Автоматы и конечно-определенные полугруппы.

И. А. Иванов -Погодаев А. Я. Белов -Канель

9 августа 2004 г.

1 Основные пункты. Решения и указания.

A13. Пусть в первый момент времени крайний стрелок посылает два сигнала, a и b. Причем, мы вводим инструкции передавать сигнал a дальше в следующую секунду после получения, а сигнал b – с задержкой на 2 секунды. Крайний справа стрелок получает инструкции отправляет сигналы после получения назад. Легко видеть, что сигналы встретяться в районе центра. Чтобы обработать это явление, вводим дополнительные инструкции: пусть каждый стрелок после получения сигнала b слева или сигнала a справа считает до двух. Если в течение этих двух секунд стрелок получает и второй сигнал (или если он вообще получает их вместе) он начинает считать себя "средним" в строе. Причем, в случае получения сигналов одновременно, стрелок считает себя единственным средним, а в случае получения второго сигнала в течение 2 секунд после первого – левым средним, и в этом случае он сообщает правому соседу о этом (специальным сигналом) и тот начинает считать себя правым средним в строе. С этого момента средние стрелки начинают считать себя крайними для соотвтествующих половин. Если средний – один, что он крайний для обоих половин. Далее, аналогичный процесс (отправка двух сигналов) осуществляется симметрично с двумя половинами строя. Когда же нужно стрелять? Введем дополнительную инструкцию: если стрелок получает свой только что отправленный сигнал обратно в следующую секунду, то он отравляет соответствующему соседу сигнал "стреляй", и в следующую секунду стреляет сам. Очевидно, что для 2 и 3 солдат данная схема работает, для остальных случаев мы доказываем одновременность выстрела по индукции.

A14. Данную задачу решила только одна команда, это Дмитрий Баранов (Жуковский) и Алексей Буфетов (Москва). Приведем примерный набросок этого решения.

Сначала покажем, как конечным набором инструкций организовать семейство сигналов распространяющихся со скоростями $1, 1/3, 1/7, 1/15, \dots 1/(2^n - 1) \dots$ Пусть крайний стрелок посылает сигнал a со скоростью 1. Теперь введем следующие инструкции:

1. При получении сигнала a в первый раз отправить его дальше в следующую секунду.
2. При отправлении вперед сигнала a также отправить назад сигнал b.
3. При получении сигнала a ждать двух сигналов b и отправить a дальше в следующую секунду после получения второго из этих двух сигналов b.
4. Специальная инструкция для крайнего слева: отправлять сингал a, как только получен b.

Проследив за распространением сигналов a, можно убедиться, что они распространяются с указанными выше скоростями.

Ясно, что аналогично мы можем ввести симметричные инструкции для распространения сигналов в обратную сторону. Кроме того, заметим, что отраженный самый быстрый сигнал a встретится со следующими за собой сигналами a на расстоянии $1/2, 1/4, 1/8, \dots$ от края. Рассмотрим ситуацию, когда самый быстрый сигнал достигает правого края. Пусть в этот момент правый крайний начинает считать себя "отправляющим" аналогично левому крайнему в самом начале. Причем мы определим область его действия – это правая половина строя. Аналогично **A13**, в середине мы имеем возможность разделить строй на две половины. Причем, средний (или правый средний) становится "отправляющим" для третьей четверти. В чем отличие от алгоритма, предложенного в **A13**? В том, что теперь не приходится для каждой новой итерации ждать пока сигнал дойдет до края области и обратно. Стрелять, аналогично **A13**, нужно на следующий момент после того, как сигнал от крайнего сразу приходит к другому крайнему. Чтобы отследить этот момент, договоримся, что крайний отправляет не a, а модифицированный сигнал a', некрайний же воспринимает a как a' и отправляет дальше a. Таким образом, мы получаем возможность обработать случай когда остается два стрелка.

В3. Представим доказательство школьников из Санкт-Петербурга Михаила Христофорова и Евгения Деменкова.

Разберем сразу общий случай. Докажем сначала лемму.

Лемма. *Пусть слово A содержит все буквы алфавита. Тогда для любого слова B A можно представить в виде $A = XBA$, где X некоторое слово.*

Применим индукцию по числу букв в B. Если $B = b$ – буква алфавита, то ее можно найти в A, то есть $A = A_1bA_2$. Тогда $A = A_1bA_1bA_2$ Требуемый вид, где $X = A_1$. Переход. Сначала представим A в виде Xb_1A, где b_1 первая буква B. Теперь применим предположение индукции в условиях для b_1A в качестве A. Получим $XYBA$ – требуемый вид. Лемма доказана.

Докажем теперь, что любое достаточно большое слово можно привести к виду, содержащему меньше букв. Из этого будет следовать конечность полугруппы. Пусть утверждение верно для алфавита из $n - 1$ букв (для n=1 все очевидно). Пусть W слово достаточно большой длины. Можно утверждать, что в нем встретятся как минимум два одинаковых достаточно больших подслова A. Тогда W содержит подслово AVA. Докажем, что его можно сократить. Действительно, если A содержит не все буквы, его можно сократить по предположению индукции. Иначе, применим лемму, представив A в качестве $A = XVA$, где X – какое-то слово. тогда $AVA = XVAVA = XVA = A$. Таким образом, AVA можно представить в более коротком виде.

В7. Конечно-определенную полугруппу с нецелой размерностью Гельфанда-Кириллова построили новосибирские школьники Александр Рябченко, Степан Гатилов, Александр Перепечко и французский участник Le Floch Bruno. Приведем конструкцию новосибирцев с некоторыми усовершенствованиями.

Введем соотношения:

$*R_1 = 0$, где * любой элемент кроме R_1,

$R_2* = 0$, где * любой элемент кроме R_2.

$R_1b = R_1q_1q_1$;

$bR_2 = q_2q_2R_2$;

среди букв a, a', b, q_1, q_2 любая пара перестановочна (коммутирует), кроме пары q_1, q_2;

$q_1aq_2 = q_2a'q_1$;

$R_1 = R_1t$;

$t* = *t$, где * любая буква, кроме R_1, R_2, a;

$tq_i = q_it$;

$tt = t$;

$tR_2 = 0$.

Прокомментируем соотношения. Первые два означают, что R_1 R_2 могут быть только крайними. Остальные соотношения представляют механизм, обеспечивающий то, что в любом слове количество букв a более квадрата от количества букв b. Работает он так: половину букв b отгоняем к левому краю, другую к правому. Превращаем все буквы b в q_1 и q_2. Их будет по n штук. Затем начинаем менять их местами, произведя n^2 замен. При каждой замене одна a меняется на a'. Если букв a в слове меньше квадрата от количества b, то мы сможем превратить в a' все a. Тогда от R_1 к R_2 сможет пройти сигнал t, обнуляющий слово.

Легко видеть, любое слово, содержащее R_1 и R_2 вместе с этими буквами содержит и описанный механизм. Отметим, что краев можно добавить столько, сколько нужно, увеличивая количество слов с работающим механизмом. Таким образом, именно слова с работающим механизмом обеспечивают старший член в функции роста. Легко убедиться, что степень у него будет нецелая.