Задачи, предложенные после промежуточного финиша

(Решения не используют результатов предыдущих пунктов)

2. Вписанные узлы и зацепления

Определение узла (зацепления), вписанного в раскрашенное множество. Пусть в пространстве дано множество точек, окрашенных в два цвета. Тогда под *вписанным узлом* будем понимать ломаную, представляющую данный узел, звенья которой соединяют точки разных цветов. *Вписанное зацепление* определяется аналогично (см., например, теорему 1').

Теорема 2'. *(Теорема Миёчи, 1994) Для любого узла (зацепления) найдется число N такое, что в любое множество N синих и N красных точек в пространстве, никакие 4 из которых не лежат в одной плоскости, можно вписать данный узел (зацепление).*

(Очевидно, теорема Негами следует из теоремы Миёчи).

Определение положительного набора. Пусть в пространстве дан набор N синих и N красных точек, находящийся в общем положении (смотри определение выше). Проведем все отрезки, соединяющие точки разного цвета. Нарисуем на горизонтальной плоскости проекцию полученной фигуры. В дальнейшем нас будет интересовать только эта плоская картинка, и мы будем говорить 'точка набора' и 'отрезок', подразумевая соответственно 'проекция точки набора' и 'проекция проведенного нами отрезка'.

Пусть точки набора не попадают внутрь отрезков. В каждой точке пересечения отрезков (*перекрестке*) укажем, какой из отрезков проходит выше (как в задаче 2.5). Назовем перекресток *положительным* (рис. 1' слева), если при движении по отрезку, который проходит выше, от синего конца к красному синий конец другого отрезка остается слева. Иначе перекресток назовем *отрицательным* (рис. 1' справа).

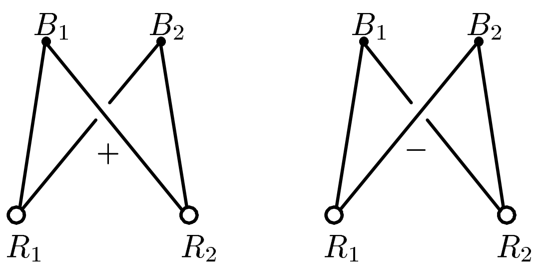

Рис. 1'.

Исходный набор точек назовем *положительным*, если для любых двух синих точек B_1, B_2 и любых двух красных точек R_1, R_2 одна из пар отрезков B_1R_1, B_2R_2 и B_1R_2, B_2R_1 пересекается во внутренней точке, причем полученный перекресток положителен. Аналогично определяется *отрицательный* набор.

Пример 1'. Пример положительного набора изображен на рис. 2' (сравни с задачей 1'.5).

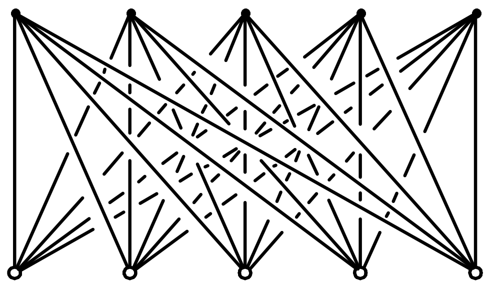

Рис. 2'.

2'.1 Раскрасьте точки из примера 1 в два цвета так, чтобы получился положительный набор.

В задачах 2'.2–2'.5 предполагается, что дан некоторый положительный набор, причем $N \geq 2$.

2'.2 Все синие точки лежат по одну сторону от любой прямой, соединяющей две красные точки.

Определение порядка '>'. Пусть дан положительный набор. Пусть R_1 и R_2 — две красные точки. Скажем, что $R_1 > R_2$, если при движении по прямой R_1R_2 от R_1 к R_2 все синие точки остаются справа.

2'.3 Если $R_1 > R_2$ и $R_2 > R_3$, то $R_1 > R_3$.

2'.4 Если отрезок R_1B_1 проходит выше R_2B_2, то $R_1 > R_2$.

2'.5 Красные и синие точки можно занумеровать так, что при любых $i < j$ и $k \neq l$ отрезок R_iB_k проходит выше R_jB_l.

2'.6 Впишите трилистник в набор точек из примера 1'.

2'.7 В любой положительный набор 5 синих и 5 красных точек можно вписать трилистник.

2'.8 (Теоремы Рамсея) а) Докажите, что для любых m и n найдется такое $R(m, n)$, что при любой раскраске ребер полного графа с $R(m, n)$ вершинами в два цвета найдется либо полный подграф первого цвета с m вершинами, либо полный подграф второго цвета с n вершинами.

б) Сформулируйте и докажите обобщение пункта а) на случай трех цветов.

в) Сформулируйте и докажите обобщение пунктов а) и б) на полные двудольные графы.

г) Назовем набор точек общего положения в пространстве, окрашенных в два цвета, *нейтральным*, если проекции на плоскость любых двух отрезков с разноцветными концами не пересекаются (во внутренних точках). Докажите, что для любого n найдется такое $R(n)$, что любой набор $R(n)$ синих и $R(n)$ красных точек общего положения в пространстве содержит либо положительный, либо отрицательный, либо нейтральный набор n синих и n красных точек.

д) Докажите, что для любого n найдется такое $R(n)$, что любой набор $R(n)$ синих и $R(n)$ красных точек общего положения в пространстве содержит либо положительный, либо отрицательный набор n синих и n красных точек.

2'.9 Докажите теоремы Миёчи и Негами для трилистника.

2'.10 Впишите узлы и зацепления на рис. 2, 3 в какие-нибудь положительные наборы точек и докажите для них теоремы Миёчи и Негами.