Задача предложена М. Скопенковым, О. Скрябиным и А. Шаповаловым
(при участии И. Дынникова и А. Скопенкова)

Первая часть этой задачи посвящена доказательству следующей теоремы:

Теорема 1. *(Теорема Конвея–Гордона–Закса, 1981) Пусть в пространстве даны 6 точек, никакие 4 из которых не лежат в одной плоскости. Тогда найдутся два зацепленных треугольника с вершинами в этих точках.*

Вторая часть посвящена ее обобщению на произвольные зацепления (определения и примеры даны ниже). Две части задачи почти не используют друг друга, поэтому ее можно начинать решать как с пункта 1.1, так и с пункта 2.1.

1. Зацепленные треугольники

1.1 В любой компании из 6-ти человек найдутся либо трое попарно знакомых, либо трое попарно незнакомых.

1.2 На плоскости даны 5 точек, никакие три из которых не лежат на одной прямой. Докажите, что какие-то два отрезка с концами в этих точках пересекаются во внутренней точке.

Определение общего положения. Будем говорить, что набор точек в пространстве находится *в общем положении*, если никакие 4 из них не лежат в одной плоскости.

Пример 1. (Рис. 1) Рассмотрим в горизонтальной плоскости правильный шестиугольник. Набор точек A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6, расположенных в точности над его вершинами на высотах 1, 2, 3, 4, 5, 6 соотвественно, находится в общем положении.

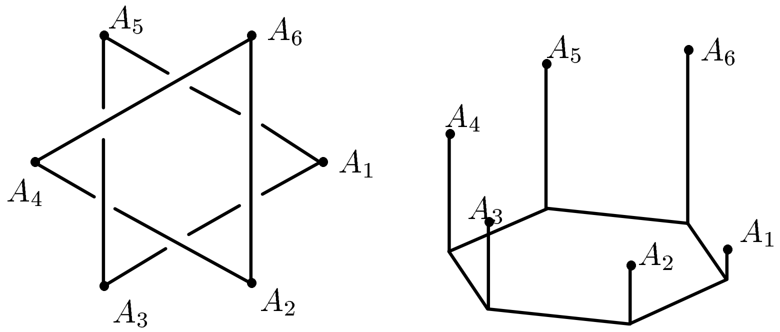

Рис. 1.

Пример 2. Точки $(t; t^2; t^3)$ в декартовой системе координат, где $t \in \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$, находятся в общем положении (предлагаем проверить это самостоятельно).

Определение коэффициента зацепления треугольников. Пусть Δ, Δ' — два треугольника, набор 6 вершин которых находится в общем положении. Будем говорить, что эти треугольники *зацеплены*, если контур треугольника Δ пересекает внутренность треугольника Δ' в единственной точке. *Коэффициентом зацепления* этих треугольников назовем число

$$\mathrm{lk}(\Delta, \Delta') = \begin{cases} 1, & \text{если } \Delta \text{ и } \Delta' \text{ зацеплены,} \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Пример 3. Треугольники $A_1A_3A_5$ и $A_2A_4A_6$ из примера 1 зацеплены.

1.3 Если контур одного из треугольников Δ и Δ' не пересекается с плоскостью, в которой лежит другой треугольник, то $\mathrm{lk}(\Delta, \Delta') = 0$.

Определение зацепленных пар точек. Пусть на горизонтальной прямой отмечено 2 красных и 2 синих точки (точки попарно различны). Будем говорить, что эти пары *зацеплены*, если они расположены на прямой в порядке (красная, синяя, красная, синяя) или (синяя, красная, синяя, красная), считая справа.

1.4 Треугольники Δ и Δ' зацеплены $\Leftrightarrow$ выполнены следующие 3 условия:

1) плоскости треугольников Δ и Δ' пересекаются по некоторой прямой l;

2) каждое из множеств $\Delta \cap l$ и $\Delta' \cap l$ состоит из двух точек (здесь и далее Δ и Δ' обозначают контуры треугольников);

3) пары точек $\Delta \cap l$ и $\Delta' \cap l$ зацеплены на прямой l.

1.5 $\mathrm{lk}(\Delta, \Delta') = \mathrm{lk}(\Delta', \Delta)$.

1.6 $\mathrm{lk}(\Delta, \Delta') = \mathrm{const}$, если Δ движется так, что набор 6 вершин треугольников Δ и Δ' остается в общем положении.

1.7 Пусть точка A_1 из примера 1 движется вверх с постоянной скоростью. Постройте график зависимости $\mathrm{lk}(A_1A_3A_5, A_2A_4A_6)$ от времени.

Определение зацепленности шестерки точек. Пусть в пространстве даны 6 точек общего положения. Назовем *разделенной парой* два треугольника с вершинами в этих точках, не имеющие общих вершин. *Зацепленностью* данной шестерки точек назовем количество зацепленных разделенных пар.

Замечание. Зацепленность шестерки точек равна

$$\sum \mathrm{lk}(\Delta, \Delta'),$$

где сумма берется по всем разделенным парам (Δ, Δ').

1.8 Докажите, что четность зацепленности не зависит от выбора шестерки точек.

1.9 Приведите пример шестерки точек, зацепленность которой равна 1.

1.10 Докажите теорему 1.

2. Вписанные узлы и зацепления

Основные понятия. *Узел* можно представлять себе как веревку, концы которой соединены. Веревку будем считать эластичной, и узлы, получающиеся друг из друга деформацией веревки, различать не будем.

Примеры *различных* узлов: тривиальный K, правый и левый трилистники T, восьмерка E (рис. 2).

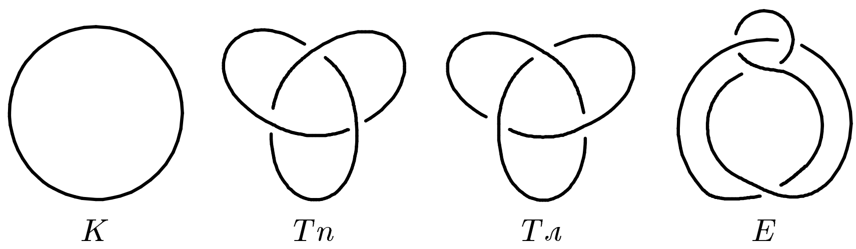

Рис. 2.

Если взять не одну веревку, а несколько, и у каждой из них соединить концы, то получим *зацепление.*

Примеры *различных* зацеплений: зацепление Хопфа H (или простое зацепление), двойное зацепление D, зацепление Уайтхеда W, кольца Борромео B (рис. 3).

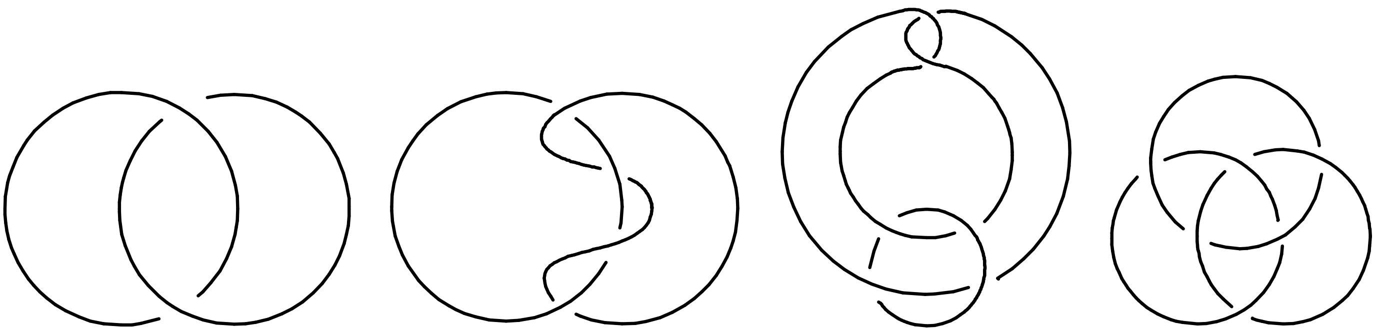

Рис. 3.

2.1 В какие из узлов и зацеплений, изображенных на рис. 2 и 3, можно продеформировать узлы и зацепления на рис. 4?

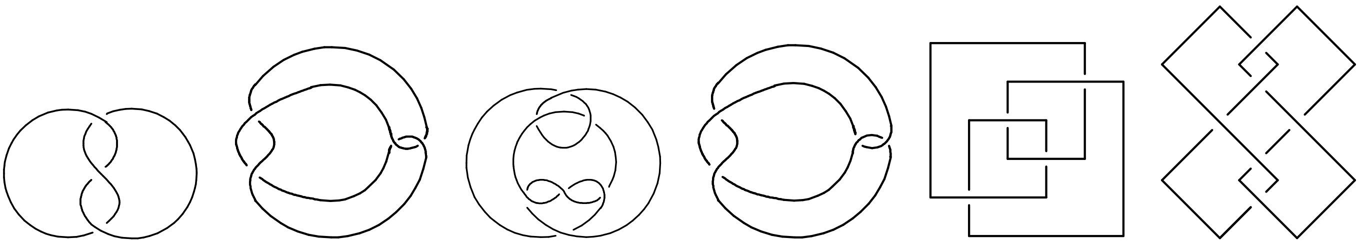

Рис. 4.

Определение вписанного узла и зацепления. Пусть в пространстве дано некоторое множество точек и узел. Если веревку продеформировать в ломаную, все вершины которой принадлежат данному множеству то получим узел, *вписанный* в данное множество точек. (При этом часть точек множества может остаться незадействованной). Будем говорить также, что полученная ломаная *представляет* данный узел. Аналогично определяется *вписанное* зацепление.

Замечание. Если каждую точку множества соединить прямолинейным отрезком с каждой из остальных точек, то вписанный узел является подмножеством полученной фигуры.

Теорема 2. *(Теорема Негами, 1991) Для любого узла найдется число N такое, что в любое множество N точек в пространстве, никакие 4 из которых не лежат в одной плоскости, можно вписать данный узел.*

(Попробуйте доказать эту теорему для трилистника. Указания, а также связанные с этой теоремой открытые вопросы будут даны в задачах после промежуточного финиша.)

2.2 Докажите, что всякий узел, вписанный в набор из ≤ 5 точек, тривиален.

2.3 В какой наименьший набор точек можно вписать а) простое зацепление; б) кольца Борромео; в) трилистник; г) двойное зацепление; д) восьмерку; е) зацепление Уайтхеда?

(Доказательства минимальности мы не требуем).

2.4 Найдите коэффициенты зацепления (см. определение выше):

а) двух треугольников, представляющих простое зацепление;

б) двух из трех треугольников, представляющих кольца Борромео.

2.5 Пусть даны два треугольника в пространстве. Предположим, что проекции никаких 3 из их 6 вершин на горизонтальную плоскость не лежат на одной прямой. Изобразим на рисунке проекции треугольников и в каждой точке пересечения проекций (*перекрестке*) укажем, сторона какого треугольника проходит выше (рис. 1). Докажите, что коэффициент зацепления равен четности числа перекрестков, в которых сторона первого треугольника проходит выше стороны второго.