”12”
Дополнительные задачи

17. Нужно провести по линиям сетки замкнутую несамопересекающуюся ломаную, которая бы проходила через все узлы клетчатой бумаги, лежащие внутри прямоугольника $p \times q$ клеток.

а) При каких p и q это возможно?

б) Какую длину будет иметь эта ломаная?

в) Какую площадь она будет ограничивать?

18. а) Обозначим через kM многоугольник, который получается из M гомотетией с коэффициентом k с центром в начале координат. Докажите формулу $2S(M) = n(2M) - 2n(M) + 1$, где $n(M)$ — число узлов внутри и на границе M.

б) Придумайте и докажите аналогичную формулу для объема многогранника в пространстве.

19. Придумайте оценку для максимального числа вершин выпуклого многоугольника через число узлов внутри него.

Аффинным преобразованием назовем преобразование плоскости, заданное формулой

$$\begin{cases} x' &= ax + by, \\ y' &= cx + dy, \end{cases}$$

переводящее целочисленную решетку в себя (это означает, что числа a, b, c, d — целые и $ad - bc = 1$).

20. Классифицируйте многоугольники

а) без узлов внутри; б) с ровно одним узлом внутри;

с точностью до аффинных преобразований.

21. а) Найдите образ прямой $y = ax + b$ при преобразовании $(x, y) \mapsto (\frac{x}{y}, \frac{1}{y})$.

б) Число решений уравнения $x^2 + ax + b = 0$ $(x^3 + ax + b = 0)$ равно числу касательных, которые можно провести к кривой $x^2 = 4y$ $(4x^3 = -27y^2)$ из точки (a, b).

в) Сколько решений имеет уравнение $x^3 + ax + b = 0$ в зависимости от a и b?

г) Попытайтесь исследовать таким образом другие уравнения.

"12"
Решения задач

0. См. рис. 6а–г. Для многоугольника на рис. 2д не существует двойственного, поскольку он не выпуклый (см. также задачу 14). На рис. 6д показан пример, когда $M = M^*$. Возможные наблюдения:

- внутри M^* расположен ровно 1 узел (см. задачу 12);
- $M^{**} = -M$ (см. задачу 11)
- $S(M) + S(M^*) = 6$, что равносильно теореме о 12, так как по формуле Пика (задача 6б) $S(M) = i + \frac{b}{2} - 1 = \frac{b}{2}$.

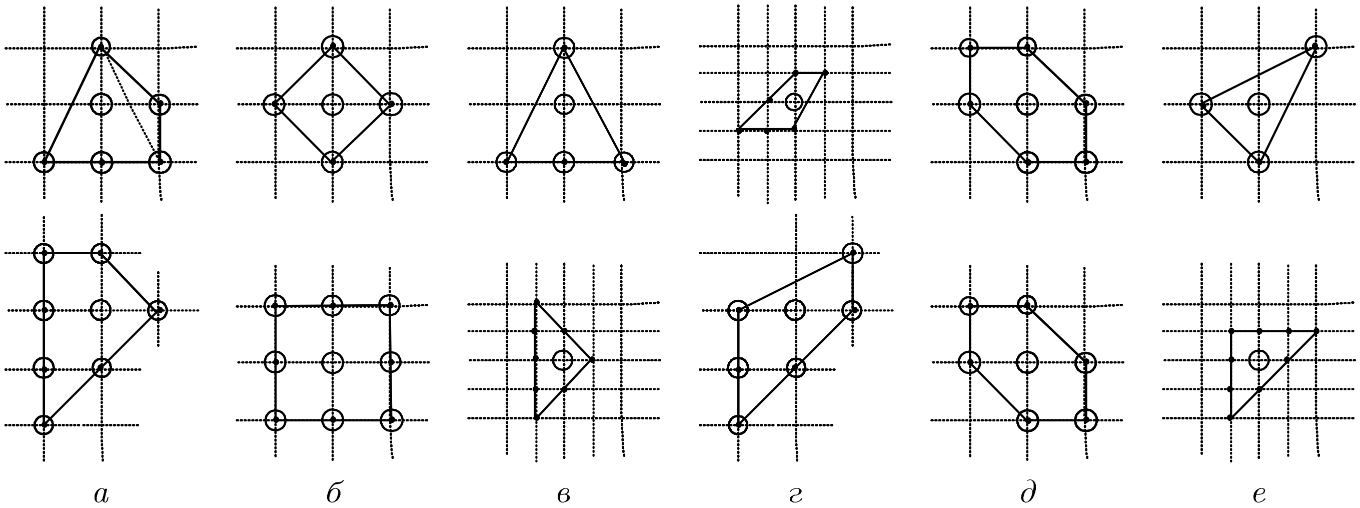

Рис. 6.

1. Ответ: 9. Пример изображен на рис. 6е. Идею построения примера подсказывает теорема о 12. Раз на границах треугольников T и T^* в сумме расположено 12 узлов, то, чтобы максимизировать число узлов на границе T, нужно минимизировать их число на границе T^*, и наоборот. Поэтому нужно взять треугольник со всего 3 узлами на границе, тогда двойственный треугольник и будет искомым примером.

Максимальность числа 9 следует, конечно, из теоремы о 12. Приведем независимое доказательство (рис. 7а). Если на каждой стороне треугольника расположено не более 2 узлов (не считая вершин), то доказывать нечего. Рассмотрим случай, когда одна из сторон треугольника, назовем ее AB, содержит ≥ 3 узлов (такая ситуция действительно возможна, см. рис. 6в). Достаточно доказать, что на остальных сторонах расположено не более 1 узла. Пусть это не так, например, AC содержит ≥ 2 узлов. Выберем из них узел D, ближайший к A. Проведем $DE \parallel AB$, где $E \in AC$. Выберем на стороне AB узел F, ближайший к A. Рассмотрим точки G и H на отрезке DE, такие что $DG = AF$ и $DH = AF$, очевидно, это — узлы решетки. Так как узлы решетки разбивают AB и AC на равные отрезки, то $CD : CA \geq \frac{2}{3}$ и $AF : AB \leq \frac{1}{4}$. Из подобия $DE : AB \geq \frac{2}{3}$. Отсюда следует, что $DH < DE$, то есть G и H лежат внутри треугольника, что противоречит условию. Максимальность доказана.

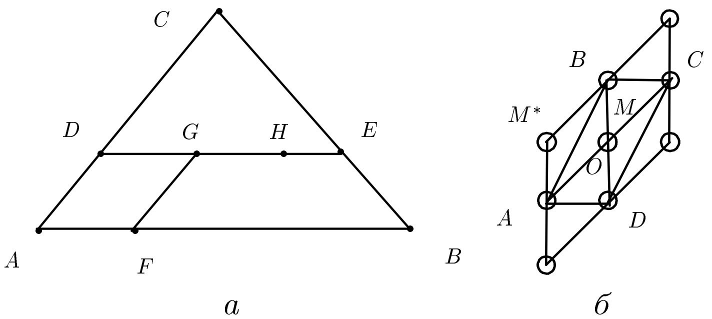

Рис. 7.

2. Действительно, в этом случае $O = AC \cap BD$ (рис. 7б). Это следует из того, что точка, симметричная точке O относительно $AC \cap BD$, — целая и лежит внутри $ABCD$, а поэтому совпадает с O. Легко видеть, что M^* — параллелограмм, стороны которого получаются из диагоналей AC и BD параллельными переносами на вектора $\pm\overrightarrow{OB}$ и $\pm\overrightarrow{OA}$ соответственно. Так как на этих диагоналях лежит единственная целая точка O, то на каждой стороне параллелограмма M^* лежит по одной целой точке, откуда $b + b^* = 4 + 8 = 12$.

3. а) Треугольники ABC и $A'BC$ имеют общее основание BC, а поскольку $AB = BA'$, то соответствующие высоты равны. Значит, площади этих треугольников равны.

б) Пусть D — середина BC. Заметим, что при центральной симметрии с центром D решетка переходит в себя. Поэтому если треугольник ABC — простой, то его образ при этой центральной симметрии $A''BC$ — тоже простой. Аналогично, треугольник $A''BA'$ — простой, поскольку получается центральной симметрией из $A''BC$. Значит, внутри параллелограмма $A''A'BC$ нет узлов, в частности, $A'BC$ — простой.

в) Рассмотрим минимальный прямоугольник со сторонами, параллельными линиям сетки, содержащий наш треугольник. Тогда на каждой его стороне лежит по вершине треугольника. Это возможно, только если хотя бы одна из вершин треугольника совпала с вершиной прямоугольника. Если таких совпадающих вершин три, то легко видеть, что наш треугольник — минимальный. Если их две, и они являются противоположными (для прямоугольника), то, очевидно, угол при третьей вершине треугольника — тупой. Остальные случаи для простого треугольника невозможны. Действительно, пусть треугольник и прямоугольник имеют общую вершину A, а больше совпадающих вершин либо нет, либо это одна из соседних с ней вершин прямоугольника. Обозначим через D вершину прямоугольника, противоположную к A, а через M середину стороны треугольника, противоположной к A. Тогда легко видеть, что точка, симметричная точке D относительно M, — узел, лежащий внутри исходного треугольника или внутри его стороны.

г) Достаточно сделать прыжок через вершину B с тупым углом. Так как AC — наибольшая сторона, то $AC > BC$ и $AC > AB = BA'$. Так как угол ABC — тупой, то он больше угла $A'BC$, значит $AC > A'C$ (потому что две другие стороны треугольников ABC и $A'BC$ одинаковы).

д) Будем, пока это возможно, уменьшать длину наибольшей стороны простого треугольника. Этот процесс не может продолжаться бесконечно, так как квадрат длины этой стороны принимает лишь целые значения (по теореме Пифагора). Согласно пункту г) этот процесс остановится на минимальном треугольнике.

е) Следует из пунктов а) и д).

4. а) Пусть $ABCD$ — наш четырехугольник, $O = AC \cap BD$. Так как $ABCD$ не содержит узлов внутри и на сторонах, то треугольники ABC и ACD — простые. По задаче 3е их площади равны $1/2$. Отсюда $BO = OD$. Аналогично $AO = OC$, и $ABCD$ — параллелограмм по признаку.

б) Без ограничения общности можно считать, что на сторонах пятиугольника $ABCDE$ нет узлов (иначе рассмотрим меньший пятиугольник). Тогда по пункту а) $ABCD$ — параллелограмм, $BCDE$ — тоже параллелограмм. Отсюда $A = E$ — противоречие. Значит, искомого пятиугольника не существует.

в) Ответ: 6. Пример изображен на рис. 6д. Докажем максимальность (она также следует, конечно, из теоремы 12). Проведем через единственный узел O внутри многоугольника прямую, не проходящую через его вершины. Она разбивает плоскость на две части. Если число вершин ≥ 7, то по принципу Дирихле в одной из частей находится хотя бы 4 вершины. Обозначим их A, B, C, D. Тогда внутри пятиугольника $OABCD$ нет узлов, что противоречит пункту б). Максимальность доказана.

Отсюда получаем, что число вершин многоугольника M может принимать значения $n = 3, 4, 5, 6$.

5. а) Пусть треугольгик ABC содержит внутри единственный узел O. Тогда треугольники AOB, BOC и COA — простые, по задаче 3е их площади равны $1/2$. Это означает в частности, что прямая AO равноудалена от вершин B и C. По признаку AO — медиана. Аналогично BO и CO — медианы.

б) Согласно пункту а) O — точка пересечения медиан данного треугольника ABC. Тогда по известному свойству этой точки

$$\begin{cases} \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CA} = 3\overrightarrow{AO}, \\ \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{AB} = 3\overrightarrow{BO}, \\ \overrightarrow{CA} - \overrightarrow{BC} = 3\overrightarrow{CO}. \end{cases}$$

Но векторы в левой части — это векторы сторон двойственного треугольника. Значит, двойственный треугольник получается из трегольника, построенного на векторах AO, BO и CO, растяжением в 3 раза. Поскольку отрезки AO, BO и CO не содержат узлов внутри, то отсюда получаем, что каждая сторона двойственного треугольника содержит ровно 2 узла (кроме вершин). Поэтому $b + b^* = 3 + 9 = 12$.

6. а) Ответ: $2i + b - 2$. Посчитаем сумму углов всех треугольников триангуляции двумя способами. С одной стороны, она равна $n\pi$, где n — число треугольников. С другой стороны, в эту сумму внутренние узлы дают вклад $2i\pi$, поскольку в каждом из них примыкающие треугольники образуют полный угол. Граничные узлы дают вклад, равный сумме углов b-угольника (у которого, возможно, некоторые углы равны π), то есть $(b-2)\pi$. Сравнивая полученные выражения для суммы углов, получаем ответ.

б) Формула Пика следует из задачи 3 и пункта а).

Более подробно данное доказательство обсуждается в статье [1]. Дадим указания к более простому доказательству (по сравнению с решением задачи 3; сама задача 3 является следствием формулы Пика). Обозначим через $\varphi(P, M)$ — угол, под которым виден многоугольник M из узла P, то есть

$$\varphi(P, M) = \begin{cases} \angle P, & \text{если } P \text{ — вершина,} \\ \pi, & \text{если } P \text{ лежит на стороне,} \\ 2\pi, & \text{если } P \text{ лежит внутри } M. \end{cases}$$

Рассмотрим величину

$$\varphi(M) = \sum_{P \in M} \varphi(P, M),$$

где сумма берется по всем узлам внутри и на границе M. Теперь достаточно доказать следующие утверждения:

1) $\varphi(M \cup N) = \varphi(M) + \varphi(N)$, если многоугольники M и N не имеют общих внутренних точек.

2) $\varphi(M) = 2\pi S(M)$

а) если M — прямоугольник со сторонами, параллельными линиям сетки;

б) если M — прямоугольный треугольник с катетами, параллельными линиям сетки;

в) если M — произвольный треугольник;

г) если M — произвольный многоугольник.

3) $\varphi(M) = (2i + b - 2)\pi$.

7. Если вершины многоугольника лежат в узлах, то квадрат стороны — число целое (по теореме Пифагора), а площадь — число полуцелое (по формуле Пика), поэтому их отношение рационально.