НОВЫЕ СПОСОБЫ ПЛЕТЕНИЯ КОРЗИНОК

задача предложена И. Богдановым, А. Каибхановым, Ю. Кудряшовым, А. Скопенковым, А. Сосинским и Г. Челноковым

Denn das Leben ist keine Rechnung und keine mathematische Figur, sondern ein Wunder.
H. Hesse, Kurgast.

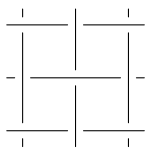
Определения

Назовем *плетёнкой* $m \times n$ матрицу M размера $m \times n$ из символов «|» и «−» (или из плюс и минус единиц), дополненную набором из $m+n-2$ положительных чисел $a_1, \dots, a_{m-1}, b_1, \dots, b_{n-1}$. Матрица M называется *матрицей плетёнки*, а числа $a_1, \dots, a_{m-1}, b_1, \dots, b_{n-1}$ называются *расстояниями между строками и столбцами*. Нарисуем на плоскости m параллельных прямых $k_1, \dots, k_m$ на расстояниях $a_1, \dots, a_{m-1}$ друг от друга и n перпендикулярных им прямых $l_1, \dots, l_n$ (параллельных между собой) на расстояниях $b_1, \dots, b_{n-1}$ друг от друга. Около точки пересечения прямых k_i и l_j сотрем часть прямой k_i, если $M_{ij} = |$, и часть прямой l_j, если $M_{ij} = -$.

Например, матрице

$$A := \begin{pmatrix} - & | & - \\ | & - & | \\ - & | & - \end{pmatrix}$$

отвечает рисунок



В этом тексте рассматриваются только матрицы из символов «|» и «−», если не оговорено противное.

Плетёнка называется *реализуемой*, если существует семейство прямых $\widetilde{k}_1, \dots, \widetilde{k}_m$, $\widetilde{l}_1, \dots, \widetilde{l}_m$ в трёхмерном пространстве, которые при проектировании на некоторую плоскость дают рисунок, построенный по данной плетёнке описанным выше способом. Плетёнка называется *нереализуемой*, если она не является реализуемой.

Если условие задачи является формулировкой утверждения, то подразумевается, что это утверждение нужно доказать.

Вводные задачи

Задача 1. (a) Любая плетёнка $2 \times n$ реализуема (если не получается, см. задачу 3 (a)).

(b) Любая плетёнка с матрицей A нереализуема (если не получается, см. задачу 4 (a)).

Задача 2. (a) Реализуемость плетёнки не меняется при одновременном изменении всех её элементов на противоположные (| на − и обратно) и оставлении расстояний без изменений. Такое преобразование называется *зеркальной симметрией* плетёнки и обозначается через $S\colon W \mapsto SW$, где W — плетёнка.

(b) Реализуемость плетёнки не меняется при осевой симметрии относительно ее диагонали (при котором столбцы становятся строками и обратно) и замене набора $a_1, \dots, a_{m-1}, b_1, \dots, b_{n-1}$ на набор $b_1, \dots, b_{n-1}, a_1, \dots, a_{m-1}$. Такое преобразование называется *транспонированием* плетёнки и обозначается через $T\colon W \mapsto TW$, где W — плетёнка.

(c) Дайте определение *симметрий плетёнки относительно горизонтальных и вертикальных осей* и докажите, что при них не изменяется реализуемость.

(d) Реализуемость плетёнки не меняется при одновременном изменении всех чисел $a_1, \dots, a_{m-1}$ в некоторое число раз.

Задача 3. Строка (или столбец) в матрице плетёнки называется *монотонной*, если в ней (в нем) сначала идут только |, а потом только −, или наоборот. В частности, если в строке только | (или только −), то эта строка монотонна.

(a) Реализуемость плетёнки не меняется при отбрасывании монотонной прямой и соответствующем изменении расстояний.

(b) Немонотонная строка длины 3 — это либо $(|-|)$, либо $(-|-)$.

(c) Среди матриц 3×3 монотонных строк и столбцов не содержат только A и SA.

(d) Реализуемость *наследственна* (то есть подплетёнка реализуемой плетёнки реализуема).

(e) Плетёнка $3 \times n$ реализуема тогда и только тогда, когда её матрица не содержит миноров A или SA.

Задача 4 (Лемма о вращении прямых.). Назовем *сингулярной плетёнкой* $m \times n$ матрицу M размера $m \times n$ из символов «|», «−» и «+» (или из плюс и минус единиц и нулей), дополненную набором $m+n-2$ положительных чисел $a_1, \dots, a_{m-1}, b_1, \dots, b_{n-1}$. Нарисуем на плоскости прямые k_i и l_j аналогично предыдущему. Около

точки пересечения прямых k_i и l_j сотрем часть прямой k_i, если $M_{ij} = |$, и часть прямой l_j, если $M_{ij} = -$ (и оставим точку пересечения, если $M_{ij} = +$). Реализуемость сингулярных плетёнок определяется аналогично предыдущему.

(a) Реализуемость сингулярной плетёнки $3 \times n$ не меняется при замене строки $(|-|)$ на $(+-+)$ и строки $(-|-)$ на $(+|+)$.

(b) Реализуемость плетёнки $4 \times n$ не меняется при замене строк

$$a = (--|-),\ b = (-|--),\ c = (-||-),\ d = (-|-|) \quad \text{на} \quad (--++),\ (++--),\ (+||+),\ (-++|).$$

(c) Сформулируйте и докажите общее свойство инвариантности реализуемости относительно «вращения прямых».

(d) Если плетёнка реализуема, то для любых двух параллельных прямых соответствующего ей рисунка реализацию можно выбрать такой, чтобы прообразы этих прямых в пространстве были также параллельны (т. е. лежали в одной плоскости). (Результатом этой задачи разрешается пользоваться в дальнейшем без доказательства.)

Задача 5. В этой «физической» задаче мы не приводим аккуратной формулировки условия и не требуем аккуратного доказательства. Важно не столько решить данную задачу, сколько использовать её для проведения эксперимента путем построения моделей и получения ответа в других задачах (но не для их строгого доказательства!).

(a) Пусть мы имеем достаточно много длинных тонких упругих прутьев (или полосок). Составим из них (слегка изгибая прутья) модель, изображающую данную плетёнку. Предположим, что получилась жесткая конструкция, то есть фигуру можно подвесить за одну точку так, чтобы она не распалась. Тогда соответствующая плетёнка не реализуема.

(b) Плетёнка реализуема тогда и только тогда, когда построенная в предыдущем пункте конструкция не содержит жестких подконструкций.

Задача 6. (a) Все немонотонные строки длины 4 — это $a, b, c, d, Sa, Sb, Sc, Sd$ (см. задачу 4 (b)). Таким образом, матрицу $n \times 4$ без монотонных строк можно задавать словом длины n из этих восьми букв.

(b) Какие слова длины 3 из этих букв «запрещает» условие отсутствия миноров A и SA?

(c) Какие слова длины n из этих букв «запрещает» условие отсутствия монотонных столбцов?

Задача 7. Существуют две разные плетёнки с одинаковой матрицей, одна из которых реализуема, а другая нет?

Задача 8. (a) Матрица

$$B = \begin{pmatrix} | & - & - & | \\ - & - & | & - \\ - & | & - & | \\ | & - & | & | \end{pmatrix}$$

не содержит ни монотонных прямых, ни миноров A, SA.

(b) Любая плетёнка с матрицей B не реализуема.

Задача 9. Найдите алгоритм распознавания реализуемости плетёнок.

Замечание. Этот алгоритм можно использовать для компьютерных экспериментов по распознаванию реализуемости плетёнок (например, построенных при помощи задачи 6). При этом можно использовать имеющиеся на компьютерах готовые программы (например, распознавания разрешимости системы линейных неравенств).

Задачи, предложенные после промежуточного финиша

Задача 10 (Седлообразное преобразование). (a) Преобразование $(x, y, z) \mapsto (x, y, z + xy)$ переводит прямые, перпендикулярные оси Ox или оси Oy, в прямые. (Эту задачу можно использовать для решения задачи 4 (d).)

(b) Во что переводит седлообразное преобразование плоскости $z = const$?

Назовём матрицу *реализуемой*, если её можно так дополнить набором расстояний, что получится реализуемая плетёнка.

Задача 11. Предположим, что в плетёнке отмечены две параллельные прямые k и k', а также выбраны ориентации на всех остальных прямых. Разрешается двигаться по прямым k и k' в произвольном направлении, по остальным прямым в направлении их ориентации, а также переходить с одной прямой на другую, если первая прямая проходит в этой точке «выше» второй или «пересекает» её. Назовем плетёнку *ацикличной*, если для любой пары параллельных прямых k и k' существует выбор ориентаций на оставшихся прямых, для которого нельзя пройти по замкнутому маршруту и вернуться в исходную точку.

(a) Плетёнки с одинаковой матрицей ациклична или нет одновременно.

(b) Любая реализуемая матрица ациклична. (Это можно использовать для доказательства нереализуемости матриц A и B.)

(c)* Верно ли, что любая ацикличная матрица реализуема?

(d) В определении ацикличности вместо пары параллельных прямых k и k' отметим *перпендикулярные прямые k и l*. Решите аналогичные задачи для такого определения ацикличности.

(e) В определении ацикличности вместо пары параллельных прямых k и k' отметим *параллельные прямые k и k' и перпендикулярную им прямую l*. Решите аналогичные задачи для такого определения ацикличности.

Задача 12 (Нереализуемость матрицы B'). (a) Реализуемость плетёнки с матрицей

$$B' = \begin{pmatrix} | & - & | & | \\ - & - & | & - \\ | & | & - & | \\ | & - & | & | \end{pmatrix}$$

равносильна реализуемости плетёнки с такими же расстояниями и матрицей

$$\begin{pmatrix} + & - & | & + \\ + & - & | & + \\ | & + & + & | \\ | & + & + & | \end{pmatrix}$$

(b) Если число a_1 мало́ по сравнению с другими a_i, b_j, то данная плетёнка реализуема.

(c) Если $a_2 = b_2 \ll a_1 = a_3 = b_1 = b_3$, то данная плетёнка не реализуема.

Задача 13 (Проективные преобразования матриц). (a) Реализуемость матрицы не меняется при перенесении первого столбца на последнее место с одновременном изменении всех его элементов на противоположные. Реализуемость матрицы не меняется при аналогичном преобразовании строк. Такие преобразования X и Y называются *проективными преобразованиями матриц*. (Результатом этой задачи разрешается пользоваться в дальнейшем без доказательства.)

(b) $XA = YA = SA$.

(c) Монотонность ряда матрицы не меняется при проективных преобразованиях.

(d) $S = X^m = Y^n$.

(e) $XY = YX$.

Задача 14. (a) Все буквы $a, \ldots, Sd$ из задачи 6 (a) получаются из одной проективными преобразованиями. Таким образом, матрицу $4 \times n$ без монотонных столбцов можно задавать словом длины n из цифр $1, 2, \ldots, 8$.

(b) Любая матрица 4×4 без монотонных прямых и миноров A, SA получается из B или из B' композицией зеркальных симметрий, транспонирований, осевых симметрий и проективных преобразований.

(c) Какие слова «запрещает» условие отсутствия миноров A, SA, B, X^pY^qB?

(d) Какие слова остаются?

(e) Какие из них реализуемы?

Задача 15. (a) Существует ли бесконечно много нереализуемых матриц, все подматрицы которых реализуемы?

(b) Существует ли бескнонечно много реализуемых матриц, не содержащих монотонных строк и столбцов?

(c)* Существует ли бесконечное множество реализуемых матриц, ни одна из которых не содержит ни монотонного ряда, ни других подматриц из нашего семейства?

Задача 16. (a) Найти число нереализуемых матриц 4×4.

(b) Найти все матрицы 4×5 без монотонных строк и столбцов и без нереализуемых подматриц с точностью до симметрий, транспонирования и проективных преобразований (можно использовать компьютер).

Задача 17. (a) Матрица называется *сильно реализуемой*, если при любом дополнении её набором расстояний оплучается реализуемая плетёнка. Решите аналоги предыдущих задач для сильной реализуемости матриц.

Задача 18. Обозначим через `W` множество всех матриц размера $m \times n$ с точностью до всех симметрий, транспонирования и проективных преобразований.

(a)* Найдите (или оцените) число элементов в `W`.

(b)* Найдите (или оцените) отношение числа реализуемых элементов `W` к числу нереализуемых.

(c)* Найдите (или оцените) отношение числа сильно реализуемых элементов в `W` к числу остальных элементов.

Авторы считают, что все предложенные задачи не стоит пытаться решить за время конференции. Постарайтесь решить во время конференции наиболее интересные для вас, а к остальным вернуться после.

Решения и указания к задачам до промежуточного финиша

Задача 1. (a) Поскольку любой столбец матрицы $2 \times n$ монотонен, задача следует из утверждения о выбрасывании монотонной прямой (см. задачу 3 (a)).

(b) Пусть некоторая плетёнка с матрицей A реализуема. Преобразуем матрицу A, используя вращения прямых.

$$\begin{pmatrix} - & | & - \\ | & - & | \\ - & | & - \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} + & | & + \\ | & - & | \\ + & | & + \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} + & + & + \\ + & - & + \\ + & + & + \end{pmatrix}.$$

По лемме о вращении прямых (см. 4 (a)), получающиеся при этом матрицы также должны быть реализуемы. Рассмотрим конфигурацию прямых в пространстве, реализующую последнюю матрицу. Пусть $\widetilde{A}_{ij}$ — точка пересечения прямых $\widetilde{k}_i$ и $\widetilde{l}_j$ (для $(i,j) \neq (2,2)$). Рассмотрим тетраэдр $\widetilde{A}_{11}\widetilde{A}_{13}\widetilde{A}_{31}\widetilde{A}_{33}$. Прямые $\widetilde{k}_2$ и $\widetilde{l}_2$ делят его противоположные рёбра в равных отношениях. Следовательно, они пересекаются, что противоречит реализуемости рассматриваемой матрицы. Полученное противоречие доказывает, что любая плетёнка с матрицей A не реализуема. □

Задача 2. (a) Пусть набор прямых $\widetilde{k}_i$, $\widetilde{l}_j$ реализует матрицу U. Тогда набор прямых, симметричных прямым $\widetilde{k}_i$, $\widetilde{l}_j$ относительно плоскости проекции Oxy, реализует матрицу SU. Пункты (b) и (c) решаются аналогично.

(d) Выберем систему координат в пространстве так, чтобы ось Ox была параллельна горизонтальным прямым рисунка, ось Oy — вертикальным, а ось Oz была направлена вверх. Пусть $r_1, \ldots, r_{m+n}$ — набор прямых, реализующий некоторую плетёнку, $r_i = \{(x_i^{(0)} + x_i^{(1)}t, y_i^{(0)} + y_i^{(1)}t, z_i^{(0)} + z_i^{(1)}t)\}$. Тогда набор прямых $r'_i = \{(x_i^{(0)} + x_i^{(1)}t, py_i^{(0)} + py_i^{(1)}t, z_i^{(0)} + z_i^{(1)}t)\}$ реализует плетёнку, получающуюся из исходной умножением всех чисел $a_1, \ldots, a_{m-1}$ на p. □

Задача 3. (a) Пусть P — плетёнка с монотонной прямой, P' — плетёнка, получающаяся из неё при выкидывании этой прямой. Очевидно, что если P реализуема, то P' реализуема. Докажем обратное. Предположим, что P' реализуема. Рассмотрим соответствующее расположение прямых в пространстве. На монотонной прямой плетёнки P (лежащей в горизонтальной плоскости) отметим точку, с одной стороны от которой эта прямая проходит «выше» остальных прямых плетёнки P, а с другой — «ниже». Проведем через эту точку вертикальную прямую и немного наклоним её. Получим расположение прямых, дающее в проекции на горизонтальную плоскость плетёнку P.

(b) Достаточно, например, перебрать все ряды длины три.

(c) Каждая из строк матрицы, не содержащей монотонных рядов, должна иметь вид $(|-|)$ либо $(-|-)$. Если средняя строка совпадает с одной из крайних, то все столбцы монотонны. Следовательно, рассматриваемая матрица — это либо A, либо SA.

(d) Для реализации подплетёнки достаточно взять часть набора прямых, реализующего плетёнку.

(e) Рассмотрим плетёнку W с матрицей $3 \times n$. В силу пункта (a) все монотонные столбцы можно исключить из рассмотрения. В результате останутся только столбцы видов $\begin{pmatrix} | \\ - \\ | \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} - \\ | \\ - \end{pmatrix}$. Если плетёнка W нереализуема, то в ней есть немонотонная строка. Следовательно, есть три столбца, в которых виды чередуются. Эти столбцы и образуют искомый минор A или минор SA. Если же матрица содержит минор одного из этих типов, то плетёнка X нереализума в силу нереализуемости соответствующей подплетёнки с матрицей A и наследственности свойства реализуемости. □

Задача 4. (a) В силу зеркальной симметрии достаточно доказать первую часть утверждения. Докажем, что из реализуемости плетёнки с j-й строкой $(|-|)$ следует реализуемость плетёнки, в которой j-я строка заменена на строку $(+-+)$. Пусть $\widetilde{B}$ — точка на прямой $\widetilde{k}_j$, проецирующаяся в точку B. Будем вращать прямую $\widetilde{k}_j$ относительно точки $\widetilde{B}$, пока она не пересечёт прямую $\widetilde{l}_1$ в точке $\widetilde{A}_{1j}$. После этого будем вращать прямую $\widetilde{k}_j$ относительно $\widetilde{A}_{1j}$ пока она не пересечёт прямую $\widetilde{l}_3$. В результате получим набор прямых, реализующий плетёнку с рядом $(+-+)$.

(b) Решение задачи аналогично предыдущему.

(d) Используйте седловидное преобразование. □

Задача 7. Эта задача следует из задачи 12. □

Задача 8. (a) Задача решается прямой проверкой. □

Задача 9. Каждая прямая реализующего набора задаётся z-координатой какой–нибудь фиксированной точки и тангенсом угла наклона к плоскости Oxy. Заметим, что в этих переменных условие реализуемости плетёнки есть условие разрешимости системы линейных уравнений и неравенств (по одному на каждую точку пересечения прямых плетёнки). Следовательно, для выяснения реализуемости плетёнки достаточно выяснить, имеет ли данная система хотя бы одно решение. Алгоритм распознавания разрешимости системы линейных уравнений и неравенств можно найти, например, в [Sol].

□