"12"

Задача предложена В. Прасоловым, М. Скопенковым и С. Дориченко

Вводные задачи

Пусть на клетчатой плоскости нарисован выпуклый многоугольник $M = A_1A_2\dots A_n$ с вершинами в узлах сетки (Рис. 1 слева). Предположим, что внутри M расположен ровно один узел O. Отложим векторы $\overrightarrow{A_1A_2}, \overrightarrow{A_2A_3}, \dots \overrightarrow{A_nA_1}$ от узла O и на каждом из полученных отрезков выберем ближайший к точке O узел. Соединяя последовательно выбранные n точек, получим некоторый многоугольник M^*, который называется *двойственным* к исходному многоугольнику (Рис. 1 справа).

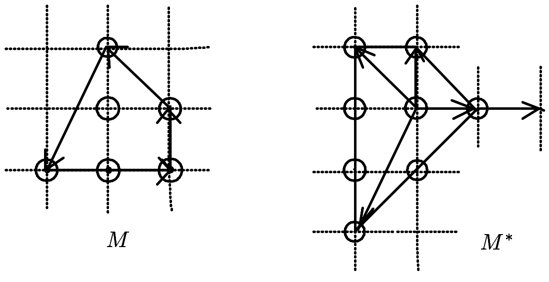


Рис. 1.

Данный цикл задач посвящен элементарному доказательству следующей теоремы, открытой всего несколько лет назад:

Теорема о 12. *Пусть внутри выпуклого многоугольника M расположен ровно один узел O, на его границе — b узлов, а на границе многоугольника M^* — b^* узлов. Тогда*

$$b + b^* = 12.$$

0. Нарисуйте многоугольники, двойственные к изображенным на рис. 2. Сколько узлов расположено внутри M^* в каждом случае? Чему равны M^{**}? Как связаны площади M и M^*? Возможно ли равенство $M = M^*$? Сформулируйте Ваши наблюдения и предположения, попытайтесь их доказать.

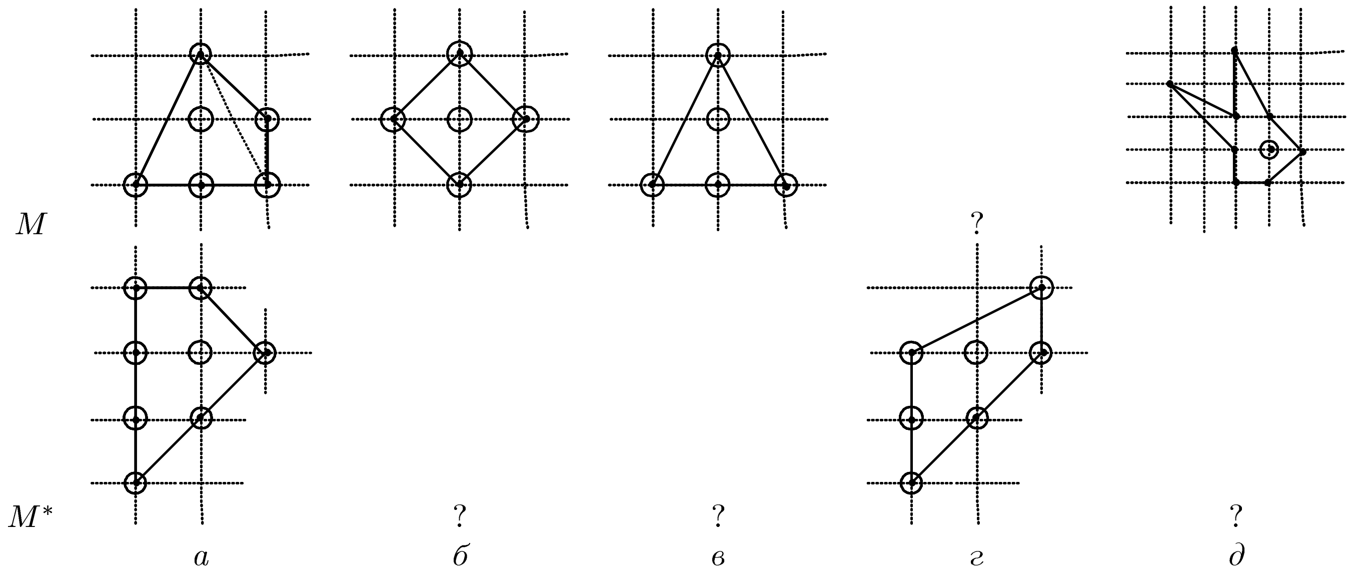


Рис. 2.

1. Внутри треугольника ровно 1 узел. Какое наибольшее число узлов может быть на границе?

2. Докажите теорему о 12 для параллелограмма с $b = 4$.

Простым треугольником назовем треугольник, не содержащий других узлов, кроме вершин (как внутри, так и на сторонах). *Прыжок (рис. 3)* — это преобразование, при котором вершина A треугольника ABC заменяется на точку, симметричную ей относительно B.

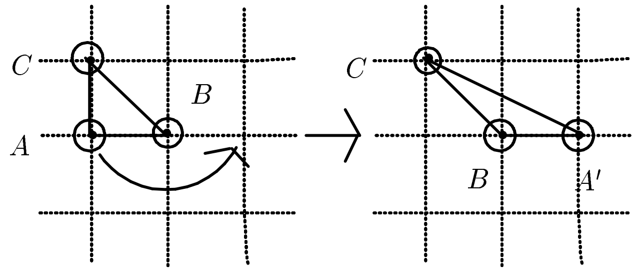


Рис. 3.

3. а) Площадь треугольника при прыжке не меняется;

б) Из простого треугольника при прыжке получается простой;

в) У простого треугольника один из углов — тупой или прямой (причем последний случай возможен только для треугольника со сторонами 1, 1, $\sqrt{2}$, который мы назовем *минимальным*);

г) Из любого простого не минимального треугольника одним прыжком можно получить треугольник, у которого наибольшая сторона меньше, чем наибольшая сторона исходного.

д) Любой простой треугольник можно конечным числом прыжков перевести в минимальный;

е) Площадь простого треугольника равна 1/2.

4. а) Выпуклый четырехугольник, не содержащий узлов (кроме вершин), — параллелограмм.

б) Существует ли выпуклый пятиугольник, не содержащий внутри себя узлов?

в) Внутри выпуклого многоугольника ровно 1 узел. Какое наибольшее число вершин он может иметь?

5. а) Если на сторонах треугольника нет узлов (кроме вершин), а внутри него — ровно 1 узел, то это — точка пересечения медиан треугольника.

б) Докажите теорему о 12 для треугольника с $b = 3$.

Пусть S — площадь многоугольника, внутри которого — i узлов, а на границе — b узлов.

6. а) Рассмотрим триангуляцию многоугольника с вершинами в данных $b + i$ узлах. Сколько в ней может быть треугольников?

б) Докажите *формулу Пика:*

$$S = i + \frac{b}{2} - 1.$$

7. Пусть отношение площади многоугольника к квадрату одной из его сторон иррационально (так будет, например, для правильного треугольника). Докажите, что подобный ему многоугольник нельзя нарисовать на клетчатой бумаге так, чтобы вершины лежали в узлах.

8. Шахматный король обошел доску 8×8 клеток, побывав на каждом поле ровно 1 раз и последним ходом вернувшись на исходное поле. Ломаная, соединяющая последовательно центры полей, которые проходил король, не имеет самопересечений.

а) Какую площадь может ограничивать эта ломаная?

б) Какую наибольшую длину она может иметь?

Удалением треугольника назовем операцию отрезания от многоугольника M простого треугольника, имеющего с ним две общие стороны. Например, из многоугольника на рис. 2а удалением треугольника получается многоугольник на рис. 2в. Обратную операцию назовем *добавлением треугольника.*

9. Верно ли, что любые два многоугольника

а) на рис. 2; б) без узлов внутри; в) выпуклые с ровно 1 узлом внутри;

получаются друг из друга серией удалений и добавлений треугольников?

"12"

Основные задачи

Пусть O — начало декартовой системы координат. Сопоставим каждой точке $A(a,b) \neq O$ прямую A^*, задаваемую уравнением $ax+by=1$. Эта прямая называется *двойственной* к данной точке. Наоборот, каждой прямой $ax+by=1$ сопоставим *двойственную* точку (a,b).

10. Нарисуйте фигуры, двойственные к фигурам на рис. 4. Проверьте, что на рис. 4а $l^* \in A^*$ и что на рис. 4б прямые A^*, B^*, C^* проходят через одну точку. Докажите, что для любой точки $C \neq O$ прямая C^* перпендикулярна OC и проходит через точку $C' \in OC$, такую что $OC \cdot OC' = 1$.

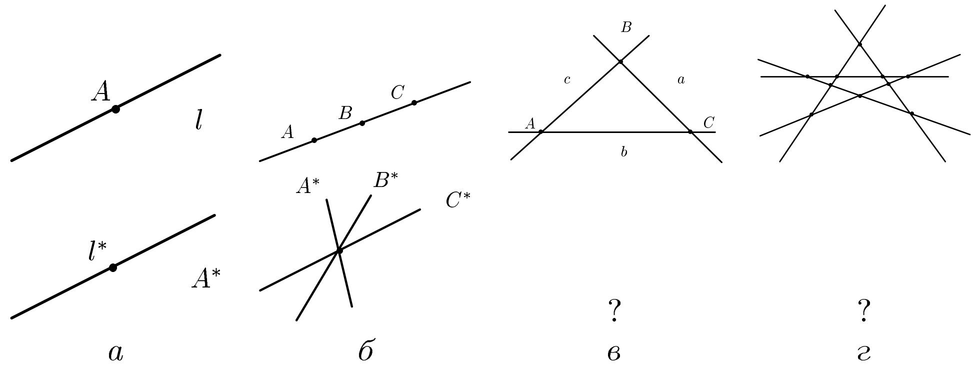


Рис. 4.

Для многоугольника $M = A_1 \dots A_n$ положим $M^* = (A_1A_2)^* \dots (A_nA_1)^*$.

11. Проверьте, что это определение двойственного многоугольника согласуется с предыдущим (с точностью до поворота на $90°$). Докажите равенство $M^{**} = M$.

12. Если внутри M расположен ровно 1 узел,то внутри M^* также расположен ровно 1 узел.

13. а) При удалении треугольника из M происходит добавление треугольника к M^*.

б) Из любого выпуклого многоугольника с ровно одним узлом внутри последовательностью удалений/добавлений треугольников можно получить параллелограмм с $b=4$.

в) Докажите теорему о 12.

14. Какая фигура будет двойственной к невыпуклому многоугольнику (рис. 2д)? При каком условии на M два определения M^* равносильны? Как обобщить теорему о 12 на невыпуклые многоугольники?

Двойственная кривая γ^* — это ГМТ двойственных ко всем касательным к кривой γ.

15. Какая кривая двойственна единичной окружности? Завершите рис. 5. Верно ли, что $\gamma^{**} = \gamma$?

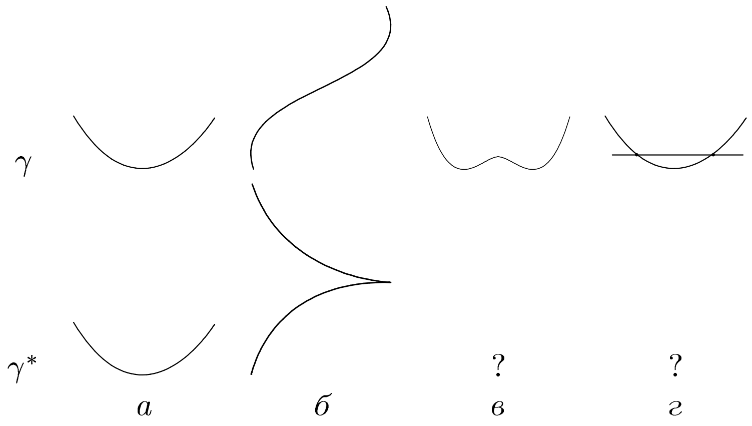


Рис. 5.

16*. Как обобщить теорему о 12 на многоугольники с более чем одним узлом внутри?

[1] Н. Б. Васильев, *Вокруг формулы Пика*, Квант **12** (1974).

[2] Б. Поонен и Ф. Родригес-Виллегас, *Решеточные многоугольники и число 12*, Amer. Math. Mon. **107:3** (2000), 238–250. (на английском)

[3] Д. Реповш, М. Скопенков и М. Ценцель, *Элементарное доказательство теоремы о 12 целых точках*, представлено в Мат. Заметки.

[4] С. Л. Табачников, *Геометрия уравнений*, Квант **10** (1988).

"12"
Дополнительные задачи

17. Нужно провести по линиям сетки замкнутую несамопересекающуюся ломаную, которая бы проходила через все узлы клетчатой бумаги, лежащие внутри прямоугольника $p \times q$ клеток.

а) При каких p и q это возможно?

б) Какую длину будет иметь эта ломаная?

в) Какую площадь она будет ограничивать?

18. а) Обозначим через kM многоугольник, который получается из M гомотетией с коэффициентом k с центром в начале координат. Докажите формулу $2S(M) = n(2M) - 2n(M) + 1$, где $n(M)$ — число узлов внутри и на границе M.

б) Придумайте и докажите аналогичную формулу для объема многогранника в пространстве.

19. Придумайте оценку для максимального числа вершин выпуклого многоугольника через число узлов внутри него.

Аффинным преобразованием назовем преобразование плоскости, заданное формулой

$$\begin{cases} x' &= ax + by, \\ y' &= cx + dy, \end{cases}$$

сохраняющее целочисленную решетку (это означает, что числа a, b, c, d — целые и $ad - bc = \pm 1$).

20. Классифицируйте выпуклые многоугольники

а) без узлов внутри; б) с ровно одним узлом внутри;

с точностью до аффинных преобразований.

21. а) Найдите образ прямой $y = ax + b$ при преобразовании $(x, y) \mapsto (\frac{x}{y}, \frac{1}{y})$.

б) Число решений уравнения $x^2 + ax + b = 0$ ($x^3 + ax + b = 0$) равно числу касательных, которые можно провести к кривой $x^2 = 4y$ ($4x^3 = -27y^2$) из точки (a, b).

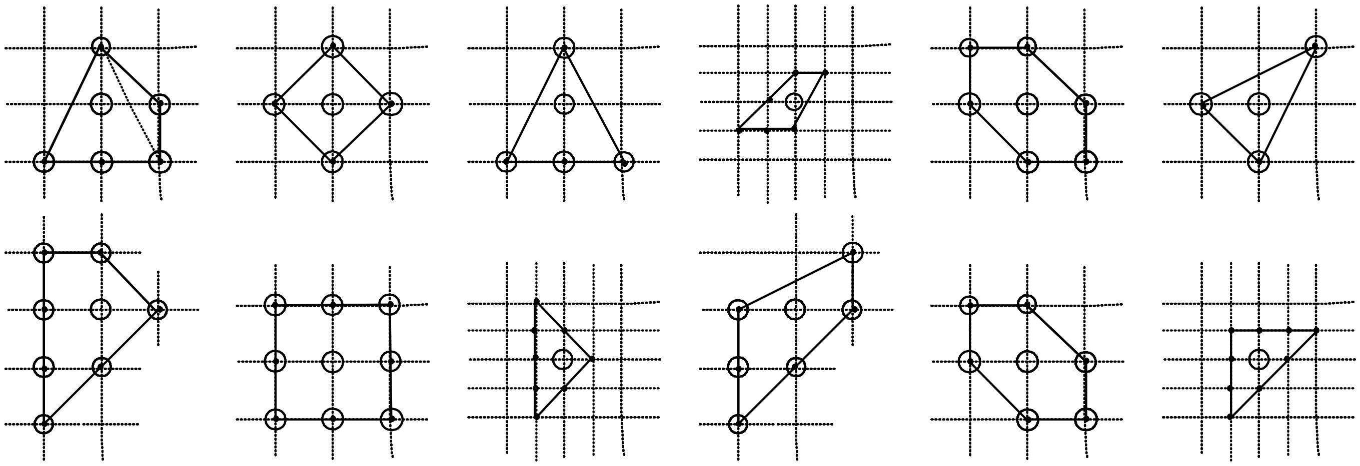
в) Сколько решений имеет уравнение $x^3 + ax + b = 0$ в зависимости от a и b?

г) Попытайтесь исследовать таким образом другие уравнения.

"12"
Решения задач

0. См. рис. 6а–г. Для многоугольника на рис. 2д не существует двойственного, поскольку он не выпуклый (см. также задачу 14). На рис. 6д показан пример, когда $M = M^*$. Возможные наблюдения:

- внутри M^* расположен ровно 1 узел (см. задачу 12);
- $M^{**} = -M$ (см. задачу 11)
- $S(M) + S(M^*) = 6$, что равносильно теореме о 12, так как по формуле Пика (задача 6б) $S(M) = i + \frac{b}{2} - 1 = \frac{b}{2}$.

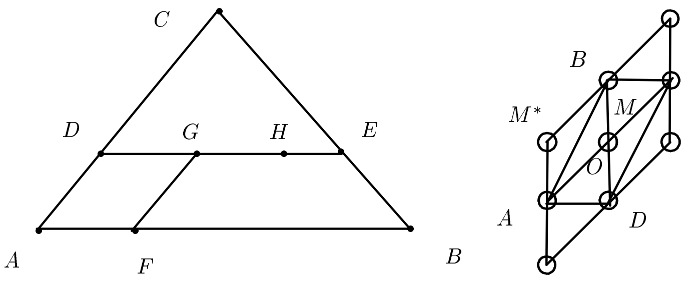


а *б* *в* *г* *д* *е*

Рис. 6.

1. Ответ: 9. Пример изображен на рис. 6е. Идею построения примера подсказывает теорема о 12. Раз на границах треугольников T и T^* в сумме расположено 12 узлов, то, чтобы максимизировать число узлов на границе T, нужно минимизировать их число на границе T^*, и наоборот. Поэтому нужно взять треугольник со всего 3 узлами на границе, тогда двойственный треугольник и будет искомым примером.

Максимальность числа 9 следует, конечно, из теоремы о 12. Приведем независимое доказательство (рис. 7а). Если на каждой стороне треугольника расположено не более 2 узлов (не считая вершин), то доказывать нечего. Рассмотрим случай, когда одна из сторон треугольника, назовем ее AB, содержит ≥ 3 узлов (такая ситуция действительно возможна, см. рис. 6в). Достаточно доказать, что на остальных сторонах расположено не более 1 узла. Пусть это не так, например, AC содержит ≥ 2 узлов. Выберем из них узел D, ближайший к A. Проведем $DE \parallel AB$, где $E \in AC$. Выберем на стороне AB узел F, ближайший к A. Рассмотрим точки G и H на отрезке DE, такие что $DG = AF$ и $DH = AF$, очевидно, это — узлы решетки. Так как узлы решетки разбивают AB и AC на равные отрезки, то $CD : CA \geq \frac{2}{3}$ и $AF : AB \leq \frac{1}{4}$. Из подобия $DE : AB \geq \frac{2}{3}$. Отсюда следует, что $DH < DE$, то есть G и H лежат внутри треугольника, что противоречит условию. Максимальность доказана.



а *б*

Рис. 7.

2. Действительно, в этом случае $O = AC \cap BD$ (рис. 7б). Это следует из того, что точка, симметричная точке O относительно $AC \cap BD$, — целая и лежит внутри $ABCD$, а поэтому совпадает с O. Легко видеть, что M^* — параллелограмм, стороны которого получаются из диагоналей AC и BD параллельными переносами на вектора $\pm\overrightarrow{OB}$ и $\pm\overrightarrow{OA}$ соответственно. Так как на этих диагоналях лежит единственная целая точка O, то на каждой стороне параллелограмма M^* лежит по одной целой точке, откуда $b + b^* = 4 + 8 = 12$.

3. а) Треугольники ABC и $A'BC$ имеют общее основание BC, а поскольку $AB = BA'$, то соответствующие высоты равны. Значит, площади этих треугольников равны.

б) Пусть D — середина BC. Заметим, что при центральной симметрии с центром D решетка переходит в себя. Поэтому если треугольник ABC — простой, то его образ при этой центральной симметрии $A''BC$ — тоже простой. Аналогично, треугольник $A''BA'$ — простой, поскольку получается центральной симметрией из $A''BC$. Значит, внутри параллелограмма $A''A'BC$ нет узлов, в частности, $A'BC$ — простой.

в) Рассмотрим минимальный прямоугольник со сторонами, параллельными линиям сетки, содержащий наш треугольник. Тогда на каждой его стороне лежит по вершине треугольника. Это возможно, только если хотя бы одна из вершин треугольника совпала с вершиной прямоугольника. Если таких совпадающих вершин три, то легко видеть, что наш треугольник — минимальный. Если их две, и они являются противоположными (для прямоугольника), то, очевидно, угол при третьей вершине треугольника — тупой. Остальные случаи для простого треугольника невозможны. Действительно, пусть треугольник и прямоугольник имеют общую вершину A, а больше совпадающих вершин либо нет, либо это одна из соседних с ней вершин прямоугольника. Обозначим через D вершину прямоугольника, противоположную к A, а через M середину стороны треугольника, противоположной к A. Тогда легко видеть, что точка, симметричная точке D относительно M, — узел, лежащий внутри исходного треугольника или внутри его стороны.

г) Достаточно сделать прыжок через вершину B с тупым углом. Так как AC — наибольшая сторона, то $AC > BC$ и $AC > AB = BA'$. Так как угол ABC — тупой, то он больше угла $A'BC$, значит $AC > A'C$ (потому что две другие стороны треугольников ABC и $A'BC$ одинаковы).

д) Будем, пока это возможно, уменьшать длину наибольшей стороны простого треугольника. Этот процесс не может продолжаться бесконечно, так как квадрат длины этой стороны принимает лишь целые значения (по теореме Пифагора). Согласно пункту г) этот процесс остановится на минимальном треугольнике.

е) Следует из пунктов а) и д).

4. а) Пусть $ABCD$ — наш четырехугольник, $O = AC \cap BD$. Так как $ABCD$ не содержит узлов внутри и на сторонах, то треугольники ABC и ACD — простые. По задаче 3е их площади равны $1/2$. Отсюда $BO = OD$. Аналогично $AO = OC$, и $ABCD$ — параллелограмм по признаку.

б) Без ограничения общности можно считать, что на сторонах пятиугольника $ABCDE$ нет узлов (иначе рассмотрим меньший пятиугольник). Тогда по пункту а) $ABCD$ — параллелограмм, $BCDE$ — тоже параллелограмм. Отсюда $A = E$ — противоречие. Значит, искомого пятиугольника не существует.

в) Ответ: 6. Пример изображен на рис. 6д. Докажем максимальность (она также следует, конечно, из теоремы 12). Проведем через единственный узел O внутри многоугольника прямую, не проходящую через его вершины. Она разбивает плоскость на две части. Если число вершин ≥ 7, то по принципу Дирихле в одной из частей находится хотя бы 4 вершины. Обозначим их A, B, C, D. Тогда внутри пятиугольника $OABCD$ нет узлов, что противоречит пункту б). Максимальность доказана.

Отсюда получаем, что число вершин многоугольника M может принимать значения $n = 3, 4, 5, 6$.

5. а) Пусть треугольгик ABC содержит внутри единственный узел O. Тогда треугольники AOB, BOC и COA — простые, по задаче 3е их площади равны $1/2$. Это означает в частности, что прямая AO равноудалена от вершин B и C. По признаку AO — медиана. Аналогично BO и CO — медианы.

б) Согласно пункту а) O — точка пересечения медиан данного треугольника ABC. Тогда по известному свойству этой точки
$$\begin{cases} \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CA} = 3\overrightarrow{AO}, \\ \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{AB} = 3\overrightarrow{BO}, \\ \overrightarrow{CA} - \overrightarrow{BC} = 3\overrightarrow{CO}. \end{cases}$$
Но векторы в левой части — это векторы сторон двойственного треугольника. Значит, двойственный треугольник получается из трегольника, построенного на векторах AO, BO и CO, растяжением в 3 раза. Поскольку отрезки AO, BO и CO не содержат узлов внутри, то отсюда получаем, что каждая сторона двойственного треугольника содержит ровно 2 узла (кроме вершин). Поэтому $b + b^* = 3 + 9 = 12$.

6. а) Ответ: $2i + b - 2$. Посчитаем сумму углов всех треугольников триангуляции двумя способами. С одной стороны, она равна $n\pi$, где n — число треугольников. С другой стороны, в эту сумму внутренние узлы дают вклад $2i\pi$, поскольку в каждом из них примыкающие треугольники образуют полный угол. Граничные узлы дают вклад, равный сумме углов b-угольника (у которого, возможно, некоторые углы равны π), то есть $(b-2)\pi$. Сравнивая полученные выражения для суммы углов, получаем ответ.

б) Формула Пика следует из задачи 3 и пункта а).

Более подробно данное доказательство обсуждается в статье [1]. Дадим указания к более простому доказательству (по сравнению с решением задачи 3; сама задача 3 является следствием формулы Пика). Обозначим через $\varphi(P, M)$ — угол, под которым виден многоугольник M из узла P, то есть
$$\varphi(P, M) = \begin{cases} \angle P, & \text{если } P \text{ — вершина}, \\ \pi, & \text{если } P \text{ лежит на стороне}, \\ 2\pi, & \text{если } P \text{ лежит внутри } M. \end{cases}$$
Рассмотрим величину
$$\varphi(M) = \sum_{P \in M} \varphi(P, M),$$
где сумма берется по всем узлам внутри и на границе M. Теперь достаточно доказать следующие утверждения:

1) $\varphi(M \cup N) = \varphi(M) + \varphi(N)$, если многоугольники M и N не имеют общих внутренних точек.

2) $\varphi(M) = 2\pi S(M)$

а) если M — прямоугольник со сторонами, параллельными линиям сетки;
б) если M — прямоугольный треугольник с катетами, параллельными линиям сетки;
в) если M — произвольный треугольник;
г) если M — произвольный многоугольник.

3) $\varphi(M) = (2i + b - 2)\pi$.

7. Если вершины многоугольника лежат в узлах, то квадрат стороны — число целое (по теореме Пифагора), а площадь — число полуцелое (по формуле Пика), поэтому их отношение рационально.

8. а) Ответ: 31. Из формулы Пика следует, что площадь, ограниченная ломаной, равна $64/2 - 1 = 31$ (узлами клетчатой бумаги служат центры 64 полей; по условию все они лежат на границе многоугольника).

б) Ответ: $28 + 36\sqrt{2}$. Нетрудно придумать путь короля, в котором 36 из 64 ходов имеют длину $\sqrt{2}$ (направлены по диагонали). Докажем, что больше 36 таких ходов быть не может. На каждом отрезке длины $\sqrt{2}$, входящем в путь короля, построим, как на диагонали, квадрат 1×1. Одна половинка этого квадрата лежит вне многоугольника, который ограничивает путь короля. Но общая площадь, занятая такими половинками, не превышает 49-31=18, поскольку все они не выходят за пределы квадрата 7×7 клетчатой бумаги (см. пункт б). Значит, количество диагональных ходов не превышает 36.

9. Ответ на все 3 вопроса утвердительный. Пункт а) следует из в).

б) Достаточно доказать, что из данного многоугольника, не содержащего внутри себя узлов, последовательностью добавлений и удалений вершин можно получить минимальный простой треугольник (см. задачу 3в). Рассмотрим триангуляцию многоугольника с вершинами во всех его граничных узлах. В ней все треугольники — простые. Среди них найдется "крайний" треугольник, то есть треугольник, имеющий две общие стороны с исходным многоугольником. Удалим его. Будем продолжать таким образом, пока не останется один простой треугольник. Остается воспользоваться задачей 3д, поскольку прыжок простого треугольника есть результат добавления треугольника и последующего удаления исходного треугольника.

в) Докажем, что из любого параллелограмма с $b = 4$, $i = 1$ серией удалений/добавлений треугольников можно получить параллелограмм на рис. 2б. Тем самым мы сведем нашу задачу к задаче 13б. Пусть $ABCD$ — наш параллелограмм. Треугольник AOB — простой. Если он — минимальный, то наш параллелограмм совпадает с параллелограммом на рис. 2б. Иначе рассмотрим последовательность прыжков треугольника AOB, переводящую его в минимальный (см. задачу 3д), и будем на каждом шаге достраивать треугольник AOB до параллелограмма. Легко видеть, что любые два соседних параллелограмма в построенной цепочке получаются друг из друга серией удалений/добавлений треугольников. Наше утверждение доказано.

10. См. рис. 8. Докажем, что картинки на рис. 8аб выглядят именно так. Пусть точка A на рис. 8а имеет координаты (u, v), а прямая l задается уравнением $ax + by = 1$. Тогда $A \in l \Leftrightarrow au + bv = 1 \Leftrightarrow l^* \in A^*$, что и требовалось. Далее, пусть l — прямая, на которой лежат точки на рис. 8б. Тогда из предыдущего рассуждения следует, что три прямые A^*, B^* и C^* имеют общую точку l^*.

Докажем теперь последнее утверждение задачи 10. Пусть точка C имеет координаты (a, b), тогда $ax + by = 1$ — уравнение прямой C^*. Докажем, что $C^* \perp OC$. Если $A(x_1, y_1)$ и $B(x_2, y_2)$ — две различные точки на прямой $ax + by = 1$, то $a(x_1 - x_2) + b(y_1 - y_2) = 0$. Это означает, что скалярное произведение векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{OC}$ равно нулю, то есть $C^* \perp OC$. Остается проверить, что $\rho(O, C^*) \cdot OC = 1$, то есть что *расстояние ρ от прямой $ax + by = 1$ до начала координат равно $\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}$*. Пусть X и Y — точки пересечения нашей прямой с осями Ox и Oy соответственно. Их координаты равны $X(\frac{1}{a}, 0)$ и $Y(0, \frac{1}{b})$. Посчитаем двумя способами площадь S треугольника XOY. С одной стороны, $S = \frac{1}{2} OX \cdot OY = \frac{1}{2ab}$. С другой, $S = \frac{1}{2}\rho \cdot XY = \frac{\rho\sqrt{a^2+b^2}}{2ab}$. Сравнивая найденные выражения для S, получаем требуемое.

Заметим, что прямая, двойственная точке A, есть не что иное как *поляра* этой точки относительно единичной окружности.

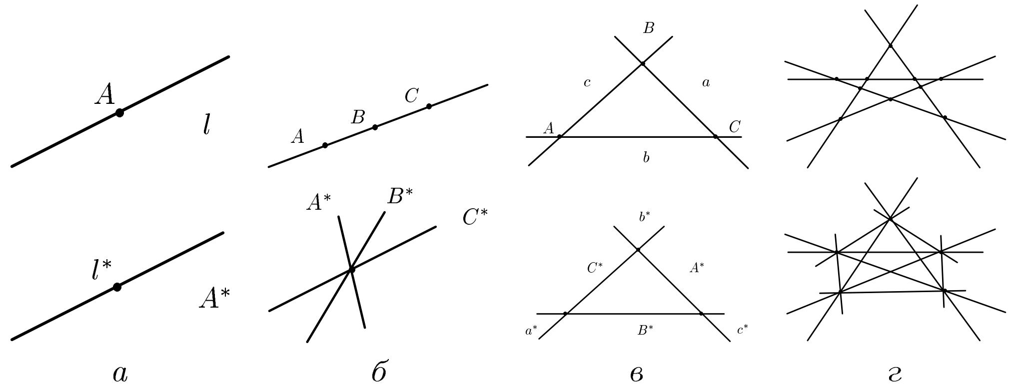


Рис. 8.

11. Доказательство основано на следующем замечании (которое следует из задачи 3е):
O — единственный узел внутри M $\Leftrightarrow$ для любых двух соседних узлов A и B на границе M площадь треугольника AOB равна $1/2$.

Для доказательства равносильности двух определений двойственного многоугольника достаточно проверить, что вектор $\overrightarrow{OC}$, где $C = (AB)^*$, получается из $\overrightarrow{AB}$ поворотом на $90°$ против часовой стрелки. Согласно задаче 10 $AB \perp OC$. По той же задаче $\rho(O, AB) \cdot OC = 1$. С другой стороны, согласно замечанию, сделанному выше, $\frac{1}{2} = S(AOB) = \frac{1}{2}\rho(O, AB) \cdot AB$. Значит, $AB = OC$. Тем самым установлено, что OC получается из AB поворотом на $90°$. Легко видеть, что если граница M ориентирована по часовой стрелке, то этот поворот происходит против часовой стрелки.

Для доказательства равенства $M = M^{**}$ достаточно заметить, что стороны многоугольника M^* двойственны вершинам исходного. Действительно, поскольку $A_i \in A_{i-1}A_i$ и $A_i \in A_iA_{i+1}$, то $(A_{i-1}A_i)^* \in A_i^*$ и $(A_iA_{i+1})^* \in A_i^*$, то есть прямая A_i^* содержит сторону двойственного многоугольника.

12. Предположим, что внутри M^* есть еще один узел, Q, отличный от O. Тогда он расположен внутри некоторого треугольника AOB, где A и B — пара соседних вершин многоугольника M. Треугольники OQA и OQB — простые, по задаче 3е их площади равны $1/2$. Отсюда следует (смотри решение задачи 5а), что Q лежит на медиане OM. По определению M^* на границе M найдутся три узла D, E и F, такие что $\overrightarrow{DE} = \overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{OB}$. Легко видеть, что $DF \parallel OM$, следовательно, $DF \parallel OQ$. Но $DF = 2OM > 2OQ$, поэтому внутри DF есть хотя бы 2 целые точки. Так как M — выпуклый, то есть две возможности: либо DF лежит внутри M, либо DF — часть границы M. В первом случае получаем, что внутри M содержится хотя бы 2 узла. Во втором случае $M = DEF$ вообще не содержит внутри себя узлов. Получаем противоречие. Значит, такого узла Q не найдется.

13. а) Нам достаточно доказать, что, например, удаление простого треугольника $A_1A_2A_3$ из M приводит к добавлению простого треугольника $A_{12}A_{13}A_{23}$ к M^* (Рис. 9). Здесь через A_{kl} обозначена точка, такая что $\overrightarrow{OA_{kl}} = \overrightarrow{A_kA_l}$. В частности, если $l = k + 1$, то A_{kl} — вершина многоугольника M^*. Удалим $A_1A_2A_3$. Тогда у многоугольника M^* исчезнут вершины A_{12} и A_{23}, зато добавится новая вершина A_{13}. Ее еще нужно соединить отрезками с A_{n1} и A_{34}. Покажем, что точки A_{12} и A_{23} лежат на этих отрезках. В самом деле, так как O — единственная целая точка внутри M, то треугольники A_1OA_3, A_2OA_3, A_4OA_3 — простые. Из формулы Пика следует, что их площади равны $1/2$. Поскольку они имеют общее основание OA_3, то проекции векторов $\overrightarrow{A_1A_3}$, $\overrightarrow{A_1A_3}$ и $\overrightarrow{A_1A_3}$ на перпендикуляр к OA_3 равны. Отсюда следует, что точки A_{13}, A_{23} и A_{34} лежат на одной прямой, а так как M — выпуклый, то A_{23} лежит между двумя остальными (это очевидно также из второго определения двойственного многоугольника). Аналогично доказывается, что A_{12} принадлежит отрезку $A_{n1}A_{13}$. Значит, преобразование M^* сводится к добавлению треугольника $A_{12}A_{13}A_{23}$. Заметим, что треугольник $OA_{12}A_{13}$ получается из простого треугольника $A_1A_2A_3$ параллельным переносом, а $OA_{23}A_{13}$ — центральной симметрией. Поэтому треугольник $A_{12}A_{13}A_{23}$ — простой, что и требовалось.

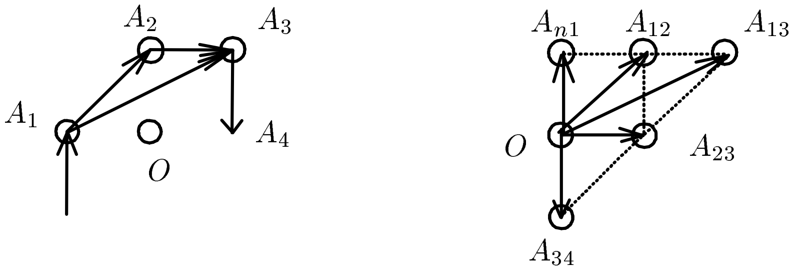


Рис. 9.

б) Действительно, предположим вначале, что у M есть диагональ, не проходящая через O. Разрежем M вдоль этой диагонали и рассмотрим ту из полученных частей, которая не содержит O. Эта часть обязательно содержит простой треугольник вида $A_{i-1}A_iA_{i+1}$. Удалим его, уменьшив тем самым число b. Будем действовать так, пока это возможно. Очевидно, есть только три случая, когда требуемой диагонали не найдется:

А) $b = 4$, $M = ABCD$, $O = AC \cap BD$. Так как отрезки OA, OB, OC и OD не содержат целых точек, то $OA = OC$ и $OB = OD$, то есть $ABCD$ — искомый параллелограмм.

В) $b = 4$, $M = ABCD$, один из углов, скажем, BCD — развернутый. В этом случае обозначим через D' точку, симметричную точке D относительно O, через E — середину $D'B$. Искомая серия удалений/добавлений треугольников имеет вид:

$$ABCD \to AEBCD \to AD'EBCD \to AD'ECD \to AD'CD \quad \text{(Рис. 10 слева)}.$$

С) $b = 3$, $M = ABC$. В этом случае обозначим через A' и C' точки, симметричные относительно O вершинам A и C соответственно. Тогда искомая серия имеет вид:

$$ABC \to AC'BC \to AC'BA'C \to AC'A'C \quad \text{(Рис. 10 справа)}.$$

Тем самым в каждом случае мы получили требуемый параллелограмм.

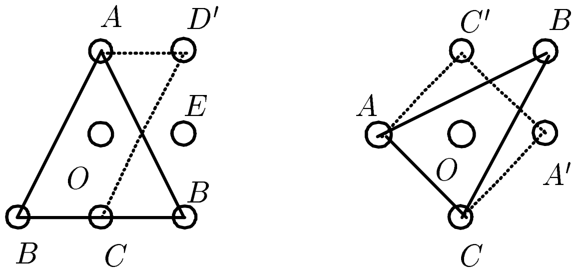


Рис. 10.

в) Из пункта а) получаем, что при удалении/добавлении треугольника величина $b + b^*$ сохраняется. Согласно пункту б) данный многоугольник можно перевести в параллелограмм с $b = 4$ серией удалений/добавлений треугольников. Для такого параллелограмма $b + b^* = 12$ (задача 2). Теорема о 12 доказана.

14. Пример на рис. 1д показывает, что замкнутая ломаная, двойственная к невыпуклому многоугольнику, может иметь самопересечения. Поэтому теорему о 12 естественно пытаться обобщить сразу именно на этот случай. Итак, пусть M — замкнутая ломаная с вершинами в узлах, возможно, самопересекающаяся. Замечание в начале решения задачи 11 подсказывает, каким условием нужно заменить в нашей ситуации условие того, что O — единственный узел внутри M. Нужно потребовать, чтобы *для каждого звена AB ломаной площадь треугольника AOB равнялась* $1/2$ (при этом мы считаем все узлы, попавшие на ломаную, ее вершинами, возможно, с углом $180°$). Именно при этом условии (плюс условие положительности всех сторон, приведенное ниже) два определения двойственного многоугольника равносильны.

Мы предлагаем в этом месте читателю прервать чтение и попытаться, рассмотрев несколько примеров, самому придумать обобщение теоремы о 12 на самопересекающиеся ломаные.

Ответ выглядит следующим образом. Назовем звено AB ломаной *положительным*, если при движении точки X по нему от A к B отрезок OX вращается по часовой стрелке, и *отрицательным* — иначе. Корректность данного определения следует из того, что площадь треугольника AOB равна $1/2$, в частности, точки A, O и B не лежат на одной прямой. Обозначим через b_+ и b_- количество положительных и отрицательных звеньев ломаной L соответственно, а через b^*_+ и b^*_- — аналогичные числа для L^*. Теперь может быть сформулирована

Теорема о 12 для ломаных. *Пусть M — замкнутая ломаная с вершинами в узлах (причем все узлы, попавшие на M, мы считаем вершинами, возможно, с углом $180°$). Пусть нашелся такой узел O, что для каждого звена AB ломаной M площадь треугольника AOB равна $1/2$. Предположим, что M делает r оборотов вокруг точки O. Тогда*

$$b_+ - b_- + b^*_+ - b^*_- = 12r.$$

Эта теорема доказана в статье [2]. Ее элементарное доказательство неизвестно.

15. Кривая, двойственная к единичной окружности, — она сама, что следует из задачи 10. Рис. 11 завершает рис. 5.

Рис. 11.

Для любой гладкой кривой γ действительно $\gamma^{**}=\gamma$. Приведем неформальное доказательство этого утверждения. Рассмотрим кривую γ^*. Чтобы построить двойственную к ней кривую, нужно рассмотреть касательные к γ^*. Вместо касательной мы возьмем на γ^* две близкие точки и проведем через них прямую (верхняя часть рис. 11г). Двойственная картинка будет выглядеть как на нижней части рис. 11г. Если начать сближать выбранные точки на кривой γ^*, то наша прямая (секущая) будет стремиться к касательной, а двойственная ей точка будет стремиться к точке на кривой γ. Это и означает, что множество касательных прямых к γ^* определяет исходную кривую γ, то есть $\gamma^{**}=\gamma$.

Более подробно о двойственных кривых написано в замечательной статье [4].

16. Ответ неизвестен.

17. Ответ: а) при $p, q \geq 3$ и $(p-1)(q-1)$ четном; б) $(p-1)(q-1)$; в) $\frac{(p-1)(q-1)}{2}-1$. Решение легко следует из соображений четности и формулы Пика.

18. Пункт а) сразу получается из формулы Пика, а также может быть доказан аналогично этой формуле (см. замечание после решения задачи 6).

В пункте б) можно предложить несколько различных формул, например,

$$6V(M) = n(3M) - 3n(2M) + 3n(M) - 1;$$

или

$$6V(M) = n(2M) - 2n(M) - b(M) + 3.$$

Эти формулы доказаны в интересной статье [5]. В ней также объясняется, как можно получить все такие формулы. Рекомендуем также статью [6] того же автора.

19. Обозначим через $n(i)$ максимальное число вершин выпуклого многоугольника с ровно i узлами внутри. Приведем значения $n(i)$ при малых i:

i	0	1	2	3	4	5	...
$n(i)$	4	6	6	6	8	7	...

Равенства $n(0)=4$ и $n(1)=6$ фактически доказаны в задаче 4бв. Для доказательства равенства $n(2)=6$ достаточно провести прямую через две внутренние точки и рассуждать далее аналогично решению 4в. При бо́льших i жюри известна следующая оценка для числа $n(i)$:

$$n(i) \leq 2i \text{ при } i \geq 3.$$

Для доказательства рассмотрим выпуклую оболочку i внутренних узлов. Это либо отрезок, либо многоугольник не более чем с i вершинами. В первом случае, рассуждая аналогично решению задачи 4в, легко получить оценку $n(i) \leq 6$. Во втором случае возьмем произвольную точку O (не обязательно узел) внутри выпуклой оболочки и проведем из нее лучи через все вершины выпуклой оболочки. Выбором точки O можно добиться, чтобы вершины исходного многоугольника не попали на наши лучи. Если число вершин $n(i) > 2i$, то по принципу Дирихле в одной из частей, на которые разбивают плоскость проведенные лучи, найдется хотя бы 3 вершины. Вместе с двумя вершинами выпуклой оболочки, принадлежащими той же части, они образуют выпуклый пятиугольник без узлов внутри, что противоречит задаче 4б. Требуемая оценка доказана.

Известна также оценка

$$n(i) \leq Cn^{1/3}$$

с некоторой константой C, но доказательство довольно сложно. Интересное замечание: $n(5) < n(4)$ (!).

20. а) Классификация выпуклых многоугольников без узлов внутри приведена в статье [7].

б) Классификация выпуклых многоугольников с ровно 1 узлом внутри приведена в статье [2] (правда, без доказательства). Оказывается, существует всего 16 таких многоугольников с точностью до аффинного преобразования. Доказательство основано на той же идее, что и в пункте а) (смотри статью [7]).

21. а) Ответ: прямая $ax + by = 1$.

б) Число решений уравнения $x^2 + ax + b = 0$ равно числу решений системы

$$\begin{cases} y = -x^2, \\ y = ax + b. \end{cases}$$

Преобразованием $(x, y) \mapsto (\frac{x}{y}, \frac{1}{y})$ эта система сводится к системе (считаем $b \neq 0$)

$$\begin{cases} y = -x^2, \\ ax + by = 1. \end{cases}$$

Число решений этой системы равно количеству точек пересечения кривой $y = -x^2$ и прямой $ax + by = 1$. Но это тоже самое, что количество касательных, которые можно провести из точки (a, b) к двойственной кривой (см.Рис. 11г). Остается заметить, что кривая $x^2 = 4y$ двойственна к $x^2 = -y$ (в чем можно убедиться, например, с помощью дифференцирования). Для кубического уравнения рассуждения аналогичны.

в) Ответ:

$$\begin{cases} 3, & \text{если } D < 0, \\ 2, & \text{если } D = 0 \text{ и } ab \neq 0, \\ 1, & \text{если } D > 0 \text{ или } a = b = 0, \end{cases}$$

где $D = 4a^3 + 27b^2$ — дискриминант кубического уравнения. Решение поясняет Рис. 11б. Подробнее о двойственных кривых и их связи с решением уравнений можно прочитать в статье [4]. Любопытно, что при определении числа решений систем алгебраических уравнений естественным образом возникают многоугольники с вершинами в узлах клетчатой бумаги (так называемые многоугольники Ньютона). О многоугольниках Ньютона можно прочитать в интересных статьях [5], [6].

[5] А. Кушниренко, *Целые точки в многоугольниках и многогранниках*, Квант **4** (1977).
[6] А. Кушниренко, *Многоугольник Ньютона*, Квант **6** (1977).
[7] А. Г. Хованский, *Многоугольники Ньютона, кривые на торических поверхностях и обращение теоремы Вейля*, Успехи Мат. Наук **52:6** (1997), 113–142.