4 *После промежуточного финиша*

2.5. Докажите комбинаторно тождество с числами Фибоначчи:

$$f_{2n+2}f_{2n-2} = f_{2n}^2 + 1\,.$$

3.3. Докажите, что существуют такие константы C_1, C_2, что при всех четных m и n выполнено неравенство $C_1(5/4)^{mn} < N(m,n) < C_2(10/7)^{mn}$.

Будем называть $n-$*деталью* квадрат $n \times n$, у которого, возможно, вырезаны некоторые клетки верхнего или правого края. Пронумеруем строки $n-$детали числами 1, 2, ..., n снизу вверх, а столбцы — слева направо. Клетку будем обозначать парой номеров ее строки и столбца. Будем называть $n-$деталь *правильной*, если из пары клеток (n,i) и (i,n) при $i < n$ вырезана ровно одна, а также вырезана клетка (n,n).

4.1. Докажите, что $n-$деталь нечетным числом способов разрезается на доминошки тогда и только тогда, когда она правильная.

4.2. Докажите, что прямоугольник $n \times (2n+1)$ разрезается на доминошки кратным 4 числом способов.

4.3. Докажите, что квадрат со стороной $2n+1$ и вырезанной центральной клеткой разбивается на доминошки кратным 4 числом способов при $n > 1$.

4.4. Докажите, что прямоугольник $m \times n$ нечетным числом способов разбивается на доминошки тогда и только тогда, когда числа $m+1$ и $n+1$ взаимно просты.

4.5. Докажите, что прямоугольник $n \times 2n$ разбивается на доминошки количеством способов, сравнимым с 1 по модулю 4.

4.6. Докажите, что квадрат $2n \times 2n$ разбивается на доминошки кратным 8 числом способов при $n > 2$.

4.7. Докажите, что квадрат $2n \times 2n$ разбивается на доминошки кратным 16 числом способов при $n > 3$.

4.8. Дана клетчатая фигура, симметричная относительно некоторой диагональной прямой (т. е. прямой с угловым коэффициентом 1, проходящей через центры клеток). Докажите, что если на оси симметрии лежат n клеток фигуры, то число разбиений на доминошки такой фигуры делится на $2^{n/2}$.

4.9. Докажите, что клетчатая фигура может быть разбита на доминошки четным числом способов тогда и только тогда, когда в ней можно отметить некоторое непустое множество клеток так, что у каждой клетки фигуры будет четное число соседних по стороне отмеченных клеток.

4.10. Докажите, что количество разбиений квадрата $2n \times 2n$ на доминошки — число вида $2^n(2k+1)^2$.

4.11. Пусть $2k+1$ — наибольший общий делитель чисел $2m+1$ и $2n+1$. Докажите, что количество разбиений прямоугольника $2m \times 2n$ на доминошки делится на 2^k, но не делится на 2^{k+1}.

4.12. Обозначим через T_n количество разбиений ацтекского диаманта ранга n на доминошки. Докажите, что

$$T_{n+1}T_{n-1} = 2T_n^2\,.$$

Отсюда следует, что $T_n = 2^{n(n+1)/2}$.

4.13. Из шахматной доски $(n+1) \times (n+1)$ вырезана клетка $a1$. На всех остальных клетках вертикали a стоят “хромые” шахматные короли. За один ход хромой король может сдвинуться вправо, вниз или вправо-вниз на одну клетку. Сколько существует непересекающихся наборов маршрутов, двигаясь по которым, все n королей перейдут на клетки нижней горизонтали?