$\mathcal{A}$втоматы и конечно-определенные полугруппы.

Исправление.

B6. *Пусть $a, b, C, D \in L$. Постройте конечно-определенную полугруппу, такую, что количество вхождений a в ненулевое слово вида $C...D$ не меньше квадрата вхождений b в то же слово, и существовали слова вида $C..D$, содержащие сколь угодно много a и b.*

Дополнительные задачи.

Пусть $n = 2^{k_1} * 3^{k_2} * \ldots * {p_s}^{k_s}$. Тогда число n кодирует последовательность $(k_1, k_2, \ldots, k_n)$. Обсуждаемые в следующей задаче переходы позволяют роботу работать с массивами и облегчают решение пунктов об обходе дерева.

A8. *Осуществите переходы:*

i) $2^n * 3^m \longrightarrow 2^n * 3^m * 5^{k_m}$, где k_m степень m-ого простого числа в разложении n;

j) $2^n \longrightarrow 2^n * 3^s$, где s – количество различных простых чисел в разложении n;

k) Докажите, что переход от n к n^2 невозможен.*

Указание. Рассмотрите случаи: 1) когда робот подходит к углу достаточно близко; 2) когда робот постоянно далеко от угла.

A13.5. *Пусть $\epsilon > 0$. Докажите, что можно дать стрелкам (задача A13) такие инструкции, что они выстрелят через время, меньшее $(2 + \epsilon)N$.*

Вернемся к роботу на клетчатой поверхности. Пусть в некоторых клетках написаны символы латинского алфавита. Робот может их читать, но не может их менять.

A15. *a) Можно ли так разметить клетчатую плоскость, чтобы робот мог ее обойти без использования флажков?*

Можно ли так разметить ленту, чтобы робот мог ее обойти:

b) без использования флажков?

c) с использованием одного флажка?

Пусть робот может закрашивать клетки в черный цвет, а также распознавать цвета. (Робот не может перекрашивать клетки в белый цвет.) Робот ходит по квадратному листу со стороной $2n + 1$, границы - распознаваемые стенки. В начале робот находится в углу.

A16. *a) Может ли робот закрасить все клетки, кроме центральной?*

б) Может ли робот закрасить только центральную клетку?

Группой называется полугруппа S, в которой выполнены следующие свойства:

1) существует *единица* – элемент e, такой, что для любого $a \in S$ выполнено $ae = ea = a$;

2) для любого элемента a существует *обратный* – такой элемент a^{-1}, что $aa^{-1} = a^{-1}a = e$.

Легко видеть, что единица в группе ровно одна. Группа называется *коммутативной*, если для любых двух элементов a, b выполнено $ab = ba$. Коммутативные группы также называются *абелевыми*.

A17. *Приведите пример некоммутативной группы.*

Группа называется *циклической*, если все ее элементы – степени некоторого элемента a. Циклические группы - простейшие среди групп.

> **Пример.** Рассмотрим остатки по модулю n. Они образуют группу по сложению. Единицей является нулевой остаток.

Порядком группы называется число ее элементов. Порядок обозначается как $|G|$.

A18. *Докажите, что если порядок группы прост – то группа циклическая.*

Элемент группы a называется *периодическим*, если существует некоторое натуральное n – *порядок элемента*, такое что $a^n = e$. Группа называется *периодической*, если все ее элементы периодические.

Проблема Бернсайда. *Существуют ли конечно-порожденные периодические группы бесконечного порядка?*

В настоящее время построены примеры таких групп. Они достаточно сложны, чтобы разбирать их в рамках этого проекта, поэтому само построение таких групп мы разбирать не будем. Однако, мы используем этот результат в дальнейшем.

Пусть есть конечный алфавит $\{g_1, g_1^{-1}, g_2, g_2^{-1} ... g_s, g_s^{-1}\}$.

Легко видеть, слова в этом алфавите образуют группу относительно приписывания слов (если нужно, можно сократить обратные элементы, стоящие рядом.) Такая группа называется *свободной группой с s образующими.*

Построим *граф группы.* Вершинами графа будут элементы группы. Ребра соединяют элементы группы a, b, связанные соотношением $a = b * g_i$.

A19. *Нарисуйте граф свободной абелевой группы с двумя образующими.*

A20. *Нарисуйте граф свободной неабелевой группы с двумя образующими.*

Пусть робот ходит по графу бесконечной периодической группы.

A21. *Докажите, что робот не сможет выйти из некоторой конечной области графа с использованием:*

a) 0 флажков;

b) 1 флажка;

c) 2 флажков;

d) n флажков.

A22. *Докажите, что если в группе есть непериодический элемент, то робот сможет обойти граф этой группы с использованием 3 флажков.*

Следующий пункт добавлен для облегчения построения полугруппы с нецелой размерностью Гельфанда- Кириллова.

B6.5. *Пусть $R, C, D, P, Q, a, b, t_1, t_2 \in L$. Постройте конечно-определенную полугруппу S, со следующими свойствами:*

1) любое слово, не равное нулю, и содержащее хотя бы по одной букве C, R, D представляется в виде $a^{n_1}Ca^{n_2}Pa^{n_3}t_iRb^{n_4}Qb^{n_5}Db^{n_6}$, где $n_i \geq 0$.

2) любое слово, не равное нулю, и содержащее хотя бы по одной букве P, Q, D преобразованиями приводится к виду W_1PRQW_2

3) если слово, вида CW_1RW_2D не равно нулю, то W_1 не содержит букв b, W_2 не содержит букв a, W_1 и W_2 содержат одинаковое количество a и b соответственно.

Цикл C. Свойства нильпотентности.

Сначала введем необходимые определения. Полугруппа с нулем называется *ниль-полугруппой* если для любого ее элемента x существует натуральное n, такое, что $a^n = 0$. Полугруппа с нулем называется *нильпотентной* если существует натуральное n, такое, что для любых n элементов $x_1, x_2, \dots x_n$, среди которых могут быть равные, $x_1 * x_2 * \dots * x_n = 0$.

Важным вопросом алгебры является установление взаимосвязей между свойствами нильпотентности. В настоящем цикле этот вопрос изучается для конечно-определенных полугрупп. Первые четыре задачи цикла независимы. C1 - известная олимпиадная задача. C2 - та же самая задача на языке полугрупп. C3 и C4 - вопросы связанные с конструированием так называемых “бесквадратных” и “бескубных” слов. Дальнейшие задачи определяют подход к основному вопросу проекта - задаче C9.

C1. *В стране Роботландии некоторые комбинации букв объявлены запрещенными. Известно, что запрещенных комбинаций - конечное число. Если в некотором слове есть запрещенное подслово, то все слово тоже считается запрещенным. Известно, что существуют незапрещенные слова сколь угодно большой длины. Доказать, что существует бесконечное периодическое незапрещенное слово.*

C2. *Пусть в ниль-полугруппа конечно определена и все определяющие соотношения имеют вид $W_i = 0$, где W_i - какие-то слова. Доказать, что тогда ниль-полугруппа нильпотентна.*

C3. *Докажите, что из двух букв a, b можно составить слово сколь угодно большой длины, не содержащее трех одинаковых подслов, идущих подряд (бескубное слово).*

C4. *Докажите, что из трех букв a, b, c можно составить слово сколь угодно большой длины, не содержащее двух одинаковых подслов, идущих подряд (бесквадратное слово).*

Примечание. Сравните C3 и C4 с задачей B3.

Из этих результатов следует существование ненильпотентной ниль-полугруппы – достаточно приравнять все квадраты (слова, состоящие из двух одинаковых подслов, стоящих рядом) к нулю. Эта полугруппа, естественно, не будет конечно-определенной.

Пусть алфавит L состоит из букв a, b, c, d. Будем обозначать $x = a, [x] = b, [x = c, x = d]$. То есть, x, $[x]$, $[x$, $x]$ это различные буквы алфавита, обозначение сделано для удобства.

Построим семейство слов L_i в алфавите L следующим образом:

$L_1 = [x]$, $L_2 = [xx]$, $L_3 = [xx[x]x]$,

$$L_n = [xxL_1xL_2L_1xL_3L_2L_1x \dots L_{n-2}L_{n-3} \dots L_2L_1x]$$

.

C5. *Докажите, что все слова L_i – бесквадратные.*

C6. *Пусть алфавит L состоит из букв $x, [x], [x, x]$ и алфавит K состоит из букв $o, [o], [o, o]$. Постройте бесконечные семейства слов $A_1, A_2, \dots$ над L и $B_1, B_2, \dots$ над K и конечную систему определяющих отношений, такую, что будут выполнены равенства: $A_iB_j = B_jA_i$, если $|i - j| > 1$, но $A_iB_j \neq B_jA_i$, если $|i - j| \leq 1$.*

C7. *Пусть алфавит L состоит из букв $x, [x], [x, x]$ и алфавит K состоит из букв $o, [o], [o, o]$. Постройте бесконечные семейства слов $A_1, A_2, \dots$ над L и $B_1, B_2, \dots$ над K и конечную систему определяющих отношений, такую, что будут выполнены равенства: $A_iB_j = B_jA_{i+j}$, если $|i - j| > 1$.*

C8. *Пусть алфавит L состоит из букв $x, [x], [x, x]$ Постройте ,бесконечное семейство слов $A_1, A_2, \dots$ над L и конечную систему определяющих отношений, такую, что будут выполнены равенства: $A_iA_j = A_jA_i$, если $|i - j| > 1$, но $A_iA_j \neq A_jA_i$, если $|i - j| \leq 1$*

C9. *Пусть алфавит L состоит из букв $x, [x], [x, x]$ Постройте ,бесконечное семейство слов $A_1, A_2, \dots$ над L и конечную систему определяющих отношений, такую, что будут выполнены равенства: $A_iA_j = A_jA_i$, если $|i - j| > 1$ и $A_iA_{i-1}A_i = 0$.*

C10. *Постройте конечно-определенную ниль-полугруппу не являющуюся нильпотентной.*