ПЕРСПЕКТИВНО-ОРТОЛОГИЧНЫЕ ТРЕУГОЛЬНИКИ И ТЕТРАЭДРЫ
Решения

1 Определения и вводные задачи

1. **Теорема Дезарга.**

a) Известно много способов доказательства теоремы Дезарга, но, пожалуй, наиболее красивый связан с "выходом в пространство". Вот его идея. Будем считать, что точка P находится над плоскостью треугольника $A_1B_1C_1$. Тогда точка пересечения, например, прямых A_1B_1 и A_2B_2 принадлежит как плоскости $A_1B_1C_1$, так и плоскости $A_2B_2C_2$, а значит и прямой, по которой эти плоскости пересекаются. На этой же прямой лежат и две другие точки. Разберитесь самостоятельно, почему любой плоский чертеж можно рассматривать как проекцию пространственного.

b) Так как A_1A_2 и B_1B_2 пересекаются, точки A_1, A_2, B_1, B_2 лежат в одной плоскости. Значит A_1B_1 и A_2B_2 пересекаются (возможно, в бесконечно удаленной точке). Аналогично пересекаются и остальные пары соответствующих ребер. Далее, точки пересечения ребер A_1B_1 и A_2B_2, A_1C_1 и A_2C_2, B_1C_1 и B_2C_2 лежат на одной прямой — линии пересечения плоскостей $A_1B_1C_1$ и $A_2B_2C_2$. Это же верно и для точек пересечения ребер, принадлежащих трем другим парам соответствующих граней. Любые две из этих четырех прямых пересекаются, причем точки пересечения различны. Следовательно, все четыре прямые лежат в одной плоскости.

2. **Взаимность ортологичности.**

a) Пусть M — проекция B_1 на A_2C_2, N_1, N_2, N_3 — проекции A_2, B_2, C_2 на соответствующие стороны $A_1B_1C_1$. Так как углы A_2MB_1 и $A_2N_1B_1$ прямые, точки A_2, B_1, M, N_1 лежат на одной окружности. Следовательно, $\sin\angle Q_1B_1C_1 = \sin\angle C_2A_2N_1$. Аналогично, $\sin\angle Q_1B_1C_1 = \sin\angle A_2C_2N_3$, $\sin\angle Q_1A_1B_1 = \sin\angle B_2C_2N_3$, $\sin\angle Q_1A_1C_1 = \sin\angle C_2B_2N_2$, $\sin\angle Q_1C_1A_1 = \sin\angle A_2B_2N_2$, $\sin\angle Q_1C_1B_1 = \sin\angle B_2A_2N_1$. Утверждение задачи сразу следует из теоремы Чевы для углов.

b) Пусть P — точка пересечения перпендикуляров из вершин $A_2B_2C_2D_2$ на грани $A_1B_1C_1D_1$. Так как $PA_2 \perp B_1C_1D_1$ и $PB_2 \perp C_1D_1A_1$, $PA_2 \perp C_1D_1$ и $PB_2 \perp C_1D_1$. Следовательно, $C_1D_1 \perp PA_2B_2$ и $C_1D_1 \perp A_2B_2$.

Обратно, пусть "антисоответственные"ребра перпендикулярны. Тогда перпендикуляры из A_2 на $B_1C_1D_1$ и из B_2 на $A_1C_1D_1$ лежат в плоскости, проходящей через A_2B_2 и перпендикулярной C_1D_1, и, значит, пересекаются. Аналогично пересекаются два любых других перпендикуляра, и так как четыре перпендикуляра не лежат в одной плоскости, все они проходят через одну точку.

c) Очевидно, следует из предыдущего пункта.

3. **Теорема 1.**

a) Возьмем треугольник ABC и точки P, Q. Опустим перпендикуляры из Q на AB, BC и CA и найдем их точки пересечения, соответственно, с прямыми PC, PA, PB. Треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ перспективны и ортологичны. Пусть A_2, B_2, C_2 — точки пересечения, соответственно, BC и B_1C_1, AC и A_1C_1, AB и A_1B_1. Обозначим $\overrightarrow{PA} = a$, $\overrightarrow{PB} = b$, $\overrightarrow{PC} = c$, $\overrightarrow{PQ} = x$. Тогда $\overrightarrow{PA_1} = \alpha a$ и $(\alpha a - x, b - c) = 0$, следовательно, $\alpha = ((x, b) - (x, c))/((a, b) - (a, c))$. Аналогично, $\overrightarrow{PB_1} = \beta b$, $\overrightarrow{PC_1} = \gamma c$, где $\beta = ((x, c) - (x, a))/((b, c) - (b, a))$, $\gamma = ((x, a) - (x, b))/((c, a) - (c, b))$.

Так как C_2 лежит на прямой AB $\overrightarrow{PC_2} = \lambda a + (1-\lambda)b$. С другой стороны, C_2 лежит на A_1B_1, значит, $\overrightarrow{PC_2} = \mu\alpha a + (1-\mu)\beta b$. Приравнивая коэффициенты при a и b, получаем $\lambda = (1-\beta)/(\alpha-\beta)$. Используя полученные соотношения, нетрудно убедиться, что скалярное произведение $(\overrightarrow{PC_2}, x)$ симметрично зависит от a, b, c. Поэтому, например, $(\overrightarrow{PC_2}, x) = (\overrightarrow{PA_2}, x)$, что и означает искомую перпендикулярность.

Приведенное выше рассуждение не проходит, если точка P совпадает с одной из вершин ABC, однако, в этом случае утверждение доказывается достаточно легко.

b) Пусть A', B', C', P', Q' — проекции точек A_2, B_2, C_2, P, Q на плоскость $A_1B_1C_1$. Тогда треугольники $A_1B_1C_1$ и $A'B'C'$ перспективны с центром P'. Кроме того они ортологичны с центром Q'. Действительно, так как,например, $QC_2 \perp A_1B_1C_1$, $QC_2 \perp A_1B_1$, и по теореме о трех перпендикулярах $Q'C' \perp A_1B_1$. В силу предыдущего утверждения $P'Q'$ перпендикулярно оси перспективы l треугольников $A_1B_1C_1$, которая совпадает с линией пересечения плоскостей $A_1B_1C_1$ и $A_2B_2C_2$. По теореме о трех перпендикулярах PQ также перпендикулярно l. Аналогично, PQ перпендикулярно линии пересечения плоскостей любых соответствующих граней тетраэдров, а значит, и их плоскости перспективы.

4. **Теорема 2.**

a) Если треугольники гомотетичны, то центры ортологичности являются ортоцентрами и утверждение очевидно. В противном случае оно следует из предыдущей задачи.

b) Аналогично предыдущему пункту.

2 Основные задачи

5. Пусть A', B', C' — точки касания вписанной окружности со сторонами ABC. Тогда G — центр перспективы треугольников ABC и $A'B'C'$, а I — их центр ортологичности (оба центра ортологичности совпадают). Осталось применить теорему 1.

6. Пусть AA_1, BB_1, CC_1 — высоты треугольника ABC. Тогда ортоцентр ABC является одним из центров ортологичности ABC и $A_1B_1C_1$ (а также их центром перспективы), а центр описанной окружности другим.

7. Пусть A_2, B_2, C_2 — точки касания сторон ABC с вневписанными окружностями. Тогда перпендикуляры к сторонам ABC, восставленные в точках A_2, B_2, C_2, пересекаются в P, а, значит, перпендикуляры из A, B, C на стороны $A_2B_2C_2$ пересекаются в Q. Применяя к треугольникам ABC и $A_2B_2C_2$ теорему 2, получаем утверждение задачи.

8. По теореме 1 трилинейная поляра N перпендикулярна NP. Далее, известно, что точки O, M, H лежат на одной прямой (прямая Эйлера), причем $HM = 2MO$. Также точки I, M, N лежат на одной прямой (прямая Нагеля) и $NM = 2MI$. Следовательно, $IO \parallel NH$ и $NH = 2IO$. Поскольку $PI = 2OI$, $PIHN$ — параллелограмм, и $IH \parallel PN$.

9. Достаточно заметить, что I — центр перспективы (и один из центров ортологичности), а O — второй центр ортологичности ABC и $A_1B_1C_1$.

10. Биссектрисы внешних углов треугольника ABC пересекаются в центрах I_a, I_b, I_c вневписанных окружностей. Треугольники ABC и $I_aI_bI_c$ перспективны с центром

I и ортологичны, причем одним из центров ортологичности будет также точка I, а другим точка P.

11. Утверждение следует из того факта, что точка Лемуана любого треугольника совпадает с точкой Жергонна треугольника, образованного касательными к его описанной окружности в вершинах.

3 Дополнительные задачи

12. Приведем решение, найденное участниками конференции В. Громазиным и А. Красильниковым. Пусть Q — общий центр ортологичности треугольников $A_1B_1C_1$ и $A_2B_2C_2$, P — точка пересечения прямых A_1A_2 и B_1B_2, C_3 — точка пересечения прямых C_1P и C_2Q. Тогда треугольники $A_1B_1C_1$ и $A_2B_2C_3$ перспективны с центром P. Кроме того, Q — один из их центров ортологичности. По теореме 2 второй центр ортологичности лежит на прямой PQ. С другой стороны, он лежит на прямой C_1Q, т.е. совпадает с Q. Следовательно, C_3 совпадает с C_2 и данные треугольники перспективны.

13. Нет. Например, пусть A', B', C', D' — точки касания граней тетраэдра $ABCD$ с вписанной в него сферой. Тогда $ABCD$ и $A'B'C'D'$ ортологичны и оба центра ортологичности совпадают с центром вписанной в $ABCD$ сферы. Однако, перспективными тетраэдры будут только при соблюдении некоторых специальных условий.

14. Нетрудно убедиться, что прямая PQ пересекает все высоты тетраэдра. Если высоты не пересекаются в одной точке, то такие прямые образуют поверхность второго порядка (как правило, гиперболоид), которая и является ответом к обоим пунктам задачи. Для ортоцентрического тетраэдра искомым геометрическим местом будет все пространство.

15. Пример, найденный В. Громазиным и А. Красильниковым. Пусть H — ортоцентр треугольника ABC, B_1, C_1 — точки на прямых AB и AC, такие, что $B_1C_1 \parallel BC$. Прямая, проходящая через H, пересекает AB и AC в точках M и N соответственно. Прямые MC_1 и CH пересекаются в точке K, BK и B_1C_1 в точке L. Тогда $AL \perp B_1C_1$.

Для доказательства достаточно применить теорему 1 к треугольникам ABK и AB_1C_1.