ПЕРСПЕКТИВНО-ОРТОЛОГИЧНЫЕ ТРЕУГОЛЬНИКИ И ТЕТРАЭДРЫ

А.Заславский (при участии Л. и Т. Емельяновых)

1 Определения и вводные задачи

Определение 1. Треугольники $A_1B_1C_1$ и $A_2B_2C_2$ называются *перспективными*, если прямые A_1A_2, B_1B_2, и C_1C_2 пересекаются в одной точке, которая называется *центром перспективы*.

Определение 2. Тетраэдры $A_1B_1C_1D_1$ и $A_2B_2C_2D_2$ называются *перспективными*, если прямые A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 и D_1D_2 пересекаются в одной точке, которая называется *центром перспективы*.

1. **Теорема Дезарга.**

a) Докажите, что треугольники $A_1B_1C_1$ и $A_2B_2C_2$ перспективны тогда и только тогда, когда точки пересечения их соответствующих сторон (A_1B_1 и A_2B_2, B_1C_1 и B_2C_2, C_1A_1 и C_2A_2) лежат на одной прямой. Эта прямая называется *осью перспективы*.

b) Докажите, что тетраэдры $A_1B_1C_1D_1$ и $A_2B_2C_2D_2$ перспективны тогда и только тогда, когда их соответствующие ребра пересекаются и точки пересечения лежат в одной плоскости (*плоскость перспективы*).

Определение 3. Треугольник $A_2B_2C_2$ называется ортологичным треугольнику $A_1B_1C_1$, если перпендикуляры, опущенные из A_1 на B_2C_2, из B_1 на A_2C_2 и из C_1 на A_2B_2 пересекаются в одной точке, которая называется *центром ортологичности*.

Определение 4. Тетраэдр $A_2B_2C_2D_2$ называется *ортологичным* тетраэдру $A_1B_1C_1D_1$, если перпендикуляры, опущенные из A_1 на плоскость $B_2C_2D_2$, из B_1 на $D_2A_2C_2$, из C_1 на $D_2A_2B_2$ и из D_1 на $A_2B_2C_2$ пересекаются в одной точке, которая называется *центром ортологичности*.

2. **Взаимность ортологичности.**

a) Докажите, что, если треугольник $A_2B_2C_2$ ортологичен треугольнику $A_1B_1C_1$, то и $A_1B_1C_1$ ортологичен $A_2B_2C_2$. (Центры ортологичности могут при этом не совпадать).

b) Докажите, что тетраэдр $A_1B_1C_1D_1$ ортологичен тетраэдру $A_2B_2C_2D_2$ тогда и только тогда, когда их "антисоответственные" ребра, (например, A_1B_1 и C_2D_2) перпендикулярны.

c) Докажите, что, если тетраэдр $A_1B_1C_1D_1$ ортологичен тетраэдру $A_2B_2C_2D_2$ то тетраэдр $A_2B_2C_2D_2$ ортологичен тетраэдру $A_1B_1C_1D_1$ (центры ортологичности могут не совпадать).

В последующих задачах изучаются свойства пар треугольников (тетраэдров), являющихся одновременно и перспективными и ортоцентричными.

3. **Теорема 1.**

a) Пусть P — центр перспективы двух треугольников (не гомотетичных), Q — один из центров ортологичности. Докажите, что прямая PQ перпендикулярна оси перспективы.

b) Пусть P — центр перспективы двух тетраэдров (не гомотетичных), Q — один из центров ортологичности. Тогда прямая PQ перпендикулярна плоскости перспективы.

4. **Теорема 2.**

a) Пусть P — центр перспективы двух треугольников, Q_1, Q_2 — их центры ортологичности. Докажите, что точки P, Q_1, Q_2 лежат на одной прямой.

b) Пусть P — центр перспективы двух тетраэдров, Q_1, Q_2 — их центры ортологичности. Докажите, что точки P, Q_1, Q_2 лежат на одной прямой.

2 Основные задачи

В этой части собраны задачи, которые можно решить с помощью теорем 1 и 2. При этом используются следующие обозначения. O — центр описанной окружности треугольника ABC, I — центр вписанной окружности, H — ортоцентр, G — точка Жергонна (точка пересечения отрезков, соединяющих вершины треугольника и точки касания противоположных сторон с вписанной окружностью), N — точка Нагеля (точка пересечения отрезков, соединяющих вершины треугольника и точки касания противоположных сторон с вневписанными окружностями), P — точка, симметричная I относительно O, Q — точка, изогонально сопряженная P (т.е. прямые AP и AQ, BP и BQ, CP и CQ симметричны относительно соответствующих биссектрис треугольника ABC), L — точка Лемуана (изогонально сопряженная центру тяжести).

Определение 5. Пусть X — произвольная точка в плоскости ABC, A', B', C' — точки пересечения прямых AX, BX, CX с противоположными сторонами треугольника ABC. Тогда ось перспективы треугольников ABC и $A'B'C'$ называется *трилинейной полярой* точки X относительно треугольника ABC.

5. Докажите, что трилинейная поляра точки G перпендикулярна прямой IG.

6. Докажите, что трилинейная поляра точки H перпендикулярна прямой Эйлера.

7. Докажите, что точки P, Q, N лежат на одной прямой.

8. Докажите, что трилинейная поляра точки N перпендикулярна прямой IH.

9. Пусть A_1, B_1, C_1 — середины дуг BC, CA, AB описанной окружности ABC, не содержащих внутри себя его вершин, E, F — точки пересечения, соответственно, AC и A_1C_1, BC и B_1C_1. Докажите, что прямые EF и OI перпендикулярны.

10. Докажите, что точки пересечения внешних биссектрис треугольника с противоположными сторонами лежат на одной прямой, перпендикулярной прямой OI.

11. Доказать, что точки пересечения прямых, касающихся описанной окружности треугольника в его вершинах, с противоположными сторонами лежат на одной прямой, перпендикулярной OL.

3 Дополнительные задачи

12. Докажите, что если два треугольника ортологичны, и центры ортологиности совпадают, то треугольники перспективны.

13. Верно ли утверждение предыдущей задачи для тетраэдров?

14. Рассмотрим все тетраэдры, перспективно-ортологичные данному тетраэдру $ABCD$. Найти геометрическое место

a) центров перспективы;

b) центров ортологичности.

15. Попробуйте найти новые следствия теорем 1 и 2.