НОВЫЕ СПОСОБЫ ПЛЕТЕНИЯ КОРЗИНОК

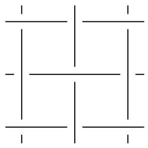
задача предложена И. Богдановым, А. Каибхановым,
Ю. Кудряшовым, А. Скопенковым, А. Сосинским и Г. Челноковым

Denn das Leben ist keine Rechnung und keine
mathematische Figur, sondern ein Wunder.
H. Hesse, Kurgast.

Определения

Назовем *плетёнкой* $m \times n$ матрицу M размера $m \times n$ из символов «|» и «$-$» (или из плюс и минус единиц), дополненную набором из $m+n-2$ положительных чисел $a_1, \dots, a_{m-1}, b_1, \dots, b_{n-1}$. Матрица M называется *матрицей плетёнки*, а числа $a_1, \dots, a_{m-1}, b_1, \dots, b_{n-1}$ называются *расстояниями между строками и столбцами.* Нарисуем на плоскости m параллельных прямых $k_1, \dots, k_m$ на расстояниях $a_1, \dots, a_{m-1}$ друг от друга и n перпендикулярных им прямых $l_1, \dots, l_n$ (параллельных между собой) на расстояниях $b_1, \dots, b_{n-1}$ друг от друга. Около точки пересечения прямых k_i и l_j сотрем часть прямой k_i, если $M_{ij} = |$, и часть прямой l_j, если $M_{ij} = -$.

Например, матрице

$$A := \begin{pmatrix} - & | & - \\ | & - & | \\ - & | & - \end{pmatrix}$$ отвечает рисунок 

В этом тексте рассматриваются только матрицы из символов «|» и «$-$», если не оговорено противное.

Плетёнка называется *реализуемой*, если существует семейство прямых $\widetilde{k}_1, \dots, \widetilde{k}_m$, $\widetilde{l}_1, \dots, \widetilde{l}_m$ в трёхмерном пространстве, которые при проектировании на некоторую плоскость дают рисунок, построенный по данной плетёнке описанным выше способом. Плетёнка называется *нереализуемой*, если она не является реализуемой.

Если условие задачи является формулировкой утверждения, то подразумевается, что это утверждение нужно доказать.

Вводные задачи

Задача 1. (a) Любая плетёнка $2 \times n$ реализуема (если не получается, см. задачу 3 (a)).

(b) Любая плетёнка с матрицей A нереализуема (если не получается, см. задачу 4 (a)).

Задача 2. (a) Реализуемость плетёнки не меняется при одновременном изменении всех её элементов на противоположные (| на $-$ и обратно) и оставлении расстояний без изменений. Такое преобразование называется *зеркальной симметрией* плетёнки и обозначается через $S\colon W \mapsto SW$, где W — плетёнка.

(b) Реализуемость плетёнки не меняется при осевой симметрии относительно ее диагонали (при котором столбцы становятся строками и обратно) и замене набора $a_1, \dots, a_{m-1}, b_1, \dots, b_{n-1}$ на набор $b_1, \dots, b_{n-1}, a_1, \dots, a_{m-1}$. Такое преобразование называется *транспонированием* плетёнки и обозначается через $T\colon W \mapsto TW$, где W — плетёнка.

(c) Дайте определение *симметрий плетёнки относительно горизонтальных и вертикальных осей* и докажите, что при них не изменяется реализуемость.

(d) Реализуемость плетёнки не меняется при одновременном изменении всех чисел $a_1, \dots, a_{m-1}$ в некоторое число раз.

Задача 3. Строка (или столбец) в матрице плетёнки называется *монотонной*, если в ней (в нем) сначала идут только |, а потом только $-$, или наоборот. В частности, если в строке только | (или только $-$), то эта строка монотонна.

(a) Реализуемость плетёнки не меняется при отбрасывании монотонной прямой и соответствующем изменении расстояний.

(b) Немонотонная строка длины 3 — это либо $(| - |)$, либо $(-|-)$.

(c) Среди матриц 3×3 монотонных строк и столбцов не содержат только A и SA.

(d) Реализуемость *наследственна* (то есть подплетёнка реализуемой плетёнки реализуема).

(e) Плетёнка $3 \times n$ реализуема тогда и только тогда, когда её матрица не содержит миноров A или SA.

Задача 4 (Лемма о вращении прямых.). Назовем *сингулярной плетёнкой* $m \times n$ матрицу M размера $m \times n$ из символов «|», «$-$» и «+» (или из плюс и минус единиц и нулей), дополненную набором $m+n-2$ положительных чисел $a_1, \dots, a_{m-1}, b_1, \dots, b_{n-1}$. Нарисуем на плоскости прямые k_i и l_j аналогично предыдущему. Около точки пересечения прямых k_i и l_j сотрем часть прямой k_i, если $M_{ij} = |$, и часть прямой l_j, если $M_{ij} = -$ (и оставим точку пересечения, если $M_{ij} = +$). Реализуемость сингулярных плетёнок определяется аналогично предыдущему.

(a) Реализуемость сингулярной плетёнки $3\times n$ не меняется при замене строки $(|-|)$ на $(+-+)$ и строки $(-|-)$ на $(+|+)$.

(b) Реализуемость плетёнки $4 \times n$ не меняется при замене строк

$$a = (--|-),\ b = (-|--),\ c = (-||-),\ d = (-|-|) \quad \text{на} \quad (--++),\ (++--),\ (+||+),\ (-++|).$$

(c) Сформулируйте и докажите общее свойство инвариантности реализуемости относительно «вращения прямых».

(d) Если плетёнка реализуема, то для любых двух параллельных прямых соответствующего ей рисунка реализацию можно выбрать такой, чтобы прообразы этих прямых в пространстве были также параллельны (т. е. лежали в одной плоскости). (Результатом этой задачи разрешается пользоваться в дальнейшем без доказательства.)

Задача 5. В этой «физической» задаче мы не приводим аккуратной формулировки условия и не требуем аккуратного доказательства. Важно не столько решить данную задачу, сколько использовать её для проведения эксперимента путем построения моделей и получения ответа в других задачах (но не для их строгого доказательства!).

(a) Пусть мы имеем достаточно много длинных тонких упругих прутьев (или полосок). Составим из них (слегка изгибая прутья) модель, изображающую данную плетёнку. Предположим, что получилась жесткая конструкция, то есть фигуру можно подвесить за одну точку так, чтобы она не распалась. Тогда соответствующая плетёнка не реализуема.

(b) Плетёнка реализуема тогда и только тогда, когда построенная в предыдущем пункте конструкция не содержит жестких подконструкций.

Задача 6. (a) Все немонотонные строки длины 4 — это $a, b, c, d, Sa, Sb, Sc, Sd$ (см. задачу 4 (b)). Таким образом, матрицу $n \times 4$ без монотонных строк можно задавать словом длины n из этих восьми букв.

(b) Какие слова длины 3 из этих букв «запрещает» условие отсутствия миноров A и SA?

(c) Какие слова длины n из этих букв «запрещает» условие отсутствия монотонных столбцов?

Задача 7. Существуют две разные плетёнки с одинаковой матрицей, одна из которых реализуема, а другая нет?

Задача 8. (a) Матрица

$$B = \begin{pmatrix} | & - & - & | \\ - & - & | & - \\ - & | & - & | \\ | & - & | & | \end{pmatrix}$$

не содержит ни монотонных прямых, ни миноров A, SA.

(b) Любая плетёнка с матрицей B не реализуема.

Задача 9. Найдите алгоритм распознавания реализуемости плетёнок.

Замечание. Этот алгоритм можно использовать для компьютерных экспериментов по распознаванию реализуемости плетёнок (например, построенных при помощи задачи 6). При этом можно использовать имеющиеся на компьютерах готовые программы (например, распознавания разрешимости системы линейных неравенств).

Задачи, предложенные после промежуточного финиша

Задача 10 (Седлообразное преобразование). (a) Преобразование $(x, y, z) \mapsto (x, y, z + xy)$ переводит прямые, перпендикулярные оси Ox или оси Oy, в прямые. (Эту задачу можно использовать для решения задачи 4 (d).)

(b) Во что переводит седлообразное преобразование плоскости $z = const$?

Назовём матрицу *реализуемой*, если её можно так дополнить набором расстояний, что получится реализуемая плетёнка.

Задача 11. Предположим, что в плетёнке отмечены две параллельные прямые k и k', а также выбраны ориентации на всех остальных прямых. Разрешается двигаться по прямым k и k' в произвольном направлении, по остальным прямым в направлении их ориентации, а также переходить с одной прямой на другую, если первая прямая проходит в этой точке «выше» второй или «пересекает» её. Назовем плетёнку *ацикличной*, если для любой пары параллельных прямых k и k' существует выбор ориентаций на оставшихся прямых, для которого нельзя пройти по замкнутому маршруту и вернуться в исходную точку.

(a) Плетёнки с одинаковой матрицей ацикличны или нет одновременно.

(b) Любая реализуемая матрица ациклична. (Это можно использовать для доказательства нереализуемости матриц A и B.)

(c)* Верно ли, что любая ацикличная матрица реализуема?

(d) В определении ацикличности вместо пары параллельных прямых k и k' отметим *перпендикулярные прямые k и l*. Решите аналогичные задачи для такого определения ацикличности.

(e) В определении ацикличности вместо пары параллельных прямых k и k' отметим *параллельные прямые k и k' и перпендикулярную им прямую l*. Решите аналогичные задачи для такого определения ацикличности.

Задача 12 (Нереализуемость матрицы B'). (a) Реализуемость плетёнки с матрицей

$$B' = \begin{pmatrix} | & - & | & | \\ - & - & | & - \\ | & | & - & | \\ | & - & | & | \end{pmatrix}$$

равносильна реализуемости плетёнки с такими же расстояниями и матрицей

$$\begin{pmatrix} + & - & | & + \\ + & - & | & + \\ | & + & + & | \\ | & + & + & | \end{pmatrix}$$

(b) Если число a_1 мало́ по сравнению с другими a_i, b_j, то данная плетёнка реализуема.

(c) Если $a_2 = b_2 \ll a_1 = a_3 = b_1 = b_3$, то данная плетёнка не реализуема.

Задача 13 (Проективные преобразования матриц). (a) Реализуемость матрицы не меняется при перенесении первого столбца на последнее место с одновременном изменении всех его элементов на противоположные. Реализуемость матрицы не меняется при аналогичном преобразовании строк. Такие преобразования X и Y называются *проективными преобразованиями матриц.* (Результатом этой задачи разрешается пользоваться в дальнейшем без доказательства.)

(b) $XA = YA = SA$.

(c) Монотонность ряда матрицы не меняется при проективных преобразованиях.

(d) $S = X^m = Y^n$.

(e) $XY = YX$.

Задача 14. (a) Все буквы $a, \dots, Sd$ из задачи 6 (a) получаются из одной проективными преобразованиями. Таким образом, матрицу $4 \times n$ без монотонных столбцов можно задавать словом длины n из цифр $1, 2, \dots, 8$.

(b) Любая матрица 4×4 без монотонных прямых и миноров A, SA получается из B или из B' композицией зеркальных симметрий, транспонирований, осевых симметрий и проективных преобразований.

(c) Какие слова «запрещает» условие отсутствия миноров A, SA, B, X^pY^qB?

(d) Какие слова остаются?

(e) Какие из них реализуемы?

Задача 15. (a) Существует ли бесконечно много нереализуемых матриц, все подматрицы которых реализуемы?

(b) Существует ли бескнонечно много реализуемых матриц, не содержащих монотонных строк и столбцов?

(c)* Существует ли бесконечное множество реализуемых матриц, ни одна из которых не содержит ни монотонного ряда, ни других подматриц из нашего семейства?

Задача 16. (a) Найти число нереализуемых матриц 4×4.

(b) Найти все матрицы 4×5 без монотонных строк и столбцов и без нереализуемых подматриц с точностью до симметрий, транспонирования и проективных преобразований (можно использовать компьютер).

Задача 17. (a) Матрица называется *сильно реализуемой*, если при любом дополнении её набором расстояний оплучается реализуемая плетёнка. Решите аналоги предыдущих задач для сильной реализуемости матриц.

Задача 18. Обозначим через $\mathtt{W}$ множество всех матриц размера $m \times n$ с точностью до всех симметрий, транспонирования и проективных преобразований.

(a)* Найдите (или оцените) число элементов в $\mathtt{W}$.

(b)* Найдите (или оцените) отношение числа реализуемых элементов $\mathtt{W}$ к числу нереализуемых.

(c)* Найдите (или оцените) отношение числа сильно реализуемых элементов в $\mathtt{W}$ к числу остальных элементов.

Авторы считают, что все предложенные задачи не стоит пытаться решить за время конференции. Постарайтесь решить во время конференции наиболее интересные для вас, а к остальным вернуться после.

Решения и указания, рассказанные после окончательного финиша

Если в дальнейшем рассматривается система координат в пространстве, то подразумевается, что ось Ox параллельна горизонтальным прямым плетёнки, ось Oy — вертикальным, а ось Oz направлена вверх.

Задача 4. (d) Пусть нам надо сделать параллельными прямые $\widetilde{k}_i$ и $\widetilde{k}_j$; прямая $\widetilde{k}_s$ задаётся уравнением $(x_s+t, y_s, z_s+k_s t)$, $s = i, j$. Если $k_i = k_j$, то больше ничего делать не надо. Пусть теперь $k_i \neq k_j$. Сделав седлообразное преобразование (см. задачу 10 (a)), получим другой набор прямых, реализующий данную плетёнку. Покажем, что можно так выбрать систему координат, что образы данных прямых при седлообразном преобразовании параллельны. Эти образы имеют вид $(x_i+t, y_i, z_i+x_i y_i+(k_i+y_i)t)$. Они будут параллельны, если $k_i+y_i = k_j+y_j$, то есть при $y_j-y_i = k_i-k_j$. Поскольку левая часть не равна нулю, можно так перевыбрать масштаб по оси Oy, чтобы равенство выполнялось. □

Задача 6. (a) Очевидно. (b) Мы будем использовать проективные преобразования (см. конструкцию в задаче 13). Рассмотрим те три строки, в которых лежит минор A или SA. Проективным преобразованием добьёмся того, чтобы этот минор занимал первые три столбца и был минором A. Тогда легко видеть, что первая строка есть b или d, вторая есть Sb или Sd, а третья есть b или d. Тогда любое запрещённое слово получается из одного из этих восьми слов проективным преобразованием. В обозначениях задачи 14 (a) эти слова записываются как 737, 732, 767, 762, 237, 232, 267, 262. Проективное преобразование прибавляет к каждой цифре слова по единице (по модулю восемь). Так что каждое из этих слов соответствует восьмёрке запрещённых, при этом слова 737 и 262 дают одну и ту же восьмёрку, итого 56 запрещённых слов.

(c) Первый столбец монотонен, если сначала идут только буквы a, b, c, d (в любом порядке), а потом только буквы Sa, Sb, Sc, Sd, или наоборот. Для остальных столбцов получаем аналогичные запреты. □

Задача 10. (a) Достаточно доказать, что седлообразное преобразование переводит прямые, перпендикулярные оси Ox, в прямые. Но это следует из того, что в каждой плоскости $x = const$ происходит афинное преобразование.

(b) Плоскость $z = const$ переходит в поверхность $z - xy = const$, то есть в гиперболический параболоид. Внешне эти поверхности похожи на сёдла, откуда и появилось название «седлообразное преобразование». □

Задача 11. (a) Очевидно.

(b) Рассмотрим реализуемую плетёнку с данной матрицей и реализующий эту плетёнку набор прямых. Сначала седлообразным преобразованием сделаем прямые k и k' параллельными. Затем линейным преобразованием $x' = x$, $y' = y$, $z' = z - px$ делаем эти прообразы параллельными плоскости Oxy. Теперь линейным преобразованием $x' = x$, $y' = y$, $z' = z - qy$ делаем прямую l параллельной плоскости Oxy. Ориентируем все прямые из рисунка плетёнки, кроме прямых k, k' и l, так, чтобы при движении по ориентации соответствующая точка на прообразе прямой опускалась (если прообраз какой-нибудь прямой параллелен плоскости Oxy, ориентируем её произвольно). При проходе по любому замкнутому маршруту в соответствии с условиями задачи точка строго опускается, чего не может быть, так как в итоге мы возвращаемся в исходную точку. Противоречие. □

Задача 12. (a) Достаточно воспользоваться леммой о вращении прямых.

(b) Напомним, что a_i— это расстояния между горизонтальными прямыми плетёнки. Достаточно доказать реализуемость матрицы, построенной в предыдущем пункте. Заметим сначала, что матрица, получающаяся выбрасыванием первой строки, реализуема, поскольку все столбцы этой матрицы монотонны. Возьмём реализующий её набор прямых и добавим к нему прямую $\widetilde{k}_1$, близкую к прямой $\widetilde{k}_2$ и пересекающую прямые $\widetilde{l}_1$ и $\widetilde{l}_4$. Тогда типы пересечений добавленной прямой с остальными будут такие же, как и у прямой $\widetilde{k}_2$. Следовательно, мы получили набор прямых, реализующий матрицу B'.

(c) Достаточно доказать нереализуемость плетёнки с матрицей, полученной в пункте (a). Допустим, рассматриваемая плетёнка реализуема. По лемме о параллельных прямых (см. задачу 4 (d)), можно считать, что прямые $\widetilde{k}_3$ и $\widetilde{k}_4$ будут параллельны. После этого линейным преобразованием несложно добиться, чтобы обе эти прямые лежали в плоскости Oxy.

Можно считать, что $a_1 = 1$. Пусть $a_2 = \varepsilon$, d — разность аппликат точек этой прямой, проецирующихся в $k_2 \cap l_2$ и $k_2 \cap l_3$. Тогда угловой коэффициент прямой $\widetilde{k}_2$ равен d/ε. Значит,

$$z(\widetilde{k}_2 \cap \widetilde{l}_1) < \frac{d}{\varepsilon} + d \quad \text{и} \quad z(\widetilde{k}_2 \cap \widetilde{l}_4) < -\frac{d}{\varepsilon}.$$

Так как прямая l_4 проходит выше прямой k_3 и пересекает прямую k_2, то угловой коэффициент прямой $\widetilde{l}_4$ не меньше, чем d/ε^2. Значит,

$$z(\widetilde{l}_4 \cap \widetilde{k}_1) < -\frac{d}{\varepsilon} - \frac{d}{\varepsilon^2}.$$

Угловой коэффициент прямой $\widetilde{k}_1$ не меньше $\frac{d}{\varepsilon^2}$. Значит,

$$z(\widetilde{l}_1 \cap \widetilde{k}_1) > \frac{d}{\varepsilon^2}.$$

Наконец, рассмотрев прямую $\widetilde{l}_1$, получаем что аппликата её точки, проецирующейся в $l_1 \cap k_4$ меньше

$$\frac{d}{\varepsilon^2} - \left(\frac{d}{\varepsilon^2} - \frac{d}{\varepsilon} - d\right)(2+\varepsilon) < 0 \quad \text{при} \quad \varepsilon < 1/3.$$

$\square$

Задача 13. (a) Выберем систему координат в пространстве так, чтобы в полупространстве $x \geqslant 0$ лежала ровно одна вертикальная прямая. Остаётся сделать преобразование $(x, y, z) \mapsto (x, -1/y, z/y)$. Остальные пункты этой задачи решаются прямой проверкой. $\square$

Задача 15. (a) Достаточно привести пример последовательности нереализуемых матриц, ни одна из которых не содержит нереализуемых подматриц. Докажем, что матрица

$$C_n = \begin{pmatrix} \vert & - & - & \dots & - & - & \vert \\ - & \vert & - & \dots & - & - & - \\ \vert & - & \vert & \dots & - & - & - \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \vert & \vert & \vert & \dots & - & \vert & - \\ \vert & \vert & \vert & \dots & \vert & - & \vert \end{pmatrix}_{n \times n}$$

при $n \geqslant 3$ нереализуема и не содержит нереализуемых подматриц.

Докажем сначала, что она нереализуема. По лемме о вращении прямых, достаточно доказать, что нереализуема матрица

$$\begin{pmatrix} + & - & - & \dots & - & - & + \\ + & + & - & \dots & - & - & - \\ \vert & + & + & \dots & - & - & - \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \vert & \vert & \vert & \dots & + & + & - \\ \vert & \vert & \vert & \dots & \vert & + & + \end{pmatrix}_{n \times n},$$

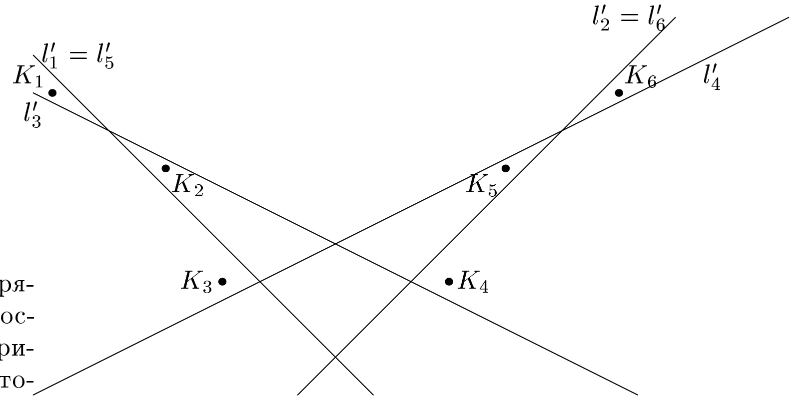
Предположим, что она реализуема. Седлообразным преобразованием добьёмся, чтобы прямые k_1 и k_2 были параллельны. После этого линейным преобразованием сделаем их лежащими в плоскости Oxy. Пусть $z_i = z(k_i \cap l_i)$, $z'_i = z(k_{i+1} \cap l_i)$. Заметим, что при $i > 1$ выполнены неравенства $z_i < z'_i < z_{i+1}$. Следовательно, $z_n > z_1 = 0$. Осталось заметить, что прообраз прямой l_n должен сначала пересечь плоскость Oxy, потом идти ниже этой плоскости, а потом оказаться выше этой плоскости, что невозможно.

Любая подматрица матрицы C_n реализуема, поскольку любая её подматрица содержит монотонный ряд.

(b) Одна такая плетёнка существует — это B'. Для любого набора прямых в пространстве, дающего в проекции плетёнку $n \times n$ без монотонных прямых, построим такой набор с удвоенным числом прямых. Сдвинем все прямые набора на вектор (u, u, v), где $u > a_1 + \dots + a_{n-1} + b_1 + \dots + b_{n-1}$, а v достаточно велико, чтобы над точками пересечения проекций прямыя нового набора проходили выше прямых старого набора. Тогда и в проекции набора из новых прямых все прямые будут не монотонными, тем более они не монотонны в проекции объединения наборов. Следовательно, таких плетёнок бесконечно много. $\square$

Задача 17. Докажем сильную реализуемость следующей матрицы, не содержащей монотонных строк и столбцов:

$$\begin{pmatrix} - & \vert & - & \vert & \vert & \vert \\ \vert & \vert & \vert & - & \vert & - \\ \vert & - & - & \vert & \vert & \vert \\ \vert & \vert & \vert & \vert & - & - \\ - & \vert & - & \vert & \vert & \vert \\ \vert & \vert & \vert & - & \vert & - \end{pmatrix}.$$



Пусть заданы наборы расстояний между прямыми плетенки. Тогда можно нарисовать на плоскости точки и прямые так, как показано на рисунке, чтобы расстояния между проекциями точек $K_1, \dots, K_6$ на горизонтальную прямую совпадали с расстояниями между соответствующими прямыми плетенки.

Теперь укажем требуемую реализацию. Направим ось Ox горизонтально, ось Oz вертикально в нашей же плоскости, а Oy перпендикулярно плоскости рисунка. Прямые $\widetilde{k}_1, \dots, \widetilde{k}_6$ будут перпендикулярны нашей плоскости, и будут пересекать её в соответствующих точках; прямые $\widetilde{l}_1, \dots, \widetilde{l}_6$ будут параллельны нашей плоскости, проецироваться в прямые $l'_1, \dots, l'_6$ и расположены от неё на нужных расстояниях. Легко видеть, что получилась действительно реализация нашей матрицы. $\square$