# Домино

С. Берлов, К. Кохась

Команда жюри: С. Берлов, И. Богданов, К. Кохась, К. Куюмжиян

## Условия задач

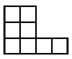
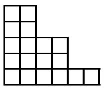
### 1 *Четность*

**1.1.** Докажите, что квадрат $n \times n$ разбивается на доминошки четным числом способов.

**1.2.** Докажите, что квадрат $n \times n$ разбивается на доминошки кратным 4 числом способов при $n > 2$.

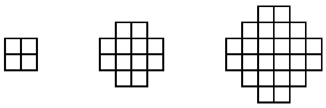
**1.3.** Докажите, что прямоугольники $3 \times 2n$ и $7 \times 2n$ разбиваются на доминошки нечетным числом способов.

**1.4.** Рассмотрим последовательность клетчатых фигур

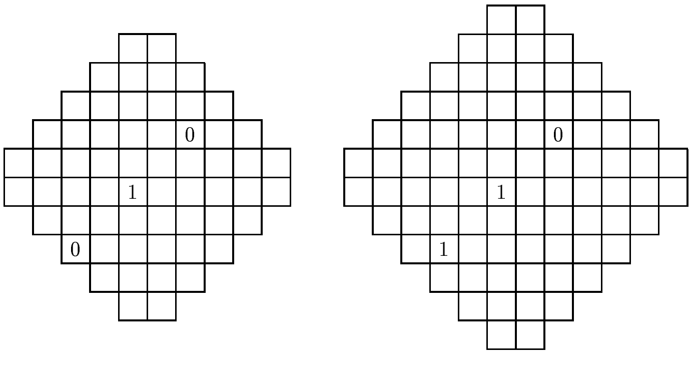
$H_1 =$  , $H_2 =$  , $H_3 =$  , $\ldots$

Фигура $H_n$ получается из $H_{n-1}$ добавлением слева вертикального прямоугольника $2 \times (2n-1)$. Докажите, что все фигуры $H_n$ разбиваются на домино нечетным числом способов.

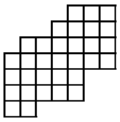
Ацтекский диамант ранга $n$ — это “клетчатый ромбик” со стороной $n$. На рисунке изображены ацтекские диаманты ранга 1, 2 и 3.



**1.5.** Рассмотрим “среднюю линию” ацтекского диаманта, т. е. диагональный ряд клеток, идущий от середины его “стороны” к середине противоположной “стороны”. Отметим на этой линии клетки через одну и поместим в отмеченные клетки произвольным образом числа 0 и 1 (на рисунке показан пример для диамантов четного и нечетного рангов). Рассмотрим разбиения диаманта на доминошки, согласованные со сделанной разметкой следующим образом: в них для каждой доминошки, накрывающей клетку с цифрой, вторая клетка доминошки расположена левее или выше, если эта цифра — 0 и правее или ниже — если 1. Докажите, что для всех расстановок нулей и единиц количество согласованных разбиений на доминошки одно и то же. В частности, количество разбиений ацтекского диаманта ранга $n$ на доминошки делится на $2^{\lceil n/2 \rceil}$.



**1.6.** а) Докажите, что изображенная ниже фигура четным числом способов разбивается на доминошки.



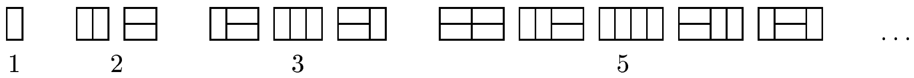
б) Докажите, что количество разбиений на доминошки ацтекского диаманта ранга $n$ делится на $2^n$.

**1.7.** Докажите, что прямоугольник $n \times (n+1)$ разбивается на доминошки нечетным числом способов.

## 2 *Рекуррентные соотношения*

Обозначим через $N(n,m)$ количество разбиений на домино прямоугольника $n \times m$, а через $f_n$ — последовательность чисел Фибоначчи: $f_0 = f_1 = 1$, $f_{n+1} = f_n + f_{n-1}$.

**2.1.** Докажите, что последовательность $N(n,2)$ — это последовательность чисел Фибоначчи.




**2.2.** Докажите при помощи комбинаторного рассуждения, что $f_{n+m} = f_{n-1}f_{m-1} + f_n f_m$.

**2.3.** Докажите, что последовательность $N(n,3)$ удовлетворяет рекуррентному соотношению

$$N(n,3) = 4N(n-2,3) - N(n-4,3)\,.$$

**2.4.** На краю доски $1993 \times 1993$ отмечено два поля $A$ и $B$, разделенные нечетным числом полей. Докажите, что количество способов покрыть доминошками $1 \times 2$ всю доску без поля $A$ равно количеству способов покрытия доминошками доски без поля $B$.

**2.5.** Пусть $d$ — количество способов разбить прямоугольник $100 \times 200$ на доминошки, $d_2$ — количество способов разбить на доминошки тот же прямоугольник, но без двух угловых клеток, прилегающих к одной стороне, $\widetilde{d}_2$ — количество способов разбить на доминошки тот же прямоугольник, но без двух угловых клеток, прилегающих к другой стороне, $d_4$ — количество способов разбить на доминошки тот же прямоугольник без четырех угловых клеток. Докажите, что

$$d \cdot d_4 = d_2^2 + \widetilde{d}_2^2\,.$$

**2.6.** Рассмотрим числовой треугольник

$$\begin{array}{ccccccccc}
a & & c & & e & & g & & \dots \\
& b & & d & & f & & \dots & \\
& & h & & k & & \dots & & \\
& & & \ell & & \dots & & & \\
& & & & \dots & & & &
\end{array} \tag{1}$$

образованный по правилу: для любых четырех чисел, образующих “ромбик”, выполнено соотношение

$$\begin{smallmatrix} & w & \\ x & & y \\ & z & \end{smallmatrix} \qquad wz = xy + 1\,. \tag{2}$$

Пусть первая строка этого треугольника состоит из единиц, а вторая — из двоек. Найдите, что за числа стоят в этом треугольнике.

**Белая магия**. Рассмотрим треугольник из предыдущей задачи. Будем считать, что элементы первых двух строчек — это независимые переменные, а элементы всех остальных строк — это рациональные функции от них, заданные при помощи соотношения (2). Нетрудно подсчитать, что элемент $\ell$ в треугольнике (1) имеет вид

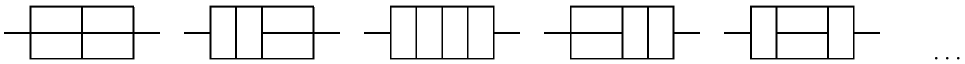
$$\ell = \frac{hk+1}{d} = \frac{\frac{bd+1}{c} \cdot \frac{df+1}{e} + 1}{d} = bc^{-1}de^{-1}f + c^{-1}e^{-1}f + c^{-1}d^{-1}e^{-1} + bc^{-1}e^{-1} + d^{-1}\,. \tag{3}$$

Теперь выпишем все разбиения прямоугольника $2 \times 4$ на доминошки и проделаем следующие действия:

1) добавим к каждой короткой стороне прямоугольника горизонтальный отрезок;

2) для каждого узла клетчатой бумаги, находящегося на средней линии прямоугольника, напишем его редуцированную валентность: количество единичных отрезков разбиения, сходящихся в этом узле, минус 3;

3) возьмем полученные упорядоченные наборы из 5 чисел в качестве показателей степеней у переменных $b$, $c$, $d$, $e$, $f$ в произведении $b^*c^*d^*e^*f^*$.



| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 −1 1 −1 1 | 0 −1 0 −1 1 | 0 −1 −1 −1 0 | 1 −1 0 −1 0 | 0 0 −1 0 0 | |
| $bc^{-1}de^{-1}f$ | $c^{-1}e^{-1}f$ | $c^{-1}d^{-1}e^{-1}$ | $bc^{-1}e^{-1}$ | $d^{-1}$ | |

Сравните то, что получилось, с правой частью (3).

**2.7.** Докажите, что “Белая магия” — это общий факт, а именно:

1) рациональные функции из треугольника (1) суть суммы одночленов, каждый из которых — это произведение исходных переменных в степени $\pm 1$ или 0. Все коэффициенты в сумме равны 1.

2) Одночлены, составляющие функцию из $(n+2)$-й строки, находятся во взаимно однозначном соответствии с разбиениями прямоугольника $2 \times 2n$ на доминошки по описанному выше правилу.

## 3 *Разное*

**3.1.** Верно ли, что для любого натурального $n$ существует клетчатая фигура, которую можно разбить на доминошки ровно $n$ способами?

**3.2.** Докажите, что если клетчатый многоугольник без дыр можно разбить на доминошки, то у него есть хотя бы одна четная сторона.

**3.3.** Докажите, что существуют такие константы $C_1$, $C_2 > 0$, что при всех четных $m$ и $n$ выполнено неравенство $C_1(5/4)^{mn} < N(m,n) < C_2(10/7)^{mn}$.

**3.4.** Докажите, что количество разбиений прямоугольника $3 \times 2n$ на доминошки — это число вида $a^2 + 2b^2$.

**3.5.** Прямоугольник $2n \times 2m$ разбит на доминошки. Вне доски возле крайней левой вертикали прямоугольника находится фишка, которая начинает двигаться по доске вправо по следующему правилу. Заходя в очередную доминошку (слева), фишка перемещается на вторую клетку этой доминошки и движется с этой клетки вправо на следующую доминошку (или за край доски). Докажите, что фишка закончит движение справа от доски на той же горизонтали, на которой она находилась в начале.

## 4 *После промежуточного финиша*

**2.6.** Докажите комбинаторно тождество с числами Фибоначчи:

$$f_{2n+2}f_{2n-2} = f_{2n}^2 + 1\,.$$

Будем называть $n-$*деталью* квадрат $n \times n$, у которого, возможно, вырезаны некоторые клетки верхнего или правого края. Пронумеруем строки $n-$детали числами $1, 2, \ldots, n$ снизу вверх, а столбцы — слева направо. Клетку будем обозначать парой номеров ее строки и столбца. Будем называть $n-$деталь *правильной*, если из пары клеток $(n, i)$ и $(i, n)$ при $i < n$ вырезана ровно одна, а также вырезана клетка $(n, n)$.

**4.1.** Докажите, что $n-$деталь нечетным числом способов разрезается на доминошки тогда и только тогда, когда она правильная.

**4.2.** Докажите, что прямоугольник $n \times (2n+1)$ разрезается на доминошки кратным 4 числом способов.

**4.3.** Докажите, что квадрат со стороной $2n+1$ и вырезанной центральной клеткой разбивается на доминошки кратным 4 числом способов при $n > 1$.

**4.4.** Докажите, что прямоугольник $m \times n$ нечетным числом способов разбивается на доминошки тогда и только тогда, когда числа $m+1$ и $n+1$ взаимно просты.

**4.5.** Докажите, что прямоугольник $n \times 2n$ разбивается на доминошки количеством способов, сравнимым с 1 по модулю 4.

**4.6.** Докажите, что квадрат $2n \times 2n$ разбивается на доминошки кратным 8 числом способов при $n > 2$.

**4.7.** Докажите, что квадрат $2n \times 2n$ разбивается на доминошки кратным 16 числом способов при $n > 3$.

**4.8.** Дана клетчатая фигура, симметричная относительно некоторой диагональной прямой (т. е. прямой с угловым коэффициентом 1, проходящей через центры клеток). Докажите, что если на оси симметрии лежат $n$ клеток фигуры, то число разбиений на доминошки такой фигуры делится на $2^{n/2}$.

**4.9.** Докажите, что клетчатая фигура может быть разбита на доминошки четным числом способов тогда и только тогда, когда в ней можно отметить некоторое непустое множество клеток так, что у каждой клетки фигуры будет четное число соседних по стороне отмеченных клеток.

**4.10.** Докажите, что количество разбиений квадрата $2n \times 2n$ на доминошки — число вида $2^n(2k+1)^2$.

**4.11.** Пусть $2k+1$ — наибольший общий делитель чисел $2m+1$ и $2n+1$. Докажите, что количество разбиений прямоугольника $2m \times 2n$ на доминошки делится на $2^k$, но не делится на $2^{k+1}$.

**4.12.** Обозначим через $T_n$ количество разбиений ацтекского диаманта ранга $n$ на доминошки. Докажите, что

$$T_{n+1}T_{n-1} = 2T_n^2\,.$$

Отсюда следует, что $T_n = 2^{n(n+1)/2}$.

**4.13.** Из шахматной доски $(n+1) \times (n+1)$ вырезана клетка $a1$. На всех остальных клетках вертикали $a$ стоят “хромые” шахматные короли. За один ход хромой король может сдвинуться вправо, вниз или вправо-вниз на одну клетку. Сколько существует непересекающихся наборов маршрутов, двигаясь по которым, все $n$ королей перейдут на клетки нижней горизонтали?

## 5 *Убранное из основного текста*

**Белая магия – 2**. Рассмотрим пирамиду из объектов, у которой в каждом слое объекты расположены по квадратной сетке, а каждый следующий слой смещен так, что его объекты расположены над центрами квадратов предыдущего слоя. Слои нумеруются возрастающими целыми числами, начиная с минус единицы. Обектами, размещенными в такой пирамиде, будут функции, определяемые следующим образом. Пусть элементы, расположенные в минус первом и нулевом слоях — это попарно различные независимые переменные. Далее, если мы имеем такой трехмерный фрагмент (октаэдр): четыре функции $B$, $C$, $D$, $E$ расположенные в вершинах единичного квадрата, функция $A$, расположенная в соседним слое с меньшим номером под центром этого квадрата и функция $F$, расположенная в соседним слое с бóльшим номером над центром этого квадрата, то для этих функций выполнено соотношение

$$F = \frac{BE + CD}{A}\,.$$

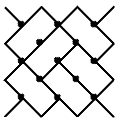
Пользуясь этим соотношением, мы, зная функции в двух начальных слоях, сможем построить функции во всей пирамиде.

Рассмотрим, например, пирамиду, у которой в минус первом слое расположено 16 переменных, а в нулевом — 9:

$$\begin{array}{cccc} a & b & c & d \\ e & f & g & h \\ i & j & k & l \\ m & n & o & p \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} r & s & t \\ u & v & w \\ x & y & z \end{array} \tag{4}$$

Эта пирамида определяет единственную рациональную функцию на втором слое, которая, как оказывается, равна сумме одночленов от переменных (4) (каждая переменная входит в одночлен в степени $\pm 1$ или 0). Одночлены находятся во взаимно однозначном соответствии с разбиениями на доминошки ацтекского диаманта ранга 2. Соответствие определяется следующим образом.

Нарисуем произвольное разбиение диаманта на доминошки. Добавим к диаманту два вертикальных и два горизонтальных отрезка и повернем картинку на 45°. Вычислим редуцированные валентности всех внутренних узлов. Возьмем полученный набор чисел в качестве степеней исходных переменных и перемножим полученные выражения. Мы получим одночлен, соответствующий разбиению.



$$\longrightarrow \begin{array}{ccccc} 0 & & 1 & & 0 \\ & -1 & & 0 & \\ 1 & & 0 & & 0 \\ & 0 & & -1 & \\ 0 & & 0 & & 1 \end{array} \longrightarrow \begin{array}{ccccc} r^0 & & s^1 & & t^0 \\ & f^{-1} & & g^0 & \\ u^1 & & v^0 & & w^0 \\ & j^0 & & k^{-1} & \\ x^0 & & y^0 & & z^1 \end{array} \longrightarrow f^{-1}k^{-1}suz$$

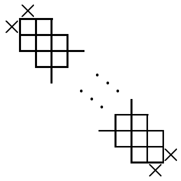
**5.1.** 1) Докажите, что “Белая магия – 2” — это общий факт, а именно: рациональные функции из из описанной пирамиды суть суммы одночленов, каждый из которых — это произведение исходных переменных в степени $\pm 1$ или 0. Все коэффициенты в сумме равны 1. Одночлены, составляющие функцию из $n$-го слоя, находятся во взаимно однозначном соответствии с разбиениями ацтекского диаманта ранга $n$ на доминошки по описанному выше правилу.

## Решения

**1.1.** Симметрия относительно диагонали разбивает множество разбиений на пары.

**1.2.** Следующая лемма лежит в основе “теории квадратных флипов”.

Лемма о диагонали. Рассмотрим фигуру, которая содержит содержит фрагмент, состоящий из трех диагональных рядов клеток, как показано на рисунке, причем клетки, помеченные крестиками, не принадлежат фигуре.

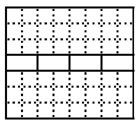


Тогда количество разбиений такой фигуры на доминошки четно.

Доказательство. Рассмотрим средний из этих диагональных рядов. Докажем, что найдется квадрат $2 \times 2$, состоящий из двух доминошек замощения и содержащий две клетки этого диагонального ряда. Действительно, если такого квадрата не найдется, то, просматривая этот ряд клеток, начиная с верхнего левого угла, мы видим, что каждая очередная доминошка, накрывающая диагональную клетку, должна накрывать также либо клетку справа, либо клетку снизу. Дойдя до правого нижнего угла, получаем противоречие.

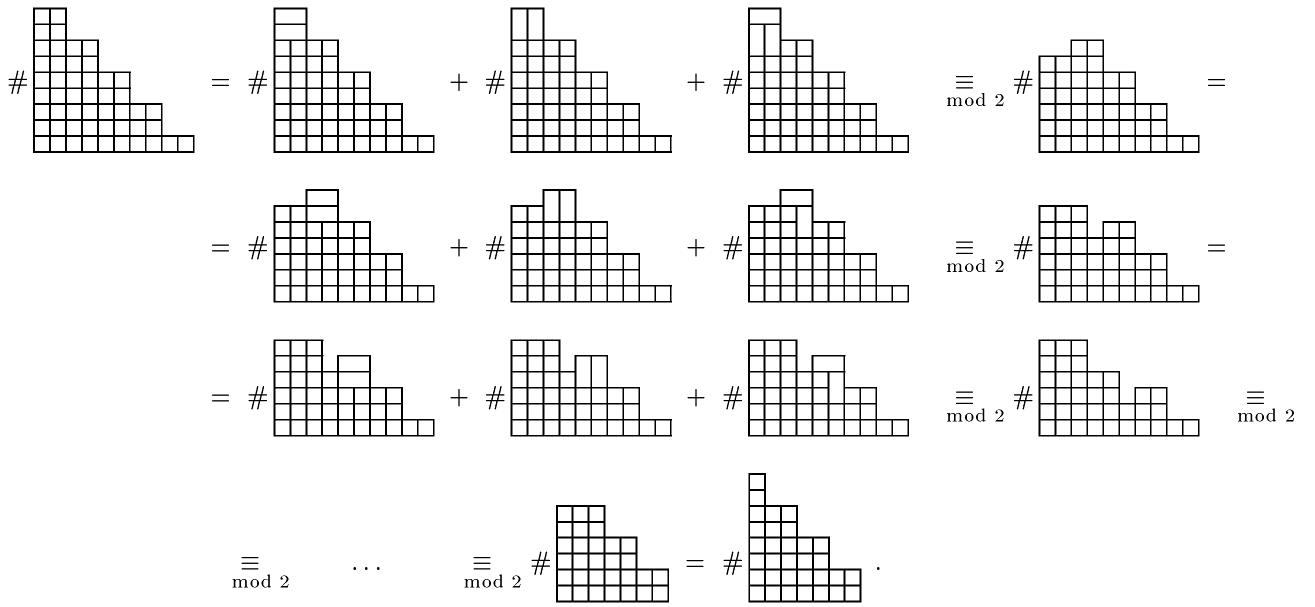
Отметим в каждом разбиении на доминошки самый нижний диагональный квадрат $2 \times 2$. Для каждого возможного положения диагонального квадрата, количество разбиений, содержащих как раз на этом месте отмеченный диагональный квадрат $2 \times 2$, четно — осевая симметрия относительно все той же диагонали разбивает множество таких разбиений на пары. Кроме того мы можем выбирать, каким из двух способов разбит на доминошки диагональный квадрат. Поэтому общее число разбиений делится на 4.

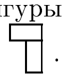
**1.3.** Утверждение о прямоугольнике $3 \times 2n$ очевидно выводится по индукции — см. формулу (5) в решении задачи 2.3. Для доказательства второго утверждения отметим середины сторон длины 7 и рассмотрим симметрию относительно соответствующей средней линии. Все разбиения на доминошки прямоугольника $7 \times 2n$ окажутся разбитыми на пары, за исключением тех разбиений, в которых “средние” доминошки лежат строго вдоль средней линии:



Количество таких разбиений равно квадрату количества разбиений прямоугольника $3 \times 2n$, т. е. нечетно.

**1.4.** Это утверждение вместе с доказательством мы взяли в [8]. Будем доказывать по индукции. База $n = 1$, 2 очевидна. Посмотрим, как могут прилегать доминошки к верхнему краю фигуры $H_n$.

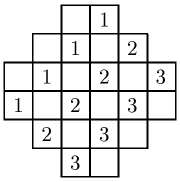


Здесь при переходе от первой строки ко второй, мы убрали из фигуры фрагмент $3 \times 2$, а при переходе к каждой следующей строке мы убираем из фигуры фрагмент вида  . В конце получилась перевернутая фигура $H_{n-1}$.

**1.5.** Утверждение взято из [11]. Доказательство содержится фактически в [8]. Ключевая идея — конструкция задачи 4.8. Решение совершенно аналонично решению задачи 4.8.

**1.6.** а) Как и в задаче 1.2, фигура содержит диагональный ряд клеток, идущих из левого нижнего угла в правый верхний, и мы можем разбить все множество разбиений на пары, переставляя доминошки в самом нижнем диагональном квадрате $2 \times 2$.

б) Ацтекский диамант ранга $n$ содержит $n$ независимых диагональных рядов клеток (см. пример для $n = 3$).




Каждый из этих рядов клеток определяет свой квадрат $2 \times 2$, причем эти квадраты не пересекаются. Для каждого разбиения рассмотрим $2^n$ разбиений (включая исходное), отличающихся лишь расположением доминошек в этих квадратах. Это дает разбиение всего множества разбиений на блоки по $2^n$ элементов.

**1.7.** Эту задачу Д. Карпова мы взяли в [1, задача 97.109].

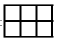
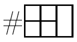
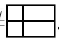
Рассмотрим диагональный ряд клеток, идущий из левого верхнего угла прямоугольника в клетку, соседнюю с правым нижним углом. Достаточно рассматривать только те разбиения, в которых никакие две доминошки, покрывающие клетки этого диагонального ряда, не образуют квадрата $2 \times 2$ (количество разбиений, содержащих хотя бы один такой квадрат, четно). Существует взаимно однозначное соответствие между такими разбиениями на доминошки прямоугольника $n \times (n + 1)$ и всеми разбиениями прямоугольника $(n - 1) \times n$.

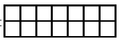
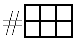
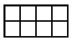
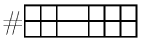
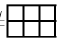
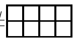
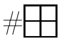
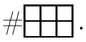
В одну сторону это соответствие можно получить следующим образом: вырежем из прямоугольника $n \times (n + 1)$ все доминошки, содержащие клетки указанного диагонального ряда, после этого клетки "верхней"части сдвинем влево-вниз на одну клетку. Получится прямоугольник $(n - 1) \times n$ (докажите!).

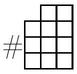
Обратное соответствие описывается чуть сложнее. Рассмотрим аналогичный диагональный ряд клеток в прямоугольнике $(n - 1) \times n$. Отделим в нижнюю часть все доминошки разбиения, лежащие "не выше"этого диагонального ряда. Остальные доминошки образуют верхнюю часть. Сдвинем верхнюю часть на единицу вверх и вправо; после этого можно единственным способом заполнить образовавшуюся "щель"доминошками, чтобы получилось разбиение на доминошки прямоугольника $n \times (n + 1)$.

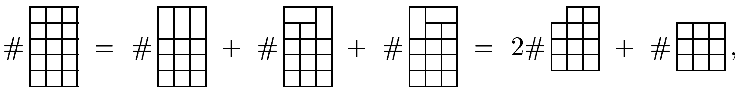
Теперь утверждение задачи легко получается индукцией по $n$.

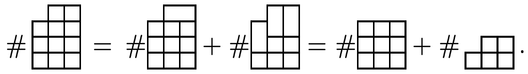
Другое решение можно получить из решения задачи 4.1, если заметить, что прямоугольник $n \times (n + 1)$ является правильной $(n + 1)$-деталью.

**2.1.** Заметим, что #= # + #. Поэтому выполнено соотношение $N(n,2) = N(n-1,2)+N(n-2,2)$.

**2.2.** Похоже на предыдущее. [4] #= #  + #= # · # + # · #. Поэтому $f_{n+m} = f_n f_{m-1} + f_n f_m$.

**2.3.** [4] Обозначим для краткости $N_n = N(n,3)$ и обозначим $\gamma_n =$# ($n-2$ полных строки и одна неполная). Заметим, что

 (5)



Можно записать наши наблюдения следующим образом

$$\begin{aligned} N_n &= 2\gamma_n + N_{n-2}\,, \\ 2\gamma_{n-2} &= N_{n-2} - N_{n-4}\,, \\ 2\gamma_n &= 2\gamma_{n-2} + 2N_{n-2}\,. \end{aligned}$$

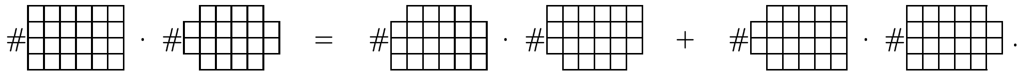
Складывая это три равенства, получаем требуемое.

Кстати, решая полученное рекуррентное соотношение, можно получить точную формулу [4]

$$N(n,3) = \begin{cases} 0, & \text{для нечетных } n\,, \\ \frac{\sqrt{3}}{6}\big((\sqrt{3}+1)(2+\sqrt{3})^{n/2} + (\sqrt{3}-1)(2-\sqrt{3})^{n/2}\big)\,, & \text{для четных } n\,. \end{cases}$$

**2.4.** Мы взяли эту задачу в [3]. Раскрасим доску в шахматном порядке в черный и белый цвета. Пусть углы доски — черного цвета. Тогда можно считать, что оба поля $A$ и $B$ — черные, так как если бы они были белыми, то количество способов раскраски было бы равно нулю в обоих случаях. Рассмотрим произвольное покрытие доминошками всей доски $T$ без поля $A$ и выберем ту доминошку, которая покрывает поле $B = B_1$ (и некоторое поле $B_2$). Сдвинем ее на одно поле в направлении от $B_1$ к $B_2$. Накрытое ею третье поле $B_3$ также покрыто какой-то доминошкой, накрывающей поля $B_3$ и $B_4$. Сдвинем ее в направлении от $B_3$ к $B_4$ и так далее. Мы получим цепочку доминошек, которая может окончиться лишь зациклившись, либо уперевшись в поле $B_1$ (проверьте, что доминошку всегда можно сдвинуть в указанном направлении; это следует из того, что поля $B_{2k+1}$ всегда будут черными полями, причем такими, что номер их столбца и номер их строки будут отличаться соответственно от номера столбца поля $B_1$ и номера строки поля $B_1$ на четное число). Однако и зацикливание невозможно, так как в этом случае внутри цикла находилось бы нечетное количество полей (читатель может доказать это самостоятельно). Итак, данная цепочка упирается в поле $A$. Тогда мы можем переделать наше покрытие доски $T \setminus A$ в покрытие доски $T \setminus B$, разбив эту цепочку на доминошки другим способом — покрыв $A$, но не покрыв $B$. Таким образом, каждому покрытию доски $T$ без поля $A$ соответствует покрытие доски $T$ без поля $B$. Есть также и аналогичное обратное соответствие, что и дает нам равенство количеств способов покрытия $T \setminus A$ и $T \setminus B$ доминошками.

**2.5.** Утверждение этой задачи — чуть упрощенная версия теоремы 2.1 из [6]. Мы проверим ориентированную версию утверждения задачи для произвольного прямоугольника с четными сторонами, а именно



Рассмотрим разбиение на доминошки всего прямоугольника и еще одно разбиение на доминошки прямоугольника без углов. Возьмем одну из угловых клеток, рассмотрим вторую клетку доминошки, которая накрывает эту угловую клетку в первом разбиении, для найденной клетки рассмотрим вторую клетку доминошки второго разбиения, накрывающей эту клетку и т.д. Эта цепочка клеток может закончиться только угловой клеткой на стороне, прилегающей к начальной угловой клетке. Аналогичная цепочка, построенная из противоположного угла, закончится в четвертой угловой клетке и не будет пересекаться с первой цепочкой. Сдвинув доминошки в первой цепочке (в обоих разбиениях), мы получим из исходной пары разбиений пару разбиений одного из типов в правой части.

Аналогично определяется обратное отображение. Рассмотрим, например, разбиение на доминошки всего прямоугольника без двух верхних углов и разбиение на доминошки прямоугольника без двух нижних углов.

Возьмем нижнюю левую угловую клетку, пусть она черного цвета. Рассмотрим доминошку, которая накрывает эту угловую клетку в первом разбиении, для найденной клетки рассмотрим вторую клетку доминошки второго разбиения, накрывающей эту клетку и т.д. Докажем, что эта цепочка клеток может закончится только в правом нижнем углу. Действительно, она не может закончиться в правом верхнем углу, поскольку тогда вторая цепочка (которую мы можем начать строить из левого верхнего угла) вообще не может нигде закончиться — цепочки не могут пересекаться, а путь к правому нижнему углу "отрезан" первой цепочкой. Также не может эта цепочка клеток закончиться в левом верхнем углу. Действительно, если бы это произошло, то левый верхний угол (белая клетка) должен был быть второй клеткой в последней доминошке этой цепочки. Но в нашей цепочке только доминошки, принадлежащие первому разбиению, имеют "вторую" белую клетку (а у доминошек первого разбиения "вторая" клетка — черная). Но тогда получается, что левая верхняя угловая клетка принадлежит первому разбиению, что неверно (первое разбиение — это разбиение прямоугольника без двух верхних углов).

Итак, построенная цепочка клеток заканчивается в правом нижнем углу. Аналогично цепочка клеток, построенная из верхней левой угловой клетки, заканчивается в правом верхнем углу. Поменяв в первой цепочке доминошки, принадлежащие первому разбиению, и доминошки, принадлежащие второму, получим разбиение полного прямоугольника и разбиение прямоугольника без четырех углов. Ясно, что описанное отображение и есть требуемое обратное соответствие.

Следовательно построенное отображение является взаимно однозначным.

Замечание. Приведенное решение верно в следующей более общей ситуации. Пусть дана произвольная связная (ходом ладьи) клетчатая фигура $D$. И пусть при обходе ее границы встречаются (не обязательно подряд) клетки $a$, $b$, $c$, $d$, причем в шахматной раскраске клетки $a$ и $c$ черные, а клетки $b$ и $d$ — белые. Тогда

$$N(D)N(D \setminus \{a,b,c,d\}) = N(D \setminus \{a,b\})N(D \setminus \{c,d\}) + N(D \setminus \{a,d\})N(D \setminus \{b,c\})\,.$$

**2.6.** Ответ: треугольник заполнен числами Фибоначчи $f_{2n}$: $\begin{smallmatrix} 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & \dots \\ & 2 & & 2 & & 2 & & \dots & \\ & & 5 & & 5 & & \dots & & \\ & & & 13 & & \dots & & & \end{smallmatrix}$ Это следует из тождества

$$f_{2n+2}f_{2n-2} = f_{2n}^2 + 1\,.$$

Это тождество сразу следует из замечания в решении задачи 2.5: достаточно рассмотреть рассмотреть клетки, указанные на рисунке.

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | $a$ | | | | | $d$ | |
| | $b$ | | | | | $c$ | |

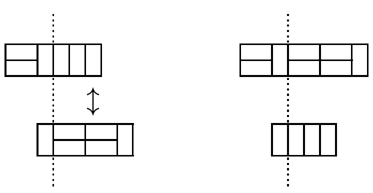
Мы дадим другое независимое комбинаторное доказательство этой формулы.

Рассмотрим всевозможные (упорядоченные) пары разбиений прямоугольника $2 \times 2n$ на доминошки, а также пары, состоящие из разбиения прямоугольника $2 \times (2n + 2)$ и разбиения прямоугольника $2 \times (2n - 2)$. Пример таких пар, а также удобный способ взаиморасположения элементов пары показаны на рисунке.

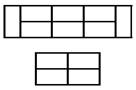
Опишем взаимно однозначное соответствие между этими множествами пар. При этом нам потребуется добавить в первое множество один лишний элемент.

Соответствие устроено очень просто. Если в нижнем прямоугольнике первой пары есть "шов", отрезающий правый блок $2 \times 2$ (т.е. если этот блок замощен двумя целыми доминошками), мы передвинем этот блок вверх, "приклеив" к верхнему прямоугольнику. Этот случай изображен выше.

Если же шва нет, т. е. продолжение вниз правой стороны верхнего прямоугольника разрезает в нем какую-то доминошку, мы будем просматривать все вертикальные швы справа налево в верхнем прямоугольнике до тех пор, пока не найдем такой шов, продолжение которого вниз образует шов в нижнем прямоугольнике. Нетрудно проверить, что такой шов найдется (в крайнем случае он может проходить по левой стороне нижнего прямоугольника). Найдя шов, мы отрезаем по нему части прямоугольников, расположенные правее, и меняем их местами.



Ясно, что построенное соответствие разным парам замощений прямоугольников $2 \times 2n$ сопоставляет разные пары замощений прямоугольников $2 \times (2n+2)$ и $2 \times (2n-2)$, поскольку очевидно, как устроено обратное соответствие: мы просматриваем нижний прямоугольник $2 \times (2n-2)$, начиная с правой стороны и двигаясь влево, в поисках первого же шва, который разрезает оба прямоугольника, после чего меняем местами отрезанные части. Этого шва не существует лишь в единственном случае, показанном на рисунке.



**2.7.** Утверждение этой задачи мы почерпнули в заметке Джеймса Проппа [10], в которой он его не доказывает. По-видимому авторское доказательство неэлементарно. Однако, поскольку ответ, т. е. комбинаторное истолкование функций из треугольника, известен, мы можем дать несложное комбинаторное доказательство.

Для того чтобы проверить утверждение задачи, достаточно убедиться, что рациональные функции, построенные по разбиениям прямоугольников на доминошки при помощи алгоритма “Белая магия”, удовлетворяют соотношению “ромбика”:

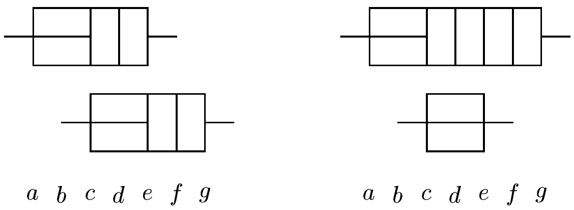
$$\begin{matrix} & w & \\ x & & y \\ & z & \end{matrix} \qquad wz = xy + 1\,. \tag{6}$$

Для проверки этого соотношения воспользуемся взаимно однозначным соответствием из предыдущей задачи. Рассуждения будем вести на примере частного случая $n = 4$, который “охватывает” всю общность.

Итак, рассмотрим функциональный треугольник,

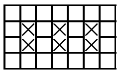
$$\begin{matrix} \lambda & & b & & d & & f & & \dots & \\ & a & & c & & e & & g & & \dots \\ & & h & & k & & \ell & & \dots & \\ & & & p & & q & & \dots & & \\ & & & & r & & \dots & & & \end{matrix}$$

состоящий из рациональных функций от переменных $a$, $b$, $c$, $d$, $e$, $f$, $g$, $\dots$, заданных при помощи комбинаторного алгоритма “Белая магия”. Докажем, что выполнено соотношение $kr = pq + 1$. Каждая из функций в этом соотношении — это сумма одночленов, соответствующих разбиениям определенных прямоугольников на доминошки. Чтобы получить произведение $kr$, мы можем перебрать все пары разбиений на домино прямоугольников $2 \times 4$, для каждой такой пары перемножить соответственные одночлены, а потом сложить все, что получилось. Аналогично можно получить произведение $pq$. Отметим, что при таком вычислении мы должны брать переменные, составляющие одночлены, в соответствии с положением перемножаемых функций в треугольнике. На рисунке снизу приведены примеры пар разбиений а снизу подписаны переменные, “отвечающие” за каждую вертикаль.




Заметим теперь, что взаимно однозначное соответствие из предыдущей задачи сопоставляет друг другу пары разбиений, порождающие равные одночлены. Это очевидно: при соответствии мы всего лишь меняем местами по вертикали (!) куски разбиений; при этом суммы редуцированных валентностей контролируемых узлов на одной вертикали не меняются (в том числе, на шве), а только этим и определяются степени переменных в одночлене.

**3.1.** Ответ: да, это верно. Например, следующая фигура, имеющая $n$ дырок, может быть разбита на доминошки $n+1$ способами (см. [7], на рисунке $n=3$):



**3.2.** Это решение нам рассказал С. Дориченко.

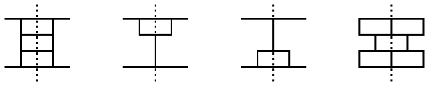
Если утверждение задачи неверно, то у многоугольника разное количество черных и белых клеток. Действительно, пусть многоугольник содержит $N$ черных и $N$ белых клеток (при шахматной раскраске). Подсчитаем периметр всех черных клеточек: он равен, с одной стороны, $4N$, а с другой — сумме длин черных граничных участков + сумма длин всех внутренних линий. Аналогично периметр всех белых клеточек равен $4N$ и равен суме длин белых граничных участков + сумма длин всех внутренних линий. Но тогда сумма длин черных граничных участков равна сумме длин белых граничных участков. Если же все стороны нечетны, то на каждой стороне одного и того же цвета больше (так как все углы фигуры с нечетными сторонами — одного цвета). Получили противоречие.

**3.3.** Мы почерпнули это утверждение в [9]. Левое неравенство следует из результата задачи 2.1 и того, что $f_n > \frac{1}{100}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n$, что мгновенно доказывается по индукции или следует из формулы Бине. Неравенство $N(m,n) < (\sqrt{2})^{mn}$ следует из того, что любое разбиение любой клетчатой фигуры площади $S$ можно закодировать последовательностью из $S/2$ битов следующим образом.

Выберем самую левую среди самых верхних клеток, не принадлежащих уже закодированным домино, и запишем в кодирующую последовательность 0 или 1 в зависимости от того, как расположена доминошка, накрывающая эту клетку. В результате выполнения этих действий мы получим последовательность из $mn/2$ битов, с очевидным правилом расшифровки.

Как указано в [9], при больших $n$ $N(n,n) \approx (1.34)^{n^2}$.

**3.4.** Рассмотрим среднюю линию прямоугольника, разбивающую его на две части $3\times n$. Мы рассмотрим только случай нечетного $n$ (для четных $n$ решение аналогично). Возможны следующие варианты расположения доминошек поблизости.



Последний случай невозможен, поскольку форсирует "паркетное" расположение доминошек во всей полосе ширины 3. Два средних случая симметричны друг другу. Пусть $a$ — количество способов разбиения на доминошки прямоугольника $3\times(n-1)$, а $b$ — количество способов разбиения на доминошки прямоугольника $3\times n$ без одной угловой клетки. Тогда количество разбиений, соответствующих первой картинке — это $a^2$, а соответствующих второй и третьей — $b^2$.

**3.5.** Рассмотрим шахматную раскраску. Пусть $2n$ — высота доски, $2m$ — ширина. Рассмотрим сразу $n$ фишек, движущихся по описанному правилу, которые, начав движение, попадают на черные клетки крайней левой вертикали. Нетрудно видеть, что, заходя в очередную доминошку, эти фишки оказываются сначала на черной клетке, а уж потом на белой. Кроме того ясно, что маршруты этих фишек не пересекаются. Поэтому фишки закончат движение на различных черных клетках вертикали, примыкающей к краю доски справа, т. е. на тех же горизонталях, что и в начале.

Нетрудно понять, что зная маршруты всех $n$ фишек, мы можем однозначно восстановить разбиение на доминошки. Таким образом, разбиения прямоугольника $2n\times 2m$ на доминошки находятся во взаимно однозначном соответствии с наборами из $n$ непересекающихся маршрутов указанного в задаче типа. Это наблюдение мы почерпнули в [12].

**4.1.** Утверждение этой задачи также принадлежит Д. Карпову [1, решение 97.109].

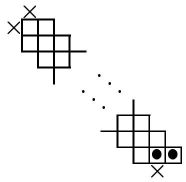
Клетки правого столбца и верхней строчки квадрата $n \times n$, принадлежащие $n$-детали, назовем каемкой. Все клетки каемки, кроме правого верхнего угла (назовем его угловой клеткой), можно разбить на пары симметричных относительно диагонали квадрата. Докажем индукцией по $n$, что количество разбиений $n$-детали на доминошки нечетно тогда и только тогда, когда деталь правильная. База $n = 3$ очевидна. Докажем переход.

Рассмотрим сначала правильную $(n + 1)$-деталь $D$. Вырежем из нее доминошки, покрывающие клетки каемки. В результате получится $n$-деталь, которая будет правильной только в том случае, если каждая из вырезанных доминошек содержала ровно одну клетку каемки. Заметим, что такой способ покрыть клетки каемки детали $D$ доминошками единственен. Итак, среди всех способов покрытия каемки детали $D$ доминошками только один способ приводит (после удаления этих доминошек) к правильной $n$-детали, а остальные способы приводят к неправильным $n$-деталям. Применяя предположение индукции, мы заключаем, что число способов разбить правильную $(n + 1)$-деталь на доминошки нечетно.

Пусть теперь $D$ — неправильная $(n + 1)$-деталь. Из рассуждений предыдущего параграфа следует, что количество разбиений $(n + 1)$-детали на доминошки нечетно тогда и только тогда, когда удалением доминошек, лежащих *внутри* каемки, из нее можно получить нечетное количество правильных $(n + 1)$-деталей. Рассмотрим несколько доминошек, целиком лежащих внутри каемки неправильной детали $D$. Пусть после их удаления из детали $D$ получится правильная. Тогда, так как правильная деталь содержит ровно одну клетку из каждой пары клеток, симметричных относительно диагонали квадрата, каемка детали $D$ содержит клетки, симметричные всем вырезанным из нее доминошкам. Но тогда можно вырезать из каемки $D$ доминошки, симметричные вырезанным в первом способе, и получится *другая* правильная деталь. Таким образом, вырезая из каемки неправильной детали доминошки, можно получить четное количество правильных деталей. Значит, количество разбиений неправильной $(n + 1)$-детали на доминошки четно. Индукционный переход доказан.

Мы приведем еще одно решение этой задачи, найденное участниками конференции и основанное на теории квадратных флипов.

Л е м м а о полудиагонали. Рассмотрим фигуру, которая содержит содержит фрагмент, состоящий из трех диагональных рядов клеток, показанных на рисунке, причем клетки, помеченные крестиками, не принадлежат фигуре.

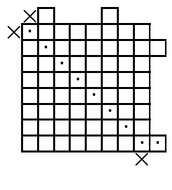


Если удалить из такой фигуры доминошку, помеченную жирными кружочками, то у оставшейся фигуры количество разбиений на доминошки будет иметь ту же четность, что и у исходной.

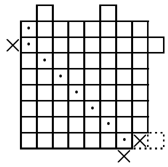
Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим средний из этих диагональных рядов. Рассуждая как и в лемме о диагонали, мы либо найдем диагональный квадрат $2 \times 2$ (множество разбиений, содержащих такой квадрат, автоматически распадается на пары), либо убедимся, что последняя доминошка в этом ряду как раз накрывает две отмеченные клетки.

Теперь рассмотрим произвольную деталь. Если обе клетки $(n, 1)$ и $(1, n)$ вырезаны или наоборот обе принадлежат детали, то по лемме о диагонали (примененной к диагонали $(1, n)$, $(2, n - 1)$, …, $(n, 1)$) такая деталь имеет четное число разбиений на доминошки.

Пусть лишь одна из этих клеток вырезана, например, клетка $(n, 1)$.



Применяя лемму о полудиагонали, заключаем, что вырезание доминошки $(1, n - 1)$—$(1, n)$ не изменит четности количества разбиений на доминошки. Для оставшейся фигуры мы снова можем применить лемму о полудиагонали (“вверх ногами”) и заключить, что вырезание доминошки $(n - 1, 1)$—$(n - 2, 1)$ снова не изменит четности количества разбиений на доминошки.



Продолжая рассуждать подобным образом дальше, мы установим, что без изменения четности числа разбиений можно полностью удасить из нашей исходной детали первую строку и первый столбец.

Остаток рассуждения проводится по индукции.

**4.2.** Рассмотрим центральный ряд клеток, делящий прямоугольник на два квадрата $n \times n$. Отметим все доминошки, накрывающие клетки этого ряда. Если удалить эти доминошки, останутся две части, каждая из которых является деталью и может может быть замощена независимо от другой. Если обе детели неправильные, то мы автоматически получаем четное число замощений.

Рассмотрим случай, когда одна из деталей правильная. Тогда оставшаяся часть является квадратом и имеет кратное 4 число замощений (при $n > 2$)

Въедливый читатель проверит утверждение задачи для $n = 2$ ручками.

**4.3.** Сначала приведем конспект решения при помощи квадратных флипов. Рассмотрим главную диагональ квадрата $(2n + 1) \times (2n + 1)$. Рассмотрим те разбиения, которые содержат диагональный квадрат $2 \times 2$. Пользуясь флипом в этом квадрате и симметрией относительно главной диагонали мы, как и в задаче 1.2, сможем разбить множество таких разбиений на четверки.

Теперь во множестве оставшихся разбиений рассмотрим те, которые содержат квадрат $2 \times 2$ на второй диагонали исходного квадрата $(2n + 1) \times (2n + 1)$. Множество таких разбиений мы аналогично разобьем на четверки.

Осталось рассмотреть разбиения, не содержащие диагональных квадратов. Окрестность вырезанной клетки в таких разбиениях выглядит так, как показано на рисунке.

Опять рассматривая симметрию относительно главной диагонали, и независимо от этого замену одной из изображенных выше окрестностностей на другую, мы получаем разбиение на четверки.

Теперь приведем решение с помощью теории деталей. Оно позволяет доказать более сильный результат.

Рассмотрим вертикальный и горизонтальный ряды клеток (“крест”), проходящие через вырезанную клетку. Удалим все доминошки, накрывающие клетки этих рядов. Оставшиеся доминошки образуют четыре непересекающиеся детали. Можество разбиений исходного квадрата, получающихся дальнейшим подразбиением этих деталей на доминошки, назовем *классом.*

Достаточно рассмотреть случаи, когда хотя бы три из этих четырех деталей правильные (иначе делимость на 4 количества разбиений в классе очевидна).

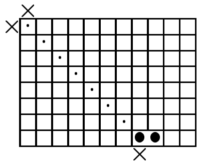
Более того, если фигура, образованная удаленными доминошками, не центрально симметрична, то сами такие классы можно разбить на группы по 4 (при помощи поворотов на 90°, 180°, 270°), что дает в сумме количество разбиений, кратное 4.

Осталось заметить, что если все 4 детали правильные, то все они одинаковые и при этом ни одна из доминошек не лежит целиком в “кресте” (проверьте!). В каждом таком классе количество разбиений сравнимо с $1 \pmod{16}$, поскольку является точной четвертой степенью. Каждый такой класс однозначно определяется расположением удаленных доминошек, пересекающихся с нижним лучом креста (все эти доминошки обязательно горизонтальные и “смотрят” либо влево, либо вправо от этого луча). Значит, количество таких классов делится на $2^n$ (в том числе, на 4 при $n \geqslant 2$).

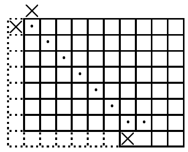
**4.4.** “Алгоритм Евклида”. Теория деталей. Пусть $m > n$. Рассмотрим линию сетки — “ось”, которая отсекает от прямоугольника квадрат $n \times n$. Удалим все доминошки, которые она пересекает. Тогда оставшаяся часть квадрата $n \times n$, очевидно, является деталью. Достаточно разобрать случай, когда эта деталь правильная. В этом случае ось пересекает ровно $n$ доминошек, наша деталь — это прямоугольник $n \times (n - 1)$, а вторая часть — это прямоугольник $(m - n - 1) \times n$, для которого выполнено индукционное предположение.

Мы приведем еще одно решение.

“Алгоритм Евклида – 2”. Квадратные флипы. Индукция. Рассмотрим диагональный ряд клеток, выходящий из угла. По лемме о полудиагонали, достаточно ограничиться изучением разбиений, имеющих отмеченную доминошку.



Рассуждая как и в решении задачи 4.1, не изменяя четности числа разбиений, мы можем убрать все клетки первого столбца, а также все клетки нижней строки, лежащие левее отмеченной доминошки. После этого опять можно применить лемму о полудиагонали.



Продолжая дальше, мы уберем клетки второго столбца и второй строки (лежащие левее найденной доминошки). Действуя таким образом, мы уберем в конце концов из нашего прямоугольника $m \times n$ прямоугольную часть размера $(n+1) \times n$. Осталась часть $m-n-1 \times n$, которая удовлетворяет предположению индукции.

**4.5.** Это легко. Разрежем прямоугольник по средней линии на два квадрата $n \times n$ и уберем те доминошки, которые оказались рассечены. Останутся две одинаковые детали. Если это неправильные детали, то мы автоматически имеем кратное 4 число способов. В случае, когда обе детали правильные (это может быть в единственном случае — когда наш разрез рассекает ровно $n$ доминошек), количество способов — это квадрат нечетного числа — дает остаток 1 по модулю 4.

Аналогично можно доказать, что количество разбиений на доминошки прямоугольника $n \times (2n+2)$ тоже дает остаток 1 при делении на 4.

**4.6.** См. решение следующей задачи.

**4.7.** Разобьем квадрат средними линиями на 4 квадрата $n \times n$ и удалим доминошки, рассекаемые этими линиями. Останется 4 детали. Множество разбиений квадрата $2n \times 2n$, получающихся дальнейшим подразбиением этих деталей на доминошки, назовем *классом.* Достаточно рассматривать случаи, когда хотя бы одна из этих четырех деталей правильная (иначе делимость на 16 количества разбиений в классе очевидна).

Более того, если фигура, образованная рассеченными доминошками, не центрально симметрична и хотя бы две из деталей неправильные, то количество разбиений в классе делится на 4, да и сами классы можно разбить на группы по 4 (при помощи поворотов на 90°, 180°, 270°), что дает в сумме количество разбиений, кратное 16.

Заметим еще, что в любом не центрально симметричном случае количество неправильных деталей — не менее двух (если есть три правильных детали, то четвертая — тоже правильная и разбиение центрально симметрично). А также, что в центрально симметричном разбиении при наличии одной правильной детали остальные детали тоже оказываются правильными.

Поэтому осталось разобрать случай центрально симметричного разбиения, в котором все 4 детали — правильные (и к тому же одинаковые). В каждом таком классе количество разбиений сравнимо с $1 \pmod{16}$, поскольку является точной четвертой степенью. Осталось заметить, что количество таких классов делится на $2^n$ (в том числе, на 16 при $n \geqslant 4$), поскольку каждый такой класс однозначно определяется расположением доминошек, пересекаемых одним из четырех лучей, выходящих из центра.

**4.8.** Диагональную ось симметрии фигуры будем в дальнейшем называть просто осью, говоря об осевой симметрии относительно оси, мы будем просто писать “симметрия”. Рассмотрим шахматную раскраску фигуры и заметим, что на оси находится поровну черных и белых клеток. Пусть $A$ — одна из черных клеток. Возьмем произвольное разбиение. Найдем в нем “минимальное” множество доминошек, содержащее клетку $A$ и при этом симметричное относительно оси. Это множество можно построить следующим образом. Рассмотрим доминошку, содержащую клетку $A_0 = A$. Пусть $A_1$ — вторая клетка этой доминошки, $A_2$ — симметричная клетка. Рассмотрим доминошку, содержащую клетку $A_2$; пусть $A_3$ — вторая клетка этой доминошки, $A_4$ — симметричная ей клетка. Рассмотрим доминошку, содержащую клетку $A_4$ и т. д. Мы будем продолжать этот процесс до тех пор, пока нам попадаются все новые клетки и доминошки. Нетрудно сообразить, что процесс остановится, как только мы в качестве очередной “второй клетки доминошки” получим клетку, лежащую на оси. Заметим, что эта клетка белая (в противном случае построенная цепочка доминошек охватывает область, разбитую на доминошки, но при этом содержащую не поровну черных и белых клеток).

Итак, мы построили минимальное множество доминошек, принадлежащих данному разбиению, симметричное относительно оси и при этом пересекающееся с осью в точности по двум клеткам. Из конструкции очевидно, что если в качестве $A$ взять другую черную клетку оси, то полученное множество не будет пересекаться с построенным ранее. Значит, мы можем построить $n/2$ таких непересекающихся множеств, далее так и будем называть их минимальными. Доминошки, не принадлежащие ни одному из этих множеств, будем называть стабильными.

Заметим теперь, что если взять любое из $n/2$ минимальных множеств, и отразить его симметрично относительно оси, а остальные доминошки разбиения не трогать, то в результате получится новое разбиение на доминошки. Тогда мы можем разбить все множество разбиений на доминошки на блоки по $2^{n/2}$ штук — для каждого разбиения возьмем все его стабильные доминошки, а оставшуюся часть фигуры замостим, пользуясь для каждого из $n/2$ минимальных множеств выбором — отражать его относительно оси или оставить как есть. Вместе с каждым из $2^{n/2}$ вариантов этого выбора мы получим свое разбиение на доминошки — всего $2^{n/2}$ штук.

**4.9.** Это утверждение — применение упражнения 8.01 из книги [2] к случаю клетчатых фигур. Отметим, что диагональные ряды клеток, использованные в решении задач 1.2, 1.6, — это примеры множеств отмеченных клеток.

Рассмотрим граф, вершины которого — это центры клеток, а ребра соединяют центры клеток, имеющих общую сторону. Мы можем считать, что ребро — это потенциально возможное расположение доминошки в замощении нашей фигуры. Благодаря шахматной раскраске этот граф двудольный, причем доли содержат поровну вершин. Рассмотрим его матрицу смежности, т. е. матрицу, строки которой соответствуют вершинам одной доли, а столбцы — вершинам другой доли. Элемент матрицы равен единице, если вершины, соответствующие строке и столбцу, соединены ребром. В противном случае элемент матрицы равен нулю.

Рассмотрим определитель построенной матрицы. Запишем его по определению — как знакопеременную сумму произведений матричных элементов. Заметим, что каждое слагаемое в это сумме, не равное нулю, определяет замощение нашей фигуры доминошками. Действительно, каждое ненулевое слагаемое — это произведение $n$ сомножителей, каждый из которых равен единице. Каждая строка и каждый столбец нашей матрицы содержат по одной единице, входящей в произведение, тем самым определено разбиение вершин нашего графа на пары, где в каждой паре вершины соединены ребром, это и есть замощение фигуры доминошками.

Таким образом, количество разбиений фигуры на доминошки равно по модулю 2 определителю матрицы смежности. Рассмотрим теперь наш определитель по модулю два. Если число разбиений на доминошки четное, то определитель равен нулю, что возможно, только если матрица смежности над полем остатков по модулю 2 вырождена. В этом случае некоторая нетривиальная линейная комбинация над $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ некоторых столбцов этой матрицы (поскольку речь о $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, то это просто сумма) равна нулю. Клетки, соответствующие этим столбцам и есть требуемое множество.

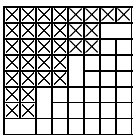
Верно и обратное: если дано множество отмеченных клеток, удовлетворяющее условию, рассмотрим только часть его, состоящую из клеток одной доли. Нетрудно видеть, что сумма соответствующих столбцов (или строк) будет по модулю 2 равна нулю. Значит, матрица вырождена над $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ и ее определитель над $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ равен нулю.

**4.10.** Это утверждение и его доказательство мы взяли в [8]. Докажем сначала утверждение, аналогичное утверждению задачи 1.5 для квадрата.

Лемма. Отметим на диагонали квадрата $2n \times 2n$ клетки через одну и поместим в отмеченные клетки произвольным образом числа 0 и 1. Рассмотрим разбиения квадрата на доминошки, согласованные со сделанной разметкой следующим образом: в них для каждой доминошки, накрывающей клетку с цифрой, вторая клетка доминошки расположена правее или выше, если эта цифра — 0 и левее или ниже — если 1. Тогда для всех расстановок в отмеченных клетках нулей и единиц количество согласованных разбиений на доминошки одно и то же.

Доказательство. Рассмотрим произвольное разбиение на доминошки. Отразим его симметрично относительно диагонали. Дальше аналогично решению задачи 1.5.

Будем пользоваться разметкой из утверждения леммы. Тогда мы можем ограничиться подсчетом разбиений, в которых доминошки, закрывающие отмеченные клетки, закрывают также клетку либо справа, либо снизу от отмеченной, — такие разбиения назовем редуцированными. Вот пример редуцированного разбиения.



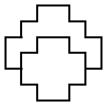
Очевидно, количество редуцированных разбиений на доминошки в $2^n$ раз меньше количества всех разбиений.

Если рассматриваемая диагональ состоит из черных клеток, то область над диагональю содержит белых клеток на $n$ больше, чем черных. Поэтому при дальнейшем разбиении на доминошки все остальные клетки диагонали накрыты доминошками из верхней части. Таким образом, после разбиения на доминошки весь квадрат будет разбит на две части — клетки одной из них помечены крестиками, клетки другой – не помечены. Каждая из этих частей есть в точности фигура $H_n$ из задачи 1.4. И тем самым количество редуцированных разбиений на доминошки всего квадрата равно $(\# H_n)^2$, а количество всех разбиений — $2^n(\# H_n)^2$. Осталось вспомнить, что по утверждению задачи 1.4 число $\# H_n$ нечетно.

**4.11.** Мы взяли это утверждение в [4], там же содержится не очень убедительный намек на доказательство.

**4.12.** Количество разбиений ацтекского диаманта на домино впервые получено в [5] неэлементарными средствами. Мы применяем подход, лишь небольшими деталями отличающийся от элементарного доказательства из [6].

Рассмотрим ацтекский диамант ранга $n + 1$. Удаляя два диагональных ряда клеток, идущих вдоль его правой верхней и левой верхней сторон, мы можем получить из него ацтекский диамант ранга $n$.

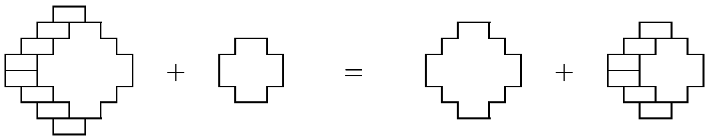


Назовем этот диамант ранга $n$ *нижним*. Аналогично можно получить *верхний*, *левый* и *правый* диаманты. Пересечением этих диамантов является *центральный* диамант ранга $n - 1$.

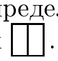
Рассмотрим множество $A$, состоящее из пар независимых разбиений ацтекского диаманта ранга $n$ и его центрального поддиаманта ранга $n - 2$. Рассмотрим множество $B$, которое содержит пары, состоящие из независимых разбиений верхнего и нижнего поддиамантов ацтекского диаманта ранга $n$, а также пары, состоящие из независимых разбиений левого и правого поддиамантов. Утверждение задачи сразу следует из следующей леммы.

Лемма. Существует взаимно однозначное соответствие между множествами $A$ и $B$

Доказательство. Построим отображение из множества $A$ в множество $B$. Возьмем элемент множества $A$, т.е. разбиение ацтекского диаманта ранга $n$ и разбиение его центрального поддиаманта ранга $n - 2$. Рассмотрим сначала случай, когда к левой или правой “вершине” диаманта (для определенности — к левой) прилегает блок разбиения вида . В этом случае все доминошки, прилегающие к левому краю диаманта, расположены горизонтально. Тогда построим следующую пару разбиений левого и правого поддиамантов. Отодвинем в сторону все доминошки, прилегающие к верхнему краю, а самую верхнюю и самую нижнюю из них вообще удалим. У нас останется разбиение правого поддиаманта ранга $n - 1$. А отодвинутый фрагмент объединим с центральным поддиамантом ранга $n-2$, и у нас получится разбиение левого поддиаманта ранга $n - 1$.

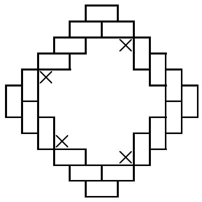


(7)

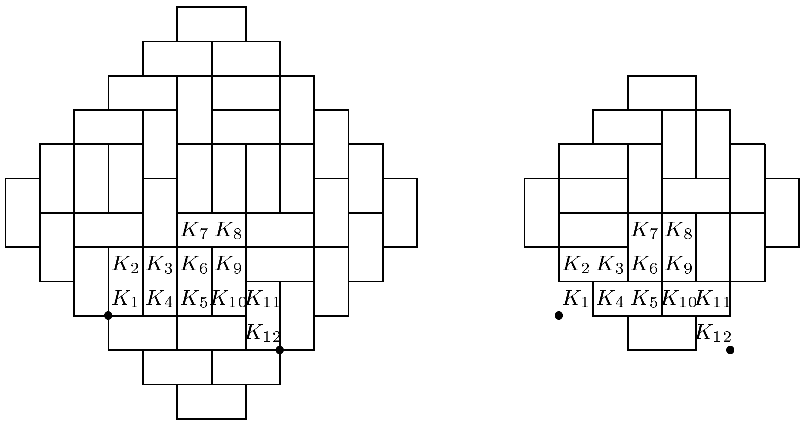
Аналогично определим отображение в случае, когда к верхней или нижней вершине большого диаманта прилегает блок .

В общем случае, который детально описан ниже, отображение устроено так: удалим две доминошки, прилегающие к двум противоположным вершинам большого диаманта (скажем, к левой и правой; при этом выбор между левой–правой и верхней–нижней вершинами зависит от исходных разбиений), наложим диамант и его центральный поддиамант друг на друга и разрежем оба диаманта на две части (условно говоря, верхнюю и нижнюю) таким образом, чтобы разрез проходил только по сторонам доминошек в обоих разбиениях, после чего объединим нижнюю часть большого диаманта с верхней частью маленького (получится разбиение нижнего поддиаманта) и верхнюю часть большого диаманта с нижней частью маленького (получится разбиение верхнего поддиаманта).

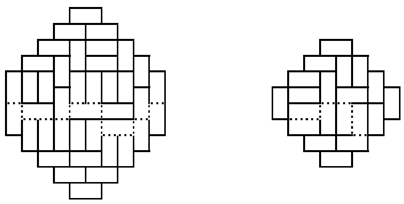
Перейдем к деталям. Допустим, что разбиение большого диаманта не относится к уже разобранному типу, т.е. сверху и снизу расположены горизонтальные, а слева и справа — вертикальные доминошки. Нетрудно видеть, что в этом случае на каждой стороне диаманта можно указать *разделяющую* клетку, такую что по одну сторону от нее доминошки ориентированы горизонтально, а по другую сторону — вертикально. На рисунке эти клетки помечены крестиками.



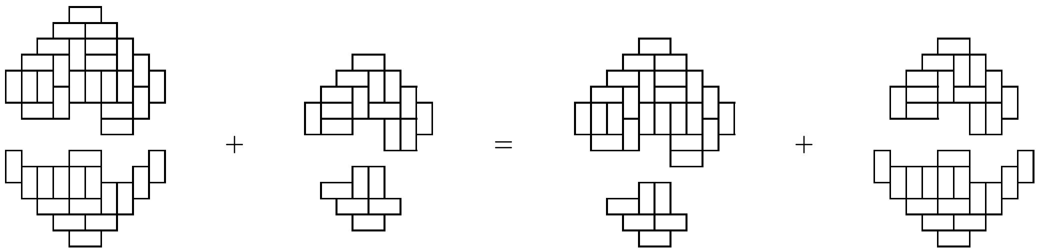
Пусть $K_1$ — любая из разделяющих клеток. Рассмотрим доминошку, накрывающую $K_1$, в разбиении большого диаманта (будем далее называть его первым разбиением, а разбиение центрального поддиаманта – вторым). Вторую клетку этой доминошки обозначим $K_2$. Рассмотрим доминошку второго разбиения, накрывающую $K_2$. Другую ее клетку обозначим ее $K_3$. И т. д. Эта цепочка клеток закончится, когда в ней встретится еще одна разделяющая клетка, скажем, $K_m$. Клетки $K_1$ и $K_m$ не могут находиться на противоположных сторонах диаманта, что легко видеть, скажем, из соображений шахматной раскраски. Таким образом, мы построили цепочку клеток, соединяющую разделяющие клетки на двух соседних сторонах большого диаманта, пусть для определенности это левая и правая нижние стороны. Тогда очевидно, что верхняя граница построенного множества клеток есть ломаная, которая не рассекает ни одной доминошки в обоих разбиениях и при этом делит малый диамант на две части, назовем эту ломаную разрезом малого диаманта.




Уберем из большого диаманта самую левую и самую правую доминошки. Дополним разрез малого диаманта подходящими отрезками границы малого диаманта, чтобы получился разрез большого диаманта.



Заметим, что одновременно с этим разрезом, идущим как бы слева направо, не может существовать разреза большого диаманта, идущего сверху вниз, поскольку такой разрез пересекал бы построенную цепочку клеток $K_i$ и, следовательно, разрезал бы доминошку в одном из разбиений. С другой стороны, разрезов, идущих слева направо, может быть несколько. Для однозначности конструкции выберем среди них, например, наиболее низкий. Теперь мы можем разрезать оба диаманта и поменять отрезанные нижние части. Мы получим разбиения верхнего и нижнего диамантов.



Итак, мы описали отображение из множества $A$ в множество $B$. Очевидно, что это отображение сопоставляет разным элементам множества $A$ разные элементы множества $B$. Оно является взаимно однозначным, поскольку нетрудно сообразить, как устроено обратное отображение. Оно устроено так. Для произвольной пары разбиений, скажем, левого и правого поддиамантов рассмотрим малый диамант, являющийся их пересечением.

Если к нижней вершине нижнего поддиаманта прилегает блок $\square\!\square$, мы имеем дело со случаем, обратным к случаю (7). Если же такого блока нет, начнем строить цепочку клеток, аналогичную цепочке $K_i$. Первым разбиением будем называть разбиение нижнего диаманта, вторым — верхнего. Рассмотрим разделяющие клетки, прилегающие к нижним сторонам нижнего диаманта (если все доминошки, прилегающие к нижнему краю ориентированы горизонтально, разделяющими назначим нижние клетки в самом левом и самом правом ряду), пусть $K_1$ — разделяющая клетка на левой нижней стороне, и пусть она будет черного цвета (при шахматной раскраске). Вторую клетку доминошки первого разбиения, накрывающей $K_1$, обозначим $K_2$ Рассмотрим доминошку второго разбиения, накрывающую $K_2$. Вторую ее клетку обозначим ее $K_3$ и т. д. Эта цепочка клеток закончится, когда на очередном шаге мы окажемся вне пересечения первого и второго диамантов, причем последняя клетка в этой цепочке будет “второй” клеткой доминошки первого или второго разбиения. Если это доминошка второго разбиения, то мы вышли и оказались на черной клетке. Значит, мы оказались на противоположной стороне объединения диамантов, чего не может быть, поскольку область снизу от построенной цепочки содержит нечетное число клеток, хотя при этом разбита на доминошки первым способом. Следовательно, это доминошка первого разбиения и приведет она нас на разделяющую клетку правой нижней стороны, что, собственно, и требуется. Дальше режем, переставляем и готово. Лемма доказана.

**4.13.** О т в е т: $2^{n(n+1)/2}$. Конструкция задачи 3.5 позволяет взаимно однозначно сопоставить каждому набору маршрутов разбиение ацтекского диаманта на домино.

## Литература


[1] *Берлов С. Л., Иванов С. В., Кохась К. П.* Петербургские математические олимпиады. СПб: Лань, 2003.

[2] *Ловас Л., Пламмер М.* Прикладные задачи теории графов. М.: Мир, 1998.

[3] *Фомин Д. В.* Санкт-Петербургские математические олимпиады. СПб.: Политехника, 1994.

[4] *Bao J.* On the number of domino tilings of the rectangular grid, the holey square and related problems.

[5] *Elkies N., Kuperbeg G., Larsen M., Propp J.* Alternating sign matrices and domino tilings. J. of Comb. 1992. V. 1. P. 111-132.

[6] *Kuo E.* Application of grphical condensation for enumerating matchings // Teoret. Comp. Sci. Vol. 319. 2004. P. 29–57. http://www.arxiv.org/math.CO/0304090.

[7] http://www.stetson.edu/˜efriedma/mathmagic/0500.html

[8] *Pachter L.* Combinatorial approaches and conjectures for 2-disibility problems concerning domino tilings of polyminoes.

[9] *Propp J.* Dimers and dominoes.

[10] *Propp J.* Frieze-ing and condensation // http://www.math.wisc.edu/˜ propp/bilinear/domino

[11] *Propp J., Stanley R.* Domino tilings with barriers. J. of Comb. Theory. Ser. A. ...???

[12] *Strehl V.* Counting domino tilings of rectangles via Resultants. Advances in Appl. Math. 2001. Vol. 27. No. 2–3. P. 597–626.