**НОВЫЕ СПОСОБЫ ПЛЕТЕНИЯ КОРЗИНОК**

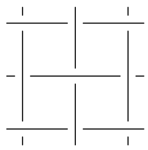
**задача предложена И. Богдановым, А. Каибхановым,**
**Ю. Кудряшовым, А. Скопенковым, А. Сосинским и Г. Челноковым**

*Denn das Leben ist keine Rechnung und keine*
*mathematische Figur, sondern ein Wunder.*
*H. Hesse, Kurgast.*

# Определения

Назовем *плетёнкой* $m \times n$ матрицу $M$ размера $m \times n$ из символов «|» и «−» (или из плюс и минус единиц), дополненную набором из $m+n-2$ положительных чисел $a_1, \dots, a_{m-1}, b_1, \dots, b_{n-1}$. Матрица $M$ называется *матрицей плетёнки*, а числа $a_1, \dots, a_{m-1}, b_1, \dots, b_{n-1}$ называются *расстояниями между строками и столбцами.* Нарисуем на плоскости $m$ параллельных прямых $k_1, \dots, k_m$ на расстояниях $a_1, \dots, a_{m-1}$ друг от друга и $n$ перпендикулярных им прямых $l_1, \dots, l_n$ (параллельных между собой) на расстояниях $b_1, \dots, b_{n-1}$ друг от друга. Около точки пересечения прямых $k_i$ и $l_j$ сотрем часть прямой $k_i$, если $M_{ij} = |$, и часть прямой $l_j$, если $M_{ij} = -$.

Например, матрице

$$A := \begin{pmatrix} - & | & - \\ | & - & | \\ - & | & - \end{pmatrix}$$ отвечает рисунок 

В этом тексте рассматриваются только матрицы из символов «|» и «−», если не оговорено противное.

Плетёнка называется *реализуемой*, если существует семейство прямых $\widetilde{k}_1, \dots, \widetilde{k}_m, \widetilde{l}_1, \dots, \widetilde{l}_m$ в трёхмерном пространстве, которые при проектировании на некоторую плоскость дают рисунок, построенный по данной плетёнке описанным выше способом. Плетёнка называется *нереализуемой*, если она не является реализуемой.

Если условие задачи является формулировкой утверждения, то подразумевается, что это утверждение нужно доказать.

# Вводные задачи

**Задача 1.** (a) Любая плетёнка $2 \times n$ реализуема (если не получается, см. задачу 3 (a)).

(b) Любая плетёнка с матрицей $A$ нереализуема (если не получается, см. задачу 4 (a)).

**Задача 2.** (a) Реализуемость плетёнки не меняется при одновременном изменении всех её элементов на противоположные (| на − и обратно) и оставлении расстояний без изменений. Такое преобразование называется *зеркальной симметрией* плетёнки и обозначается через $S\colon W \mapsto SW$, где $W$ — плетёнка.

(b) Реализуемость плетёнки не меняется при осевой симметрии относительно ее диагонали (при котором столбцы становятся строками и обратно) и замене набора $a_1, \dots, a_{m-1}, b_1, \dots, b_{n-1}$ на набор $b_1, \dots, b_{n-1}, a_1, \dots, a_{m-1}$. Такое преобразование называется *транспонированием* плетёнки и обозначается через $T\colon W \mapsto TW$, где $W$ — плетёнка.

(c) Дайте определение *симметрий плетёнки относительно горизонтальных и вертикальных осей* и докажите, что при них не изменяется реализуемость.

(d) Реализуемость плетёнки не меняется при одновременном изменении всех чисел $a_1, \dots, a_{m-1}$ в некоторое число раз.

**Задача 3.** Строка (или столбец) в матрице плетёнки называется *монотонной*, если в ней (в нем) сначала идут только |, а потом только −, или наоборот. В частности, если в строке только | (или только −), то эта строка монотонна.

(a) Реализуемость плетёнки не меняется при отбрасывании монотонной прямой и соответствующем изменении расстояний.

(b) Немонотонная строка длины 3 — это либо $(| - |)$, либо $(-|-)$.

(c) Среди матриц $3 \times 3$ монотонных строк и столбцов не содержат только $A$ и $SA$.

(d) Реализуемость *наследственна* (то есть подплетёнка реализуемой плетёнки реализуема).

(e) Плетёнка $3 \times n$ реализуема тогда и только тогда, когда её матрица не содержит миноров $A$ или $SA$.

**Задача 4 (Лемма о вращении прямых.).** Назовем *сингулярной плетёнкой* $m \times n$ матрицу $M$ размера $m \times n$ из символов «|», «$-$» и «$+$» (или из плюс и минус единиц и нулей), дополненную набором $m+n-2$ положительных чисел $a_1, \dots, a_{m-1}, b_1, \dots, b_{n-1}$. Нарисуем на плоскости прямые $k_i$ и $l_j$ аналогично предыдущему. Около точки пересечения прямых $k_i$ и $l_j$ сотрем часть прямой $k_i$, если $M_{ij} = |$, и часть прямой $l_j$, если $M_{ij} = -$ (и оставим точку пересечения, если $M_{ij} = +$). Реализуемость сингулярных плетёнок определяется аналогично предыдущему.

(a) Реализуемость сингулярной плетёнки $3 \times n$ не меняется при замене строки $(|-|)$ на $(+-+)$ и строки $(-|-)$ на $(+|+)$.

(b) Реализуемость плетёнки $4 \times n$ не меняется при замене строк

$$a = (--|-),\ b = (-|--),\ c = (-||-),\ d = (-|-|) \quad \text{на} \quad (--++),\ (++--),\ (+||+),\ (-++|).$$

(c) Сформулируйте и докажите общее свойство инвариантности реализуемости относительно «вращения прямых».

(d) Если плетёнка реализуема, то для любых двух параллельных прямых соответствующего ей рисунка реализацию можно выбрать такой, чтобы прообразы этих прямых в пространстве были также параллельны (т. е. лежали в одной плоскости). (Результатом этой задачи разрешается пользоваться в дальнейшем без доказательства.)

**Задача 5.** В этой «физической» задаче мы не приводим аккуратной формулировки условия и не требуем аккуратного доказательства. Важно не столько решить данную задачу, сколько использовать её для проведения эксперимента путем построения моделей и получения ответа в других задачах (но не для их строгого доказательства!).

(a) Пусть мы имеем достаточно много длинных тонких упругих прутьев (или полосок). Составим из них (слегка изгибая прутья) модель, изображающую данную плетёнку. Предположим, что получилась жесткая конструкция, то есть фигуру можно подвесить за одну точку так, чтобы она не распалась. Тогда соответствующая плетёнка не реализуема.

(b) Плетёнка реализуема тогда и только тогда, когда построенная в предыдущем пункте конструкция не содержит жестких подконструкций.

**Задача 6.** (a) Все немонотонные строки длины 4 — это $a, b, c, d, Sa, Sb, Sc, Sd$ (см. задачу 4 (b)). Таким образом, матрицу $n \times 4$ без монотонных строк можно задавать словом длины $n$ из этих восьми букв.

(b) Какие слова длины 3 из этих букв «запрещает» условие отсутствия миноров $A$ и $SA$?

(c) Какие слова длины $n$ из этих букв «запрещает» условие отсутствия монотонных столбцов?

**Задача 7.** Существуют две разные плетёнки с одинаковой матрицей, одна из которых реализуема, а другая нет?

**Задача 8.** (a) Матрица

$$B = \begin{pmatrix} | & - & - & | \\ - & - & | & - \\ - & | & - & | \\ | & - & | & | \end{pmatrix}$$

не содержит ни монотонных прямых, ни миноров $A, SA$.

(b) Любая плетёнка с матрицей $B$ не реализуема.

**Задача 9.** Найдите алгоритм распознавания реализуемости плетёнок.

*Замечание.* Этот алгоритм можно использовать для компьютерных экспериментов по распознаванию реализуемости плетёнок (например, построенных при помощи задачи 6). При этом можно использовать имеющиеся на компьютерах готовые программы (например, распознавания разрешимости системы линейных неравенств).