Вписанные зацепления

Решения задач, предложенных до промежуточного финиша

1.1 Рассмотрим граф, состоящий из шести вершин и всех ребер, соединяющих их. Каждому человеку сопоставим вершину этого графа. Если двое людей знакомы, то ребро, соединяющее соответствующие им вершины, покрасим в красный цвет, иначе — в синий цвет. Рассмотрим некоторую вершину A. По принципу Дирихле найдутся три вершины X_1, X_2 и X_3 такие, что ребра AX_1, AX_2, AX_3 одного цвета. Для определенности считаем, что это — красный цвет. Если какое-то из ребер X_iX_j $(i,\ j \in \{1;2;3\})$ красного цвета, то все стороны треугольника AX_iX_j имеют красный цвет, и тем самым задача решена. В противном случае все стороны треугольника $X_1X_2X_3$ имеют синий цвет. И в этом случае задача тоже решена.

1.2 *Первое решение.* Если выпуклая оболочка рассматриваемых точек четырех- или пятиугольник, то утверждение задачи очевидно: пересекутся две диагонали. Рассмотрим случай, когда выпуклой оболочкой является треугольник ABC. Две оставшиеся точки D и E из данных пяти лежат внутри треугольника ABC. E лежит внутри одного из треугольников DAB, DAC или DBC — допустим, в DAC. Тогда EB пересекается с одним из отрезков DA или DC.

Второе решение. Утверждение этой задачи является двумерным аналогом теоремы 1 и может быть доказано аналогичным образом. Набор точек на плоскости назовем набором *общего положения*, если никакие три из них не лежат на одной прямой. Назовем *зацепленностью* пятерки точек общего положения число пар отрезков с концами в этих точках, пересекающихся во внутренней точке. Легко привести пример пятерки, зацепленность которой равна 1. После этого для доказательства утверждения задачи достаточно показать, что четность зацепленности не зависит от выбора 5 точек. Пусть даны две пятерки. Одну из них можно перевести в другую, по очереди двигая точки (причем движение можно считать равномерным). Пока точки движутся так, что пятерка остается в общем положении, зацепленность, очевидно, не меняется. Как только одна из точек (скажем, A) попадает на отрезок с концами в двух других точках (скажем, B и C), зацепленность либо не меняется, либо меняется на ± 2. Действительно, в такой момент меняется "состояние " (т. е. пересекающиеся отрезки становятся непересекающимися, и наоборот) ровно двух пар отрезков: AD, BC и AE, BC (где D и E две оставшиеся точки пятерки).

1.3 Достаточно доказать, что если $lk(\Delta,\Delta') = 1$ или $lk(\Delta',\Delta) = 1$, то контур треугольника Δ пересекает плоскость треугольника Δ'. Первый случай очевиден. Во втором случае контур треугольника Δ' пересекает внутренность треугольника Δ. Поэтому внутренность треугольника Δ пересекает плоскость треугольника Δ'. Однако в таком случае и контур треугольника Δ персекает плоскость треугольника Δ'.

1.4 Пусть треугольник Δ зацеплен с треугольником Δ'. Тогда выполнение условия 1) очевидно. Выполнение условия 2) следует из задачи 1.3. Действительно, так как треугольник Δ пересекает плоскость треугольника Δ', то множество $\Delta \cap l$ непусто. Из соображений общего положения следует, что оно не может состоять из одной точки. Докажем теперь выполнение условия 3). Пусть множество $\Delta \cap l$ состоит из двух точек A и B, а множество $\Delta' \cap l$ состоит из двух точек A' и B'. Все общие точки контура треугольника Δ и внутренности треугольника Δ' лежат на отрезке $A'B'$. Значит, ровно одна из точек A и B принадлежит отрезку $A'B'$. А это означает, что пары A, B и A', B' зацеплены на l.

Обратно, пусть пары A, B и A', B' зацеплены на l. Тогда согласно сказанному выше контур треугольника Δ пересекает внутренность треугольника Δ' в единственной точке, то есть Δ зацеплен с Δ'.

1.5 Каждое из условий $lk(\Delta,\Delta') = 1$ и $lk(\Delta',\Delta) = 1$ в соответствии с утверждением задачи 1.4 равносильно одному и тому же условию.

1.6 Из задачи 1.4 следует, что $lk(\Delta,\Delta') = 1$ тогда и только тогда, когда выполняются условия 1)-3). Никакое из этих свойств не может измениться при допустимом движении. В проверке нуждается только сохранения свойства 1), которое может нарушиться, только когда плоскости треугольников Δ и Δ' становятся параллельны. Но тогда из задачи 1.3 следует, что в этот момент, а также непосредственно до и после него $lk(\Delta, \Delta') = 0$.

1.7 При построении графика может оказаться полезной следующая лемма:

Лемма Пусть вершина A треугольника Δ движется равномерно по отрезку в пространстве, а остальные две вершины и треугольник Δ' неподвижны. Обозначим через Δ_t положение треугольника в момент времени t, где $0 \leq t \leq 2$. Предположим, что набор 6 вершин треугольников Δ_t и Δ' находится в общем положении при всех t, кроме $t = 1$.

а) Если $\Delta_1 \cap \Delta' = \emptyset$, то $\mathrm{lk}(\Delta_0, \Delta') = \mathrm{lk}(\Delta_2, \Delta')$.

б) Если Δ_1 и Δ' пересекаются в единственной точке, не совпадающей ни с одной из их вершин, то числа $\mathrm{lk}(\Delta_0, \Delta')$ и $\mathrm{lk}(\Delta_2, \Delta')$ отличаются на 1.

Доказательство этой леммы, построение графика и задачи 1.8-1.10 остаются в качестве задач после промежуточного финиша.

2.1 Самый правильный способ решить эту задачу — это взять веревку, завязать на ней узел с рис. 4 и попытаться продеформировать его в один из узлов на рис. 2, 3. То же относится к зацеплениям. Деформацию веревки удобно изображать на бумаге в виде серии картинок, в которой соседние картинки получаются друг из друга небольшой деформацией и отличаются мало.

2.2 Достаточно показать, что замкнутая ломаная с ≤ 5 звеньями незаузлена (то есть представляет тривиальный узел). Ясно, что треугольник незаузлен. Ясно, что если в n-угольнике (то есть n-звенной замкнутой ломаной) натянутый на пару соседних звеньев треугольник не пересечен никаким другим звеном, то эту пару звеньев можно стянуть по диагонали, то есть получить представление того же узла $(n-1)$-угольником. Поскольку в 4-угольнике препятствий для стягивания нет, то он стягивается в треугольник, и, значит, незаузлен. Пусть в 5-угольнике $ABCDE$ есть препятствие для стягивания пары звеньев AB и BC. Тогда звено DE пересекает треугольник ABC. Но тогда звено AE не пересекает треугольник BCD, так как они лежат по разные стороны от плоскости ABC.

2.3 *Ответы:* а) 6; б) 9; в) 6; г) 7; е) 8.

Пример к пункту а) изображен на рисунке 1. Другой пример: правильный треугольник ABC в горизонтальной плоскости, второй треугольник DEF с вершиной F, лежащей вне треугольника ABC в его плоскости, и вершинами D и E, расположенными соответственно в точности над и под центром треугольника ABC.

Минимальность. В пунктах а) и б) — очевидна. В пункте в) следует из задачи 2.2. Докажем минимальность набора в пункте г). Для этого достаточно показать, что любая пара треугольников в пространстве либо представляет простое зацепление, либо их можно расцепить. Если контур одного из треугольников не пересекает внутренность другого, то препятствий для расцепления нет. Иначе каждый из контуров треугольников должен пересекать внутренность другого в единственной точке. Рассмотрим плоскость одного из треугольников (скажем, ABC). Будем считать ее горизонтальной. Пусть сторона DE треугольника пересекает треугольник ABC, а F — ето третья вершина. Двигая F вертикально (и вместе с ней — стороны FD и FE), мы можем поместить ее на горизонтальную плоскость. После этого мы можем подвинуть вершины D и E (вместе с соответствующими сторонами) и получить описанный выше пример к пункту а).

Примеры к пунктам б)–е), минимальность в пункте е) и пункт д) целиком остаются в качестве задач после промежуточного финиша.

2.4 а) Ответ: 1; следует из примера 3. б) Ответ: 0, решение остается в качестве задачи.

2.5 Доказательство этого утверждения также остается в качестве задачи после промежуточного финиша. Это утверждение может оказаться полезным при решении задач из первой части.