”12”

Задача предложена В. Прасоловым, М. Скопенковым и С. Дориченко

Вводные задачи

Пусть на клетчатой плоскости нарисован выпуклый многоугольник $M = A_1A_2\dots A_n$ с вершинами в узлах сетки (Рис. 1 слева). Предположим, что внутри M расположен ровно один узел O. Отложим векторы $\overrightarrow{A_1A_2}, \overrightarrow{A_2A_3}, \dots \overrightarrow{A_nA_1}$ от узла O и на каждом из полученных отрезков выберем ближайший к точке O узел. Соединяя последовательно выбранные n точек, получим некоторый многоугольник M^*, который называется *двойственным* к исходному многоугольнику (Рис. 1 справа).

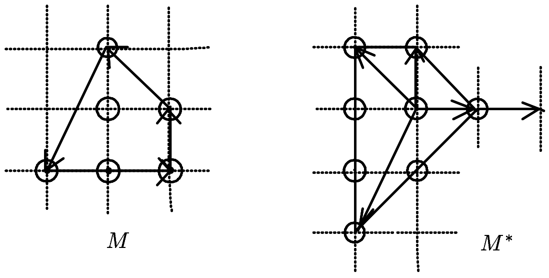

Рис. 1.

Данный цикл задач посвящен элементарному доказательству следующей теоремы, открытой всего несколько лет назад:

Теорема о 12. *Пусть внутри выпуклого многоугольника M расположен ровно один узел O, на его границе — b узлов, а на границе многоугольника M^* — b^* узлов. Тогда*

$$b + b^* = 12.$$

0. Нарисуйте многоугольники, двойственные к изображенным на рис. 2. Сколько узлов расположено внутри M^* в каждом случае? Чему равны M^{**}? Как связаны площади M и M^*? Возможно ли равенство $M = M^*$? Сформулируйте Ваши наблюдения и предположения, попытайтесь их доказать.

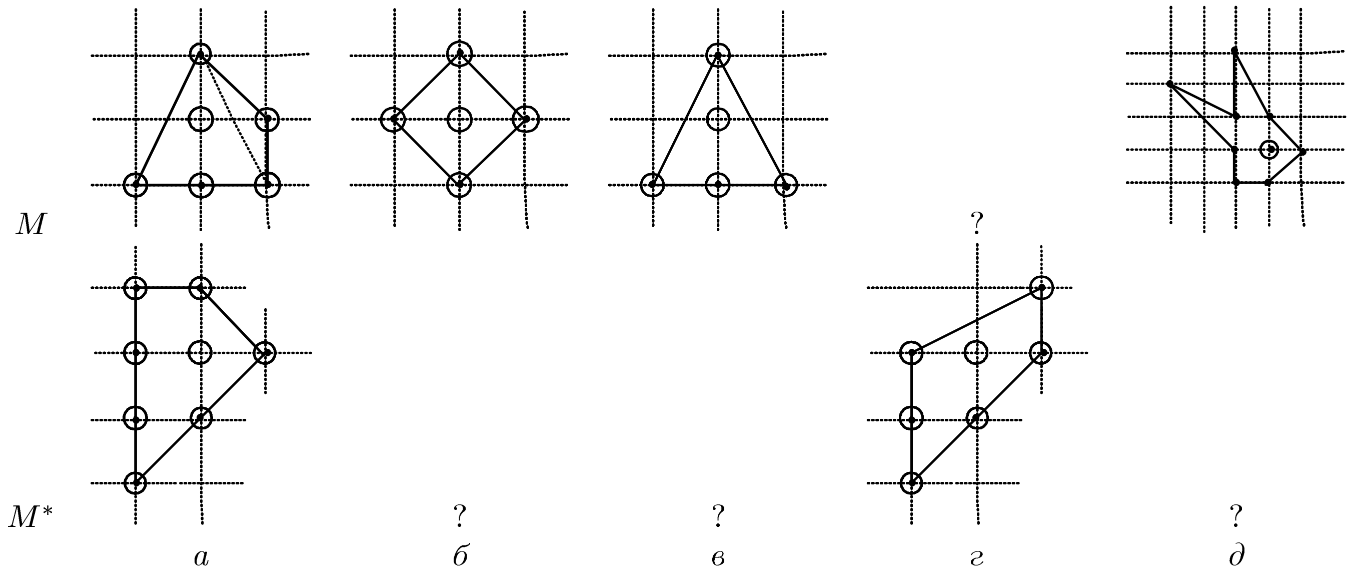

Рис. 2.

1. Внутри треугольника ровно 1 узел. Какое наибольшее число узлов может быть на границе?

2. Докажите теорему о 12 для параллелограмма с $b = 4$.

Typeset by $\mathcal{A}\mathcal{M}\mathcal{S}$-TEX

Простым треугольником назовем треугольник, не содержащий других узлов, кроме вершин (как внутри, так и на сторонах). *Прыжок (рис. 3)* — это преобразование, при котором вершина A треугольника ABC заменяется на точку, симметричную ей относительно B.

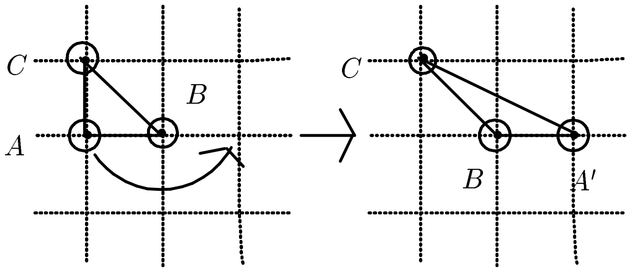

Рис. 3.

3. а) Площадь треугольника при прыжке не меняется;

б) Из простого треугольника при прыжке получается простой;

в) У простого треугольника один из углов — тупой или прямой (причем последний случай возможен только для треугольника со сторонами 1, 1, $\sqrt{2}$, который мы назовем *минимальным*);

г) Из любого простого не минимального треугольника одним прыжком можно получить треугольник, у которого наибольшая сторона меньше, чем наибольшая сторона исходного.

д) Любой простой треугольник можно конечным числом прыжков перевести в минимальный;

е) Площадь простого треугольника равна 1/2.

4. а) Выпуклый четырехугольник, не содержащий узлов (кроме вершин), — параллелограмм.

б) Существует ли выпуклый пятиугольник, не содержащий внутри себя узлов?

в) Внутри выпуклого многоугольника ровно 1 узел. Какое наибольшее число вершин он может иметь?

5. а) Если на сторонах треугольника нет узлов (кроме вершин), а внутри него — ровно 1 узел, то это — точка пересечения медиан треугольника.

б) Докажите теорему о 12 для треугольника с $b = 3$.

Пусть S — площадь многоугольника, внутри которого — i узлов, а на границе — b узлов.

6. а) Рассмотрим триангуляцию многоугольника с вершинами в данных $b + i$ узлах. Сколько в ней может быть треугольников?

б) Докажите *формулу Пика:*

$$S = i + \frac{b}{2} - 1.$$

7. Пусть отношение площади многоугольника к квадрату одной из его сторон иррационально (так будет, например, для правильного треугольника). Докажите, что подобный ему многоугольник нельзя нарисовать на клетчатой бумаге так, чтобы вершины лежали в узлах.

8. Шахматный король обошел доску 8×8 клеток, побывав на каждом поле ровно 1 раз и последним ходом вернувшись на исходное поле. Ломаная, соединяющая последовательно центры полей, которые проходил король, не имеет самопересечений.

а) Какую площадь может ограничивать эта ломаная?

б) Какую наибольшую длину она может иметь?

Удалением треугольника назовем операцию отрезания от многоугольника M простого треугольника, имеющего с ним две общие стороны. Например, из многоугольника на рис. 2а удалением треугольника получается многоугольник на рис. 2в. Обратную операцию назовем *добавлением треугольника.*

9. Верно ли, что любые два многоугольника

а) на рис. 2; б) без узлов внутри; в) выпуклые с ровно 1 узлом внутри;

получаются друг из друга серией удалений и добавлений треугольников?

"12"

Основные задачи

Пусть O — начало декартовой системы координат. Сопоставим каждой точке $A(a,b) \neq O$ прямую A^*, задаваемую уравнением $ax+by=1$. Эта прямая называется *двойственной* к данной точке. Наоборот, каждой прямой $ax+by=1$ сопоставим *двойственную* точку (a,b).

10. Нарисуйте фигуры, двойственные к фигурам на рис. 4. Проверьте, что на рис. 4а $l^* \in A^*$ и что на рис. 4б прямые A^*, B^*, C^* проходят через одну точку. Докажите, что для любой точки $C \neq O$ прямая C^* перпендикулярна OC и проходит через точку $C' \in OC$, такую что $OC \cdot OC' = 1$.

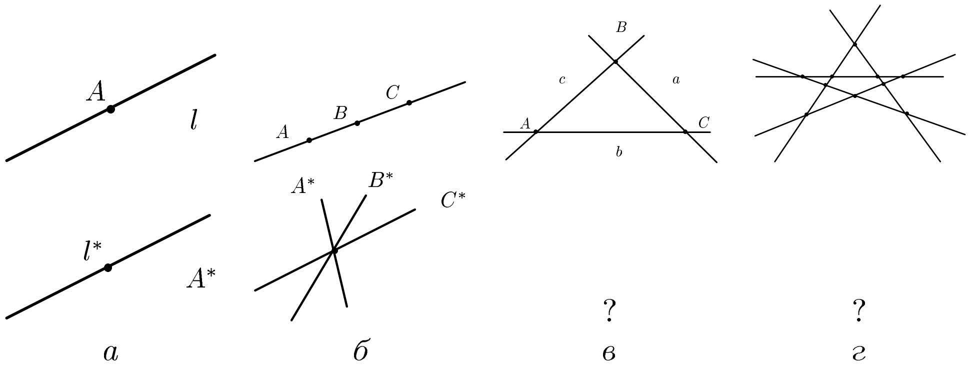

Рис. 4.

Для многоугольника $M = A_1 \dots A_n$ положим $M^* = (A_1A_2)^* \dots (A_nA_1)^*$.

11. Проверьте, что это определение двойственного многоугольника согласуется с предыдущим (с точностью до поворота на 90°). Докажите равенство $M^{**} = M$.

12. Если внутри M расположен ровно 1 узел,то внутри M^* также расположен ровно 1 узел.

13. а) При удалении треугольника из M происходит добавление треугольника к M^*.

б) Из любого выпуклого многоугольника с ровно одним узлом внутри последовательностью удалений/добавлений треугольников можно получить параллелограмм с $b=4$.

в) Докажите теорему о 12.

14. Какая фигура будет двойственной к невыпуклому многоугольнику (рис. 2д)? При каком условии на M два определения M^* равносильны? Как обобщить теорему о 12 на невыпуклые многоугольники?

Двойственная кривая γ^* — это ГМТ двойственных ко всем касательным к кривой γ.

15. Какая кривая двойственна единичной окружности? Завершите рис. 5. Верно ли, что $\gamma^{**} = \gamma$?

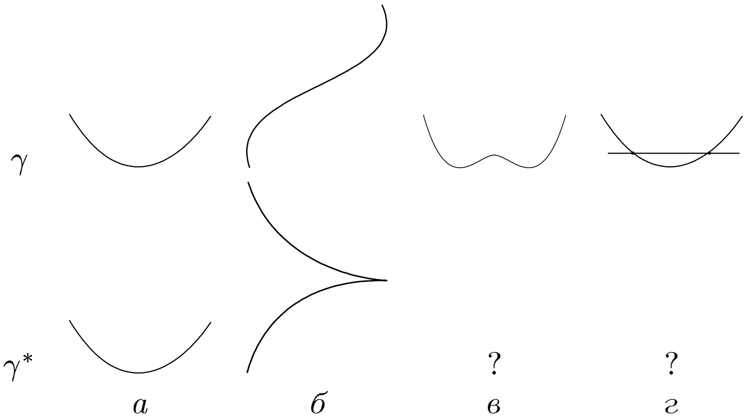

Рис. 5.

16*. Как обобщить теорему о 12 на многоугольники с более чем одним узлом внутри?

[1] Н. Б. Васильев, *Вокруг формулы Пика*, Квант **12** (1974).

[2] Б. Поонен и Ф. Родригес-Виллегас, *Решеточные многоугольники и число 12*, Amer. Math. Mon. **107:3** (2000), 238–250. (на английском)

[3] Д. Реповш, М. Скопенков и М. Ценцель, *Элементарное доказательство теоремы о 12 целых точках*, представлено в Мат. Заметки.

[4] С. Л. Табачников, *Геометрия уравнений*, Квант **10** (1988).