки C_3 и K_3 или обе лежат внутри четырехугольника $C_1K_1C_2K_2$ вне его.

В первом случае точка C_3 лежит внутри одного из четырехугольников $C_1K_1C_2K_3$ или $C_1K_2C_2K_3$. Если, например, точка C_3 лежит внутри четырехугольника $C_1K_1C_2K_3$, то отрезок C_3K_2 пересекает контур четырехугольника $C_1K_2C_2K_3$, что приводит нас к противоречию. Во втором подслучае противоречие получаем аналогичным способом.

Второй случай. Отрезки K_3C_1 и K_3C_2 не пересекаются с контуром четырехугольника $C_1K_1C_2K_2$. Поэтому или точка K_2 лежит внутри четырехугольника $K_1C_1K_3C_2$, или точка K_1 лежит внутри четырехугольника $K_2C_1K_3C_2$. Задача свелась к первому случаю.

Другое решение этой задачи почти дословно повторяет рассуждение из второго решения задачи 1.2 (выданного после прожуточного финиша).

1'.2 Пусть τ — число точек пересечения контура $ABCD$ с гранями тетраэдра $A'B'C'D'$. Тетраэдр $A'B'C'D'$ делит пространство на две области: внутреннюю и внешнюю. Так как точки A, B, C, D, A', B', C', D' находятся в общем положении, то число τ четно. Так как

$$\tau \equiv \mathrm{lk}(ABCD, A'B'C'D') + \mathrm{lk}(ABCD, B'C'D'A') \pmod 2,$$

то

$$\mathrm{lk}(ABCD, A'B'C'D') = \mathrm{lk}(ABCD, B'C'D'A').$$

1'.3 Заметим, что $\mathrm{lk}(ABCD, A'B'C'D') \equiv \mathrm{lk}(ABC, A'B'C') + \mathrm{lk}(ABC, A'D'C') + \mathrm{lk}(ADC, A'B'C') + \mathrm{lk}(ADC, A'D'C') \pmod 2$. Из этого, а также свойств 1.5–1.6 следуют такие утверждения:

1. $\mathrm{lk}(ABCD, A'B'C'D') = \mathrm{lk}(A'B'C'D', ABCD)$.

2. При непрерывном движении точек A, B, C, D, A', B', C', D', оставляющем их в каждый момент в общем положении, число $\mathrm{lk}(ABCD, A'B'C'D')$ остается постоянным.

1'.4 Пусть даны две замкнутые четырехзвенные ломаные $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$, которые не имеют общих точек.

Первый способ. Пошевелим немного вершины этих ломаных таким образом, чтобы новый набор вершин — A', B', C', D', A'_1, B'_1, C'_1, D'_1 находился в общем положении. Положим по определению

$$\mathrm{lk}(ABCD, A_1B_1C_1D_1) = \mathrm{lk}(A'B'C'D', A'_1B'_1C'_1D'_1).$$

Второй способ. Пусть α — полуплоскость, в которой лежит треугольник $A_1B_1C_1$, ограниченная прямой A_1C_1. А β — полуплоскость, в которой лежит треугольник $A_1D_1C_1$, ограниченная прямой A_1C_1. Объединение этих полуплоскостей делит пространство на две части. Каждой точки прерсечения контура $ABCD$ с контурами или внутренностями треугольников $A_1B_1C_1$ и $A_1D_1C_1$ поставим в соответствие 0, если существует такая окрестность этой точки, прересечение которой с контуром $ABCD$ лежит в одной части пространства. В противном случае поставим в соответствие этой точке 1. Коэффициентом зацепления четырехзвенных ломаных $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$ называется сумма всех этих чисел по модулю 2.

1'.5 Указанные ломаные будут зацеплены тогда и только тогда, когда пары их вершин на каждой из скрещивающихся прямых будут зацеплены. Поэтому количество зацепленных разделенных пар четырехзвенных ломаных равно 2.

1'.6 Пусть даны четыре синие и четыре красные точки, находящиися в общем положении. Их зацепленностью называется количество зацепленных разделеных пар с вершинами в этих точках.

Пусть B, B', B_1, B_2, B_3 — синие точки, а R_1, R_2, R_3, R_4 — красные точки, причем наборы точек B, B_1, B_2, B_3, R_1, R_2, R_3, R_4, а также B', B_1, B_2, B_3, R_1, R_2, R_3, R_4 находятся в общем положении.

Соединим точки B и B' ломаной так, чтобы никакое ее звено не лежало ни в одной из плоскостей $R_iR_JB_k$. При движении точки B по ломаной зацепленность набора точек B, B_1, B_2, B_3, R_1, R_2, R_3, R_4 может изменится лишь в те моменты, когда отрезок BR_i пересекается с отрезком B_kR_j $(i \neq j)$. Пусть, например, отрезок BR_2 пересекается с отрезком B_1R_1. Среди всех разделенных пар ломаных с вершинами в нашем наборе точек коэффициент зацепления изменится у следующих: $BR_2B_2R_3$ и $B_1R_1B_3R_4$, $BR_2B_2R_4$ и $B_1R_1B_3R_3$, $BR_2B_3R_3$ и $B_1R_1B_2R_4$, $BR_2B_3R_4$ и $B_1R_1B_2R_3$. Поэтому четность зацепленности при этом не изменится.

Из приведенного рассуждения ясно, что у любых двух наборов из четырех синих и четырех красных точек зацепленность имеет одинаковую четность. Тогда из предыдущей задачи следует, что зацепленность всегда является четной.

1'.7 Для набора общего положения синих точек B_1, B_2, B_3, B_4 и красных точек R_1, R_2, R_3, R_4 рассмотрим число I зацепленных разделенных пар $(\square, \square')$ таких, что ломаная $\square$ содержит отрезок B_1R_1. Аналогично рассуждению задачи 1'.6 доказывается, что четность числа I не зависит от набора точек. В примере из задачи 1'.5 $I = 1$. Поэтому в каждом наборе число I нечетно, и поэтому в каждом наборе существует зацепленная разделенная пара замкнутых четырехзвенных ломаных.

1'.8 Утверждение задачи следует из задач 1'.6 и 1'.7.

2'.1 Например, можно раскрасить A_1, A_2, A_3 точки в синий цвет, а A_4, A_5, A_6 — в красный. Непосредственно проверяется, что полученный набор отрицателен.

2'.2 Предположим, что утверждение задачи неверно. Тогда некоторые две синие точки B_1, B_2 расположены по разные стороны от прямой, проходящей через некоторые две красные точки R_1, R_2. Тогда отрезок B_1R_1 не пересекает B_2R_2 и B_1R_2 не пересекает B_2R_1, что противоречит определению положительного набора.

2'.3 Пусть, от противного, $R_1 > R_2 > R_3 > R_1$. Тогда при обходе треугольника $R_1R_2R_3$ все синие точки все время остаются справа. Это возможно, только если обход происходит по часовой стрелке, и все синие точки расположены внутри треугольника. По нашему предположению, в задачах 2'.2–2'.5 $N \geq 2$, поэтому есть хотя бы две синие точки. Проведем через них прямую. Какие-то две вершины треугольника расположены по разные стороны от этой прямой. Но тогда исходный набор не может быть положительным (доказывается аналогично задаче 2'.2).

2'.4 Так как исходный набор точек положителен, то по определению пересечение R_1B_1 и R_2B_2 положительно. Значит, при движении от B_1 к R_1 точка B_2 остается слева. Но тогда и при движении от R_1 к B_2 точка B_2 остается справа. По определению, тогда $R_1 > R_2$.

2'.5 Из задачи 2'.3 следует, что красные точки можно занумеровать так, чтобы $R_1 < R_2 < \dots < R_N$. Из задачи 2'.4 следует, что эта нумерация — искомая.

2'.6 (Решение *Челнокова В.*) Занумеруем красные и синие точки слева направо. Тогда трилистник представляется ломаной $R_1B_4R_4B_1R_2B_3R_5B_5R_3B_2R_1$.

2'.7 Пусть дан положительный набор 5 красных и 5 синих точек. Занумеруем красные точки, как в задаче 2'.5. Занумеруем синие точки аналогичным образом. А именно, можно определить порядок '>' синих точек аналогично порядку красных точек и занумеровать синие точки в порядке возрастания (в смысле '>'). Рассмотрим ломаную $R_1B_4R_4B_1R_2B_3R_5B_5R_3B_2R_1$ (см. решение задачи 2'.6). Она представляет трилистник, что следует из такой леммы:

Лемма. *Положительный набор 5 синих и 5 красных точек можно перевести в набор точек из примера 1' непрерывным движением так, чтобы в процессе движения набор оставался в общем* *положении.*

Идея доказательства. Рассмотрим точку B_1. Из нашей нумерации точек следует, что отрезки с началом B_1 расположены выше всех остальных. Поэтому мы можем переместить (допустимым образом) точку B_1 так, чтобы ее проекция попала в самую левую синюю точку на рис. 2', а сама точка B_1 располагалась очень высоко над плоскостью рисунка. Тогда и все отрезки с началом B_1 будут располагаться очень высоко. Поэтому то же самое можно сделать и с точкой B_2 — расположить ее очень высоко, но ниже точки B_2 так, чтобы ее проекция совпала со второй слева синей точкой. Действуя таким образом со всеми синими точками, а потом и с красными, мы переведем исходный набор точек в требуемый набор. Лемма, а вместе с ней и утверждение задачи 2'.7, доказано.

2'.8 (Небольшой экскурс в *рамсеевскую теорию графов.*) а) Утверждение легко доказать индукцией по $n+m$. Докажем базу $n+m=6$. Из задачи 1.1 следует, что $R(3,3)=6$. Очевидно, $R(4,2)=4$. База доказана. Индукционный переход в случае $n=2$ или $m=2$ очевиден. При $m,n>2$ индукционный переход получается из оценки $R(n,m)\le R(n-1,m)+R(n,m-1)+1$. Действительно, рассмотрим полный граф с $R(n-1,m)+R(n,m-1)+1$ вершинами. Рассмотрим его вершину A. По принципу Дирихле найдется либо $R(n-1,m)$ выходящих из нее ребер первого цвета, либо $R(n,m-1)$ выходящих из нее ребер второго цвета. Рассматривая полные подграфы с вершинами в отличных от A концах указанных ребер, получаем требуемое. Утверждение доказано.

б) Формулировка очевидна, доказательство аналогично пункту а) и использует оценку

$$R(l,m,n)\le R(l-1,m,n)+R(l,m-1,n)+R(l,m,n-1)+1.$$

в) **Теорема.** Для любых m_1,m_2,m_3,n_1,n_2,n_3 найдется такое $R=R(m_1,m_2,m_3,n_1,n_2,n_3)$, что при любой раскраске двудольного графа с $2R$ вершинами (поровну в каждой доле) в три цвета для некоторого $1\le i\le 3$ найдется полный двудольный подграф i-го цвета с m_i вершинами в первой доле и n_i вершинами во второй.

Доказательство аналогично пункту а) и использует оценку

$$R\le R(m_1-1,m_2,m_3,n_1,n_2,n_3)+R(m_1,m_2-1,m_3,n_1,n_2,n_3)+R(m_1,m_2,m_3-1,n_1,n_2,n_3)+1.$$

г) (*Идея доказательства.*) Сначала нужно доказать следующее вспомогательное утверждение:

Утверждение. Пусть дан полный двудольный граф с $2R$ вершинами (поровну в каждой доле). Назовем *треугольником* три вершины, одна из которых лежит в первой доле, а две другие — о второй. Тогда для любых n_1,n_2,n_3 и m_1,m_2,m_3 найдется такое $R=R(m_1,m_2,m_3,n_1,n_2,n_3)$, что при любой раскраске всех треугольников в три цвета найдется полный двудольный подграф с m_i вершинами в первой доле и n_i вершинами во второй, все треугольники которого имеют цвет i.

Доказательство производится индукцией по $\sum n_i+\sum m_i$. База индукции состоит в утверждениях задач 2'.7б и 2'.7в. Индукционный переход получается из оценки

$$R\le R(R(m_1-1,m_2,m_3,n_1,n_2,n_3),R(m_1,m_2-1,m_3,n_1,n_2,n_3),R(m_1,m_2,m_3-1,n_1,n_2,n_3)).$$

Здесь $R(x,y,z)$ — число из пункта 2'.7б. Для доказательства приведенной формулы нужно рассмотреть одну из вершин в первой доле, скажем A. Без ограничения общности, согласно пункту 2'.7б можно отметить $R(m_1-1,m_2,m_3,n_1,n_2,n_3)$ вершин во второй доле так, чтобы все треугольники с вершинами в A и двух отмеченных точках были первого цвета. Теперь наша формула получается из предположения индукции.

Для доказательства утверждения 2'.7г нужно рассмотреть одну синюю вершину B_1. Каждую тройку B_2,R_1,R_2 раскрасим в один из трех цветов в зависимости от того, положительна, отрицательна или нейтральна четверка B_1,B_2,R_1,R_2. Теперь проходит индукционный переход, использующий предыдущее утверждение и аналогичный доказательству этого утверждения. Тем самым утверждение задачи 2'.7г может быть доказано по индукции.

д) Согласно задаче 1'.1, нейтральных наборов при $n \geq 3$ не бывает. Поэтому пункт д) следует из пункта г).

2'.9 Теоремы Миёчи и Негами для трилистника следуют из задачи 2'.7, ее аналога для отрицательного набора и задачи 2'.8д для $n = 5$.

2'.10 Лучший способ решить эту задачу — это воспользоваться задачами 2'.11 и 2'.12 из "Домашнего задания". Как и в решении задачи 2.1, для проверки лучше всего использовать веревку или нить.

Inscribed Links

The problem suggested by M. Skopenkov, O. Skriabin and A. Shapovalov (with participation of I. Dynnikov and A. Skopenkov)

The first part of the problem leads to the proof of the following theorem.

Theorem 1. *(Conway–Gordon–Sachs, 1981) Suppose that there are given 6 points (in space) such that no 4 of them are coplanar. Then there exist two linked triangles with vertices at these points.*

The second part of the problem deals with generalizations of this theorem to arbitrary links (see the definitions and examples below). These two parts are almost independent, so you can solve the problem starting with either task 1.1 or task 2.1.

1. Linked triangles

1.1 Prove that in any company of 6 persons there are either three persons s.t. each of them is acquainted with others or three persons s.t. each of them is unknown to others.

1.2 Prove that for 5 coplanar points such that no 3 of them are collinear there exists a pair of segments with endpoints among these points intersecting at an interior point.

Definition of general position. We say that a set of points in space is *in general position*, if no 4 of them are coplanar.

Example 1. (Fig. 1) Consider a regular hexagon in a horizontal plane. The set of points A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6, placed directly above its vertices with heights 1, 2, 3, 4, 5, 6 respectively, is in general position.

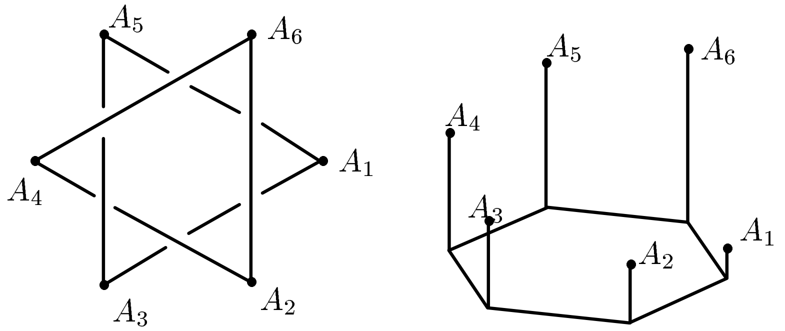


Fig. 1.

Example 2. The points with coordinates $(t; t^2; t^3)$ in a Cartesian coordinate system (for $t = 1, \dots, 6$, are in general position (try to check it yourself!).

Definition of the linking coefficient of two triangles. Let Δ, Δ' be triangles such that the set containing their 6 vertices is in general position. We say that these triangles are *linked*, if the outline of the triangle Δ intersect the interior of the triangle Δ' at a single point. Let us define the *linking coefficient* $\mathrm{lk}(\Delta, \Delta')$ of two triangles by the formula

$$\mathrm{lk}(\Delta, \Delta') = \begin{cases} 1, & \text{if } \Delta \text{ and } \Delta' \text{ are linked,} \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

Example 3. The triangles $A_1A_3A_5$ and $A_2A_4A_6$ from Example 1 are linked.

1.3 Suppose that the outline of one of the triangles Δ and Δ' does not intersect the plane containing the second triangle. Prove that $\mathrm{lk}(\Delta, \Delta') = 0$.

Definition of linked pairs of points. Suppose that there are given two pairs of points (say, two red points and two blue ones). in the same horizontal line. We say that these pairs are *linked*, if their order in the line is either (red, blue, red, blue) or (blue, red, blue, red) from the right to the left.

1.4 Prove that the triangles Δ and Δ' are linked if and only if the following 3 conditions are satisfied:

1) the planes of the triangles Δ and Δ' intersect at a line (denote it by l);

2) each of the sets $\Delta \cap l$ and $\Delta' \cap l$ consists of two points (here and below Δ and Δ' denote the outlines of the triangles);

3) the pairs of points $\Delta \cap l$ and $\Delta' \cap l$ are linked.

1.5 Prove that $\operatorname{lk}(\Delta, \Delta') = \operatorname{lk}(\Delta', \Delta)$.

1.6 Prove that $\operatorname{lk}(\Delta, \Delta') = \text{const}$, if Δ moves leaving the set of 6 vertices of triangles Δ and Δ' in general position.

1.7 Suppose that the point A_1 of Example 1 moves upwards with constant speed. Denote by $A_1(t)$ its position at the moment t. Plot the graph of the function $\operatorname{lk}(A_1(t)A_3A_5, A_2A_4A_6)$.

Definition of the total linking number of a 6-tuple of points. Suppose that there are given 6 points in space in general position. We shall say that two triangles with (pairwise distinct) vertices at these points form a *divided pair*. *The total linking number* of a 6-tuple of points is the number of linked divided pairs.

Remark. For a 6-tuple of points, its total linking number is equal to

$$\sum \operatorname{lk}(\Delta, \Delta'),$$

where the sum is over all divided pairs (Δ, Δ').

1.8 Prove that the total linking number modulo 2 does not depend on the choice of a 6-tuple of points.

1.9 Construct an example of 6 points with the total linking number 1.

1.10 Prove Theorem 1.

2. Inscribed knots and links

Main notions. A *knot* is just a rope with its ends tied. We suppose it elastic, and do not distinguish between the knots obtained one from another deforming the rope.

The examples of *distinct* knots: trivial K, right and left trefoils T, figure eight E (Fig. 2).

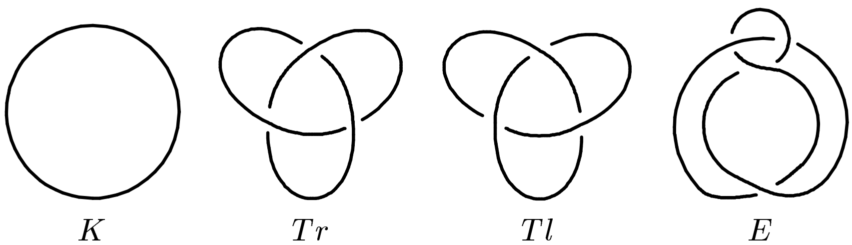


Fig. 2.

If there are several ropes, each having its ends tied, we call this figure a *link*.

The examples of *distinct* links: the Hopf link H (or simple link), double link D, the Whitehead link W, the Borromeo rings B (Fig. 3).

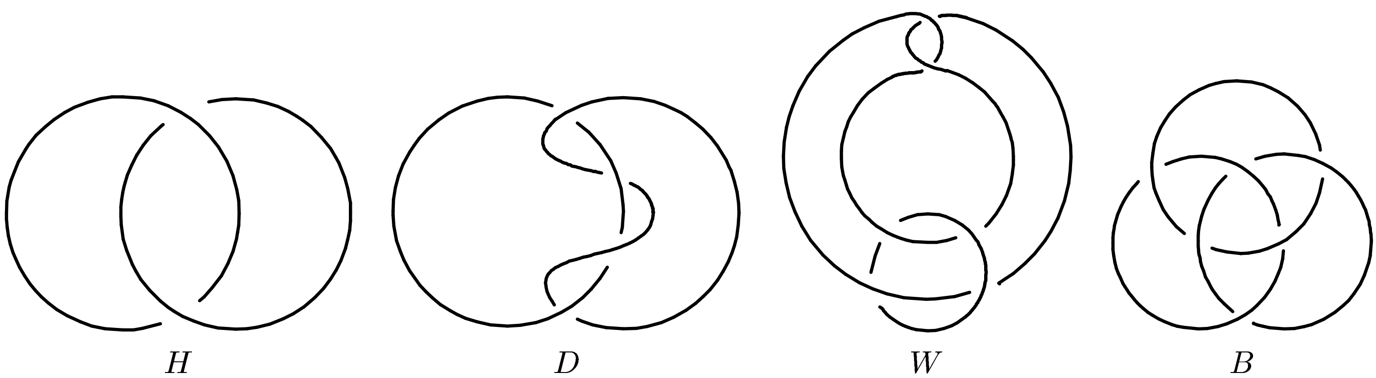
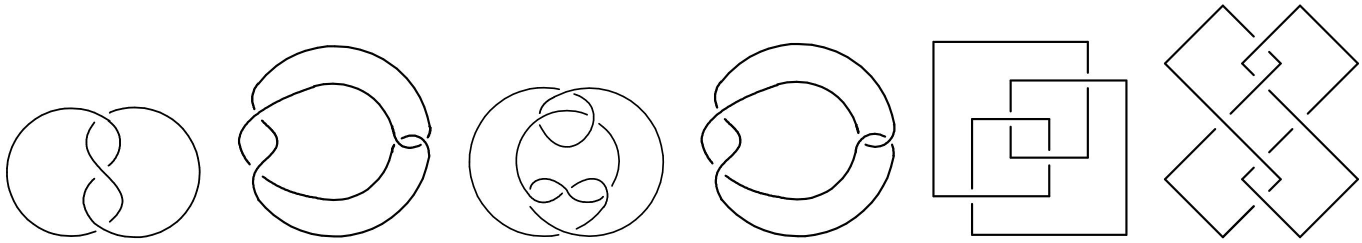


Fig. 3.

2.1 Into which of the knots and links from Fig. 2, 3 the knots and links from Fig. 4 can be deformed?



а *б* *в* *г* *д* *е*

Fig. 4.

Definition of an inscribed knot and link. Let M be the set of points in space, A be a knot. Suppose that the rope of M is deformed into a polygonal line A' with vertices belonging to M. Then we say that (the knot) A' is *inscribed* into M. We also say that A' *represents* A. An *inscribed* link can be defined analogously.

Remark. Any knot inscribed into M is a subset of the figure obtained from M by joining all points by segments of straight lines.

Theorem 2. *(Negami, 1991) For any knot there exists a positive integer N such that this knot can be inscribed into any set of N points in space such that no 4 points of this set are coplanar.*

(Try to prove this theorem for the knot trefoil. Some hints to the proof of this theorem and some related open questions will be given in the tasks introduced after the semifinal.)

2.2 Prove that any knot inscribed into the set consisting of ≤ 5 points is trivial.

2.3 Find the minimal set into which the following knots and links can be inscribed

a) simple link;

b) the Borromeo rings;

c) trefoil;

d) double link;

e) figure eight;

f) the Whitehead link.

(We do not ask to prove the minimality).

2.4 Find the linking coefficients:

a) of two triangles representing a simple link;

b) of two triangles among three triangles representing the Borromeo rings.

2.5 Let Δ, Δ' be two triangles in space, $\overline{\Delta}, \overline{\Delta'}$ be their projections onto a horizontal plane. Assume that no 3 of 6 vertices of $\overline{\Delta}$ and $\overline{\Delta'}$ are collinear. For each point of $\overline{\Delta} \cap \overline{\Delta'}$ (*a cross-road*) draw which of the sides is higher (Fig. 1). Prove that $\mathrm{lk}(\Delta, \Delta')$ is equal modulo 2 to the number of cross-roads s.t. the side of $\overline{\Delta}$ is higher than the side of $\overline{\Delta'}$.

Inscribed Links: More Problems

1. Linked 4-polygons

Theorem 1'. *(Sachs, 1981) Suppose that there are 4 red and 4 blue points in space s.t. no two segments with endpoints of different colours intersect at an interior point. Then there exist two linked 4-polygons having these points as vertices s.t. for each side of these polygons its endpoints are different-coloured.*

1'.1 Suppose that there are 3 red and 3 blue points in the plane s.t. no three are collinear. Prove that there exist two segments with endpoints of different colours intersecting at an interior point.

Definition of the linking coefficient of two 4-polygons. Let $\square$ and $\square'$ be two 4-polygons in space with vertices A, B, C, D and A', B', C', D' respectively. (We suppose that these vertices are in general position.) By the *linking coefficient* of these 4-polygons we mean the residue modulo 2 of the number of intersection points of the polygonal line $ABCD$ and the union of triangles $A'B'C'$ and $A'D'C'$ (together with their interiors).

1'.2 Prove that $\mathrm{lk}(ABCD, A'B'C'D') = \mathrm{lk}(ABCD, B'C'D'A')$.

1'.3 Prove analogues of 1.5 and 1.6 for the linking coefficients of 4-polygons.

1'.4 Define the linking coefficient of two 4-polygons, with the condition of general position replaced by the weaker one $\square \cap \square' = \emptyset$ (the above properties should be satisfied!)

Definition of general position in the case of two colours. Consider a set of red and blue points in space. We say that this set is *in general position*, if no two segments with endpoints of different colours intersect at an interior point.

Definition of a divided pair of 4-polygons. Let M be the set in general position containing 4 red and 4 blue points. We say that two 4-polygons form a *divided pair* if the following condition are satisfied:

(1) the (pairwise distinct) vertices of these polygons belong to M;

(2) for each side of these polygons its endpoints are different-coloured.

1'.5 Let 4 red points belong to a line, 4 blue points belong to another line. Suppose that these lines are skew. Find all divided pairs $(\square, \square')$ s.t. $\square$ and $\square'$ are linked.

1'.6 Define total linking number of a 4-tuple of red points and a 4-tuple of blue points and prove that total linking number modulo 2 is even.

1'.7 Prove Theorem 1'.

1'.8 In the situation described in Theorem 1', prove that there exist at least two pairs of linked 4-polygons.

The problems suggested after the semifinal

(The solutions do not use the results of the previous tasks)

2. Inscribed knots and links

Definition of a knot (link) inscribed into a coloured set. Consider a set of red and blue points in space. By *an inscribed knot* we mean a polygonal line (representing some knot) such that the endpoints of each side are different-coloured. *An inscribed link* is defined analogously (e. g., see Theorem 1').

Theorem 2'. *(Miyauchi, 1994) For any knot (link) there exists a positive integer N such that this knot (link) can be inscribed into any set of N red and N blue points in space such that no 4 points of this set are coplanar.*

(Clearly, the Negami theorem follows from the Miyauchi theorem).

Definition of a positive set. Consider a set of N red and N blue points in space in a general position. Join different-coloured points pairwise by segments. Draw the projection of the obtained figure (onto the horizontal plane). Further we work only with plane projections, so we omit the word 'projection' from the phrases 'projection of a point of the set' and 'projection of a segment' if it does not leave to a confusion.

Assume that no interior points of the segments drawn belong to the set considered. For each intersection point of the segments (*a cross-road*) draw which of the segments is higher (as in task 2.5). Let us move along the projection of the higher segment from its blue endpoint to the red one. If the blue endpoint of the second segment is on the left side, then the cross-road is called *positive* (see the left part of Fig. 1'). Otherwise it is called *negative* (see the right part of Fig. 1').

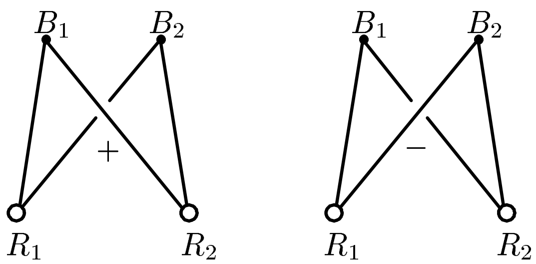


Fig. 1'.

The initial set of points is *positive*, if for any two blue points B_1, B_2 and any two red points R_1, R_2 either the segments B_1R_1, B_2R_2 or the segments B_1R_2, B_2R_1 intersect at an interior point, and the corresponding cross-road is positive. The *negative* set is defined analogously.

Example 1'. An example of a positive set is shown in Fig. 2.

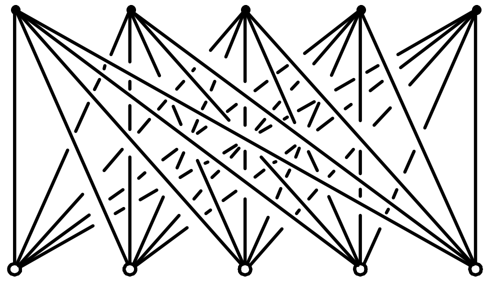


Fig. 2'.

2'.1 Paint red and blue the set of Example 1 to make it negative.

We assume that in tasks 2'.2–2'.5 there is given a positive set with $N \geq 2$.

2'.2 All blue points belong to the same halfplane bounded by a line joining a pair of red points.

Definition of the order '>'. Consider a positive set. Let R_1 and R_2 be two red points. Let us move along the line R_1R_2 from R_1 to R_2 (assume this line horizontal). We say that $R_1 > R_2$ if all blue points stay on the right during this motion.

2'.3 Prove that if $R_1 > R_2$ and $R_2 > R_3$, then $R_1 > R_3$.

2'.4 Prove that if the segment R_1B_1 is higher than R_2B_2, then $R_1 > R_2$.

2'.5 There exists a numbering of red and blue points such that for any $i < j$ and $k \neq l$ the segment R_iB_k is higher R_jB_l.

2'.6 Inscribe a trefoil into the set from Example 1'.

2'.7 A trefoil can be inscribed into any positive set of 5 blue and 5 red points.

2'.8 (the Ramsey theorems) a) Prove that for any m and n there exist $R(m,n)$ such that if we paint red and blue the edges of a complete graph with $R(m,n)$ vertices, then there exist either a red complete subgraph with m vertices or a blue complete subgraph with n vertices.

b) State and prove the generalization of a) to the case of 3 colours.

c) State and prove the generalizations of a) and b) to complete bipartite graphs.

d) A coloured set of points in space in a general position is called *neutral*, if no two projections of segments with different-coloured endpoints intersect (at an interior point). Prove that for any n there exist $R(n)$ such that any set of $R(n)$ blue and $R(n)$ red points in space in a general position contains either a positive or negative or neutral subset of n blue and n red points.

e) Prove that for any n there exist $R(n)$ such that any set of $R(n)$ blue and $R(n)$ red points in space in a general position contains either a positive or negative subset of n blue and n red points.

2'.9 Prove the Miyauchi theorem and the Negami theorem for a trefoil.

2'.10 Inscribe the knots and links from Fig. 2, 3 in a positive set and prove the Miyauchi theorem and the Negami theorem for them.

Inscribed links: homework

2. Inscribed knots and links

The Two Sticks Lemma. *Consider a pair of skew lines. For any knot there exists a positive integer N such that this knot can be inscribed into a set consisting of N red points in the first line and N blue points in the second.*

Definition of a rectangular representation of a knot. (left part of Fig. 3', see also Fig. 2e) We say that *a rectangular representation* of the knot is given, if the projection of the rope satisfies to the following 3 properties:

$\sqsubset$) the projection consists of some vertical and horizontal segments;

$-$) no two vertical segments belong to one vertical line and no two horizontal segments belong to one horizontal line;

$\div$) if a horizontal segment intersects a vertical segment, then the "horizontal" part of the rope is higher than the "vertical" one.

The definition of *a rectangular representation* of a link is analogous.

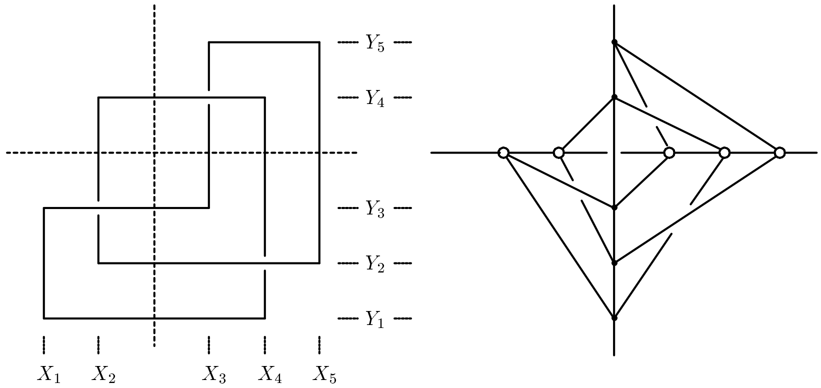


Fig. 3'.

2'.11 Draw rectangular representations of the knots and links in Fig. 2, 3.

Definition of a dual knot. (Fig. 3') Suppose that a rectangular representation of a knot is given. Let $X_1, X_2, \dots, X_N$ be the "coordinates" of the vertical segments of its projection, and let $Y_1, Y_2, \dots, Y_M$ be the "coordinates" of the horizontal ones (see Fig. 3'). Consider a pair of lines parallel to the plane of the figure. Let the first (horizontal) line be below the plane, and let the second (vertical) line be above the plane. Mark the points with coordinates $X_1, X_2, \dots, X_N$ on the horizontal line, and the points with coordinates $Y_1, Y_2, \dots, Y_M$ on the vertical one. Denote by R_i the point with the coordinate X_i in the first line, and B_j the point with the coordinate Y_j in the second one. Join by a segment each pair of marked points R_i, B_j such that the point (X_i, Y_j) in the plane of the figure is an endpoint of a segment of the projection. Thus we obtain a closed polygonal line. The knot represented by this polygonal line is *dual* to the initial one. The definition of *a dual link* is analogous.

Example 2' A trefoil and the knot dual to it (a trefoil again) are shown in Fig 3'.

2'.12 Draw the knots and links, which are dual to the rectangular knots and links from your solution of the task 2'.11. Into which of the knots and links shown in Fig. 2, 3 they can be deformed?

2'.13 Prove that

a) for any knot there exists a rectangular representation;

b) any knot with a rectangular representation can be deformed into its dual.

2'.14 Prove the Two Sticks Lemma.

2'.15 Deduce the Miyauchi and the Negami theorems from the Two Sticks Lemma.

2'.16 (hard) An embedding of a graph is *linkless*, if no two cycles of the graph are linked. Describe all graphs that do not have linkless embeddings.

2'.17 (a well-known open problem) An embedding of a graph is *knotless*, if no cycle of the graph is knotted. Describe all graphs that do not have knotless embeddings.

[1] J. Conway, C. Gordon, *Knots and links in spatial graphs*, Journal of Graph Theory **7** (1983), 445–453.

[2] S. Negami, *Ramsey-type theorem for spatial graphs*, Graphs and Combinatorics **14** (1998), 75–80.

[3] M. Skopenkov, *Embedding products of graphs into Euclidean spaces*, Fundamenta Mathematicae, to appear.

Solutions of the problems suggested before the semifinal

1.1 Consider the graph consisting of 6 vertices and all joining them edges. Let each vertex correspond to a person. If two persons know each other, then paint red the edge joining the corresponding vertices, and paint it blue otherwise. Consider a vertex A. By the "pigeon holes principle" there exist three vertices X_1, X_2 and X_3 such that the edges AX_1, AX_2 and AX_3 have the same colour. Assume that they are red. If one of the edges X_iX_j $(i,\, j \in \{1;2;3\})$ is red, then all the sides of the triangle AX_iX_j are red, and the statement follows. Otherwise all the sides of the triangle $X_1X_2X_3$ are blue, and we are done.

1.2 *First Solution.* If the convex hull of the points has either four or five vertices, the claim is obvious: any two diagonals intersect. Consider the case when the convex hull is a triangle ABC. The two remaining points (say, D and E) belong to the interior of the triangle ABC. The point E belongs to the interior of one of the triangles DAB, DAC, DBC. We may assume that it belongs to DAC. Then EB crosses one of the segments DA and DC.

Second solution. The claim of the problem is a 2-dimensional analogue of Theorem 1 and can be proved analogously. We say that a set of points in the plane is *in general position* if no 3 points of this set are collinear. By *the total linking number* of 5-tuple of points in general position we mean the number of pairs of segments with their ends at these points intersecting at the interior point. It is easy to construct an example of a 5-tuple of points with the total linking number 1. After that it remains to show that the total linking number modulo 2 does not depend on the choice of 5 points. Consider two different 5-tuples. We can transform one of them into another, moving the points one by one (the motion can be assumed uniform). Clearly, while the points move leaving the 5-tuple in general position, the total linking number is constant. As one of the points (say, A) passes through a segment with ends at two of the remaining points (say, B and C), the resulting total linking number either differs by 2 from the initial linking number or is equal to it. Indeed, at such a moment the "state" changes (i. e., intersecting pairs of segments become disjoint and vice versa) for exactly two pairs: AD, BC and AE, BC (here D and E are the remaining points of the 5-tuple).

1.3 It is sufficient to show that if either $\mathrm{lk}(\Delta, \Delta') = 1$ or $\mathrm{lk}(\Delta', \Delta) = 1$, then the outline of the triangle Δ crosses the plane of the triangle Δ'. The first case is obvious. In the second case the outline of the triangle Δ' crosses the interior of the triangle Δ. It follows that the interior of the triangle Δ crosses the plane of the triangle Δ', hence the outline of the triangle Δ also crosses the plane of the triangle Δ'.

1.4 Let Δ and Δ' be two linked triangles. It is clear that condition 1) is satisfied. The condition 2) follows from task 1.3. Indeed, since the triangle Δ intersects the plane of the triangle Δ', it follows that the set $\Delta \cap l$ is not empty. By general position the set cannot consist of a single point. Let us prove that condition 3) is satisfied. Denote by $\{A, B\}$; $\{A', B'\}$ the sets $\Delta \cap l$ and $\Delta' \cap l$ respectively. All common points of the outline of the triangle Δ and the interior of the triangle Δ' belong to the segment $A'B'$. So exactly one of the points A and B belongs to the segment $A'B'$. This means that the pairs A, B and A', B' are linked in l.

Vice versa, let the pairs A, B and A', B' be linked in l. Then by the above the outline of the triangle Δ crosses the interior of the triangle Δ' at a single point, hence Δ and Δ' are linked.

1.5 According to the task 1.4, both of the conditions $\mathrm{lk}(\Delta, \Delta') = 1$ and $\mathrm{lk}(\Delta', \Delta) = 1$ are equivalent to the same condition.

1.6 It follows from task 1.4 that $\mathrm{lk}(\Delta, \Delta') = 1$ if and only if conditions 1)–3) are satisfied. None of them are changed under motion described. This needs checking only for property 1). This condition is not satisfied only if the planes of the triangles Δ and Δ' are parallel. Then by task 1.3 it follows that at this moment (and at all moments nearly before and after it) we have $\mathrm{lk}(\Delta, \Delta') = 0$.

1.7 The following lemma may be useful:

Lemma. Let the vertex A of the triangle Δ move along a segment in space with constant speed, while two remaining vertices and Δ' stay put. Denote by Δ_t the position of the triangle Δ at the moment t, where $0 \le t \le 2$. Assume that the set of 6 vertices of Δ_t and Δ' is in general position for each t, except $t = 1$.

a) If $\Delta_1 \cap \Delta' = \emptyset$, then $\mathrm{lk}(\Delta_0, \Delta') = \mathrm{lk}(\Delta_2, \Delta')$.

b) If Δ_1 and Δ' have a unique common point distinct from any of their vertices, then the numbers $\mathrm{lk}(\Delta_0, \Delta')$ and $\mathrm{lk}(\Delta_2, \Delta')$ differ (by 1).

The proof of the lemma, the graph itself and tasks 1.8–1.10 are suggested as tasks after the semifinal.

2.1 The "most right" way to solve this task is to take a rope, make a knot from Fig. 4 on it, and try to deform it into one of the knots in Fig. 2, 3. The same is true for the links. It is convenient to represent the deformation of the rope by a sequence of pictures in which the consequent pictures are obtained one from another by a small deformation.

2.2 It suffices to show that a closed polygonal line with ≤ 5 sides is not knotted (i. e., represents a trivial knot). Clearly, a triangle is not knotted. Note that if in an n-polygon (i. e., a closed polygonal line with n sides) the interior of the triangle containing a pair of consequent sides does not intersect any of the remaining sides, then we can replace this pair of sides by the diagonal and obtain an $(n-1)$-polygon representing the same knot. Since in a 4-polygon there are no obstructions to such contraction, it follows that it contracts into a triangle and hence is not knotted. Assume that in a 5-polygon $ABCDE$ there is an obstruction to contraction of AB and BC. Then the side DE intersects the interior of the triangle ABC. But then AE does not intersect the interior of the triangle BCD, because they are separated by the plane ABC.

2.3 *Answers:* a) 6; b) 9; c) 6; d) 7; f) 8.

Example to a) is shown in Fig. 1. Another example: consider a regular triangle ABC in a horizontal plane, another triangle DEF with its vertex F placed outside the triangle ABC in its plane and the vertices D and E placed directly above and below the center of ABC respectively.

"Minimality". In a) and b) it is obvious. In c) it follows form task 2.2. Let us prove the "minimality" in d). It suffices to show that any two disjoint triangles in space either represent a simple link or are not linked (can be "unhooked"). If the outline of one of the triangles does not intersect the interior of the remaining triangle, then there is no obstructions to "unhooking". Otherwise each of the triangles intersects the interior of the other one at a single point. Consider the plane of one of the triangles (say, ABC). We may assume that it is horizontal. Let the side DE of the second triangle intersect the triangle ABC. Denote by F the remaining vertex of the second triangle. It is easy to deform the triangles ABC and DEF into the triangles of the above example to task 2.3.a.

The examples to b)–f), the "minimality" in f) and the whole task e) are the tasks after the semifinal.

2.4 a) Answer: 1, follows from Example 3.

b) Answer: 0, the solution is a task after the semifinal.

2.5 The proof of the statement is a task after the semifinal. Note that this statement may be useful in the solutions of the tasks from the first part of the problem.

Solution of the problems proposed before the semi-final (continuation)

1.7 Example 3 and the lemma from the remark (given after the semi-final) to this problem imply that

$$lk(t) = \begin{cases} 1, & t \in (-\infty; 2) \cup (3,5; 4,5) \cup (6; +\infty) \\ 0, & t \in (2; 3,5) \cup (4,5; 6). \end{cases}$$

The lemma follows easily from problem 1.4.

1.8 Let the sets of points N, X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, and N', X_1, X_2, X_3, X_4, X_5 be in a general position. Let us connect points N and N' by the polygonal line which does not contain X_i. Let N_t describes the position of point N at moment t while N moves uniformely along the polygonal line. According to the previous problem the total linking number for 6-tuple of points N, X_1, X_2, X_3, X_4, X_5 is changed only at moments when $N_t \in X_iX_jX_k$ for some $1 \leq i < j < k \leq 5$. Therefore it is sufficient to prove that parity of the total linking number is the same while N passes through plane $N_t \in X_iX_jX_k$ (we assume that $i = 1$, $j = 2$, $k = 3$). Let us notice that among all possible segments with ends at the points N, X_i, X_j, X_k either there are no intersected pairs or there is only one. In the first case the outlines of any two pairs of triangles with vertices at N, X_1, X_2, X_3, X_4, and X_5 do not intersect (according to the previous problem the total linking number for 6-tuple is not changed). Let us consider the second case. Let A_1, A_2, A_3, A_4 be a permutation of N, X_1, X_2, X_3 such that segment A_1A_2 intersects segment A_3A_4. Then there exist exactly two pairs of triangles with vertices at N, X_1, X_2, X_3, X_4 and X_5 such that the outlines of the triangles intersect: $X_4A_1A_2$ and $X_5A_3A_4$, $X_5A_1A_2$ and $X_4A_3A_4$. Problem 1.7 implies that the linking coefficient of these two pair changes, while the linking coefficients of other pairs do not.

1.9 Example 1 is the required. Another example can be obtained from example to the solution of 2'.3.a by a slight motion of all points.

1.10 The statement of the problem follows from two previous problems.

2.1 The problems could be easily solved using a rope. Answers: a), b) right trefoil; c) figure eight; d) trivial link; e) figure eight; f) the Whitehead link.

2.3 Answer: a) 3; b) 9; c) 6; d) 7; e) 7; f) 8.

In the figures there are shown the projections of knots and links inscribed in the minimal sets of points. It is necessary to check that each projection has a realization (the proof is left to reader).

The authors do not know the proof of minimality for e).

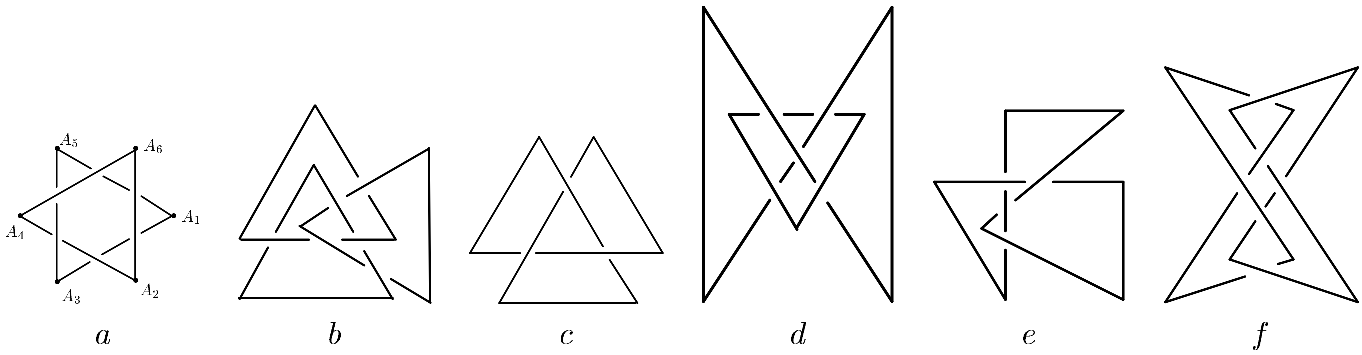


Fig. 4'.

2.5 Solution of D.Korobitsyn. Let triangles ABC and $A_1B_1C_1$ be higher than the horizontal plane. Let $A'B'C'$ be the projection of ABC to the plane. Let us consider simple polytop τ bounded by polygons ABC, $A'B'C'$, $ABA'B'$, $BCB'C'$ and $CAC'A'$.

The linking coefficient of ABC and $A_1B_1C_1$ is equal to number L (here and everywhere below all equalities supposed modulo 2) of intersection points of the outline ABC and the interior of triangle $A_1B_1C_1$. Let U be the number of intersection points of the outline ABC and lateral faces of polytop τ. The number of intersection points of an outline and a polytop is even. Thus $L+U=0 \Rightarrow L=U \Rightarrow L$ is the number of cross-roads, where the side of $A_1B_1C_1$ is lower than the side of ABC.

Solution of the problems proposed after the semi-final

1'.1 Assume the converse. Denote the blue points by C_1, C_2 and C_3 and red ones by K_1, K_2 and K_3. Then the sides of quadrilateral $C_1K_1C_2K_2$ do not intersect at the interior points. The segment C_3K_3 does not intersect the outline of the quadrilateral $C_1K_1C_2K_2$. Therefore points C_3 and K_3 both are either inside of $C_1K_1C_2K_2$ or outside of it.

In first case point C_3 is inside of one of quadrilaterals, either $C_1K_1C_2K_3$ or $C_1K_2C_2K_3$. If, for example, C_3 lies inside of $C_1K_1C_2K_3$ then C_3K_2 intersects the outline of $C_1K_2C_2K_3$. This leads to a contradiction. Second subcase is similar.

Second case. Segments K_3C_1 and K_3C_2 do not intersect the outline of $C_1K_1C_2K_2$. Hence either K_2 is inside of quadrilateral $K_1C_1K_3C_2$ or K_1 is inside of quadrilateral $K_2C_1K_3C_2$. The situation is reduced to the first case.

1'.2 Let τ be the number of intersection points of outline $ABCD$ and the faces of tetrahedron $A'B'C'D'$. Tetrahedron $A'B'C'D'$ divides the space into two domains: inner and outer. Since points A, B, C, D, A', B', C', D' are in general position then τ is even. So

$$\tau \equiv \mathrm{lk}(ABCD, A'B'C'D') + \mathrm{lk}(ABCD, B'C'D'A') \pmod 2$$

and

$$\Rightarrow \mathrm{lk}(ABCD, A'B'C'D') = \mathrm{lk}(ABCD, B'C'D'A').$$

1'.3 Note that $\mathrm{lk}(ABCD, A'B'C'D') \equiv \mathrm{lk}(ABC, A'B'C') + \mathrm{lk}(ABC, A'D'C') + \mathrm{lk}(ADC, A'B'C') + \mathrm{lk}(ADC, A'D'C') \pmod 2$. This fact and properties 1.5 and 1.6 imply the following statements:

1. $\mathrm{lk}(ABCD, A'B'C'D') = \mathrm{lk}(A'B'C'D', ABCD)$.

2. A continuous motion of the points A, B, C, D, A', B', C', D', which preserves their general position, preserves the number $\mathrm{lk}(ABCD, A'B'C'D')$.

1'.4 Let $ABCD$ and $A_1B_1C_1D_1$ be two closed polygonal lines without common points.

First solution. Let us slightly change positions of vertices of the polygonal lines such that the new set of vertices A', B', C', D', A_1', B_1', C_1', D_1' is in general position. By definition, put

$$\mathrm{lk}(ABCD, A_1B_1C_1D_1) = \mathrm{lk}(A'B'C'D', A_1'B_1'C_1'D_1').$$

Second solution. Denote the halfplane bounded by the line A_1C_1 containing triangle $A_1B_1C_1$ by α. Denote the halfplane bounded by the line A_1C_1 containing triangle $A_1D_1C_1$ by β. The union of these halfplanes splits the space into two parts.

For each intersection point of outline $ABCD$ and the outlines or interiors of triangles $A_1B_1C_1$ and $A_1D_1C_1$ assign 0 if there exists a neighborhood of this point such that the intersection of this neighbourhood and outline $ABCD$ belong to the same part of the space, and 1 otherwise. We define the linking coefficient of the 4-polygon to be the sum of all these numbers modulo 2.

1'.5 Polygonal lines are linked iff their pairs of vertices on each skew lines are linked. Hence the number of linked separated pairs of 4-polygons equals 2.

1'.6 Let four blue and four red points in general position be given. By the total linking number of these 8 points we mean the number of linked separated pairs with vertices at these points. Let B, B', B_1, B_2, B_3 be blue points, and R_1, R_2, R_3, R_4 be red points, such that sets of points B, B_1, B_2, B_3, R_1, R_2, R_3, R_4, and B', B_1, B_2, B_3, R_1, R_2, R_3, R_4 are in general position.

Let us connect B and B' by a polygonal line without sides belonging to plane $R_iR_jB_k$. Let us move B along the polygonal line. The total linking number of the set B, B_1, B_2, B_3, R_1, R_2, R_3, R_4 is constant except some moments when the segment BR_i intersects the segment B_kR_j $(i \neq j)$. Let for instance the segment BR_2 intersect the segment B_1R_1. The linking coefficient changes only for the following separated pairs of the broken lines with vertices at the set of points in question: $BR_2B_2R_3$ and $B_1R_1B_3R_4$, $BR_2B_2R_4$ and $B_1R_1B_3R_3$, $BR_2B_3R_3$ and $B_1R_1B_2R_4$, $BR_2B_3R_4$ and $B_1R_1B_2R_3$. Hence the parity of the total linking number is not changed.

So it is clear that any two sets of four blue and four red points have total linking numbers of the same parity. The previous problem implies that the total linking number is always even.

1'.7 Let blue points B_1, B_2, B_3, B_4 and red points R_1, R_2, R_3, R_4 be in general position. Denote by I the number of linked separated pairs $(\square, \square')$ such that the polygonal line $\square$ contains the segment B_1R_1. Similar to the problem 1'.6 one can prove that the parity of I does not depend on the set of the points. We have $I = 1$ in the example of the problem 1'5. Thus each set has odd I. That is why each set has a linked separated pair of closed 4-polygons.

1'.8 The statement follows from the problems 1'.6 and 1'.7.

2'.1 For instance let us colour points A_1, A_2, A_3 blue and A_4, A_5, A_6 red. One can check directly that the obtained set is positive.

2'.2 Assume the contrary. Thus some two blue points B_1 and B_2 are on different sides of the line passed through two red points R_1 and R_2. So the segment B_1R_1 does not intersect B_2R_2 and segment B_1R_2 does not intersect B_2R_1. This contradicts the definition of positive set.

2'.3 On the contrary, assume that $R_1 > R_2 > R_3 > R_1$. Then bypassing of triangle $R_1R_2R_3$ (along its boundary) all blue points always left to the right. This is possible only if the bypass be clockwise direction and all blue points are inside of the triangle. By our assumption in problems 2'.2–2'5 $N \geq 2$; hence there are at least two blue points. Draw the straight line through them. Then there are two vertices of the triangle which lie on different sides of this line. Then the initial set can not be positive (one can prove it similarly to problem 2'2).

2'.4 Since the initial set of points is positive, by definition it follows that the intersection of R_1B_1 and R_2B_2 is also positive. Let us move from B_1 to R_1. Then point B_2 always lies to the left. So if we move from R_1 to B_2 then the point B_2 also lies to the right. We have by definition $R_1 > R_2$.

2'.5 Problem 2.3 implies that the red points could be numbered in such a way that $R_1 < R_2 < \cdots < R_N$. Problem 2'.4 implies that this numeration is required one.

2'.6 (The solution of V. Chelnokov) Let us numerate red and blue points from left to the right. Then the trefoil is represented by the broken line $R_1B_4R_4B_1R_2B_3R_5B_5R_3B_2R_1$.

2'.7 Suppose that we have a positive set of 5 red and 5 blue points. Let us numerate red points as in problem 2'.5. In similar way we numerate blue points. Namely, one can define the order '>' of blue points similar to the order of red points. One can numerate blue points in the increasing order (in the sense of '>'). Let us consider the polygonal line $R_1B_4R_4B_1R_2B_3R_5B_5R_3B_2R_1$ (see the solution of 2'.6). From the lemma below it follows that it is a trefoil.

Lemma. *A positive set of 5 blue and 5 red points by continuous moving could be transferred to the set of points from Example 1' (during the motion the set preserves general position).*

Scheme of the proof. Let us consider point B_1. Our numeration of the points gives us that the segments beginning at B_1 are higher than all the other. Hence we could move point B_1 in such a way that its projection occupies the position of the most left blue point while B_1 itself would occupy the top position. Then all segments with the beginning at B_1 would also lie at the top position. The same operation could be done for the point B_2. Namely we move B_2 in such a way that its projection occupies the second most left position of blue points, while B_2 itself occupies the second top position. First we apply this operation to all blue points and then to red points. Lemma and the statement of 2'.7 are proved.

2'.8 a) The statement could be easily proved by induction on $n + m$.

The base: $n + m = 6$. Problem 1.1 implies that $R(3, 3) = 6$. Evidently that $R(4, 2) = 4$. The base is established.

The induction step is obtained from the estimation $R(n, m) \le R(n-1, m)+R(n, m-1)+1$. Indeed let us consider the complete graph with $R(n - 1, m) + R(n, m - 1) + 1$ vertices and its vertex A. By the Dirichlet principle from A outgoes either $R(n-1, m)$ edges of the first colour or $R(n, m-1)$ of the second colour. Considering the complete subgraphs with the vertices (different from A) at the ends of mentioned edges we obtain the required result.

b) The proof is similar to previous one (using the estimation $R(l, m, n) \le R(l-1, m, n) + R(l, m-1, n) + R(l, m, n-1) + 1$).

c) **Theorem**. For each $m_1, m_2, m_3, n_1, n_2, n_3$ there exists $R = R(m_1, m_2, m_3, n_1, n_2, n_3)$ such that for any three-coloured colouring of a bipartite graph with $2R$ vertices (R vertices in each part) for some $1 \le i \le 3$ there is complete bipartite subgraph of colour i with m_i vertices in the first part and with n_i vertices in the second part.

The proof is similar to a). It is based on the estimation

$$R \le R(m_1-1, m_2, m_3, n_1, n_2, n_3)+R(m_1, m_2-1, m_3, n_1, n_2, n_3)+R(m_1, m_2, m_3-1, n_1, n_2, n_3)+1.$$

d) *Scheme of the proof.* First we shold prove the following auxillary statement.

Statement. Let a complete bipartite graph with $2R$ vertices (R vertices in each part) be given. By *a triangle* we mean a triple of vertices such that that one of them lies in the first part and two others lie in the second part. Then for each n_1, n_2, n_3 and m_1, m_2, m_3 there exists $R = R(m_1, m_2, m_3, n_1, n_2, n_3)$ such that for each three-coloured colouring of all triangles there exists a complete bipartite subgraph (where all triangles have colour i) with m_i vertices in the first part and with n_i vertices in the second part.

Proof. We use induction on $\sum n_i + \sum m_i$. Problems 2'.7b and 2'.7c give us the base. The induction step is obtained from estimate

$$R \le R(R(m_1 - 1, m_2, m_3, n_1, n_2, n_3), R(m_1, m_2 - 1, m_3, n_1, n_2, n_3), R(m_1, m_2, m_3 - 1, n_1, n_2, n_3)),$$

where $R(x, y, z)$ is the number from 2'.7b. To prove the estimate we consider one of vertices in the first part (assume it is A). According to 2'.7b WLOG one can choose $R(m_1 - 1, m_2, m_3, n_1, n_2, n_3)$ vertices in the second part such that all triangles with vertices at A and two other marked points have the first color. The estimation follows from the induction assumption.

To prove 2'.7d one could consider blue vertex B_1. Depending on the sign of 4-tuple B_1, B_2, R_1, R_2 (positive, negative or neutral) we colour each 3-tuple B_2, R_1, R_2 to one of three colors. This provides the induction step (the proof can be completed similarly to 2'.8c).

e) By 1'.1 there are no neutral sets for $n \geq 3$. Thus d) implies e).

2'.9 Miyochi and Negami theorems for trefoils follows from problem 2'.7, its analog for negative sets and problem 2'.8 for $n = 5$.

2'.10 To solve this problem we recommend to use problems 2'.11 and 2'.12 from the "Hometask". Similar to problem 2.1 use a rope.