МАТЕМАТИКА ТУРНИРОВ

А. Заславский, Б. Френкин, А. Толпыго, С. Токарев

В предлагаемых задачах объектом исследования являются круговые турниры, т.е. соревнования n участников, каждый из которых встречается с каждым (как правило, один раз). Результатом каждой встречи является либо победа одного игрока и поражение другого, либо ничья. В некоторых задачах рассматриваются турниры без ничьих. За победу игрок получает 1 очко, за ничью 1/2 очка, за поражение 0 очков. Число очков, набранное i-м участником во всех встречах будем обозначать s_i.

1 Вводные задачи

1. а) Доказать, что числа $s_1 \le \cdots \le s_n$ удовлетворяют условиям:

$$\begin{array}{rcl} s_1 + \cdots + s_n & = & \frac{n(n-1)}{2}, \\ s_1 + \cdots + s_k & \ge & \frac{k(k-1)}{2}, k = 1, \dots, n-1. \end{array} \tag{1}$$

   б) Даны n целых неотрицательных чисел $s_1 \le \cdots \le s_n$, удовлетворяющих условиям (1).

   Верно ли, что существует турнир без ничьих, в котором участники набирают $s_1, \dots, s_n$ очков.

   в) Даны n полуцелых неотрицательных чисел $s_1 \le \cdots \le s_n$, удовлетворяющих условиям (1).

   Верно ли, что существует турнир с ничьими, в котором участники набирают $s_1, \dots, s_n$ очков.

   Определение 1. Циклом длины k назовем набор из k участников, таких что 1-й выиграл у 2-го, 2-й у 3-го,..., $k-1$-й у k-го, k-й у 1-го.

2. Доказать, что, если в турнире без ничьих есть цикл длины k, то есть, по крайней мере, $k-2$ цикла длины 3.

3. а) Доказать, что в турнире без ничьих число циклов длины 3 равно

$$NT = \frac{n(n-1)(2n-1)}{12} - \frac{\sum_{i=1}^{n} s_i^2}{2}. \tag{2}$$

   б) Найти максимально возможное значение NT.

   Определение 2. Назовем турнир *полутранзитивным*, если для любых трех участников A, B, C, таких, что A выиграл у B, а B у C, A выиграл у C.

4. Доказать, что для любого турнира с ничьими существует полутранзитивный турнир, в котором все участники набрали такое же число очков.

5. Верно ли, что все полутранзитивные турниры с одинаковыми s_i имеют одно и то же количество

   а) ничьих?

   б) нетранзитивных троек?

6. а) Доказать, что, если в круговом турнире все участники, кроме одного, набрали одинаковое число очков, то этот участник либо у всех выиграл, либо всем проиграл.

   б) Доказать, что, если любые два игрока набрали разное количество очков и при этом нет ничьих, то занявший первое место выиграл у всех, занявший второе — у всех, кроме первого, и т.д.

   Определение 3. Назовем участника турнира *странным*, если он выиграл у всех, кто набрал больше очков, чем он, и проиграл всем, кто набрал меньше. С теми, кто выступил наравне с ним, странный игрок мог сыграть как угодно.

7. а) Тридцать три богатыря провели турнир без ничьих. Один странный богатырь победил всех, кто в итоге набрал больше очков, чем он, и проиграл всем, кто набрал меньше, чем он. Наравне со странным не набрал очков никто. Доказать, что странный богатырь занял место не выше тринадцатого и не ниже двадцать первого.

   б) Доказать, что все странные участники имеют одинаковое количество очков.

   Определение 4. Если игрок получил столько же очков, сколько и странные, но сам не является странным, то назовем его *средним*. Тех, кто набрал больше, будем называть *сильными*, а тех, кто набрал меньше, — *слабыми*.

   в) Может ли странный игрок разделить первое место? А последнее?

   г) Могут ли на первом или последнем месте находиться только странные?

8. В круговом турнире с 2^N участниками не было ничьих.

   а) Доказать, что существует цепочка из $N+1$ участника, каждый из которых победил следующего за ним.

   б) Доказать, что существует цепочка из $N+1$ участника, каждый из которых победил всех последующих.

2 Основные задачи

Определение 5. В турнире с ничьими назовем тройку участников *нетранзитивной*, если результаты их встреч между собой задаются одной из трез следующих таблиц

$$\begin{pmatrix} - & 1 & 0 \\ 0 & - & 1 \\ 1 & 0 & - \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} - & 1 & 1/2 \\ 0 & - & 1 \\ 1/2 & 0 & - \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} - & 1/2 & 1 \\ 1/2 & - & 1/2 \\ 0 & 1/2 & - \end{pmatrix}.$$

Суммарной нетранзитивностью турнира назовем величину $NT = a + bx + cy$, где a, b, c — число троек, соответственно, первого, второго и третьего видов, x, y — некоторые коэффициенты.

9. а) Найти коэффициенты x, y, при которых NT выражается через числа v_i, n_i, p_i выигрышей, ничьих и проигрышей каждого участника.

   б) Найти формулу для NT при этих значениях x, y.

10. а) N спортсменов провели круговой турнир. Через год те же спортсмены встретились снова. Доказать, что найдется участник, сумма очков которого изменилась не больше чем на $[N/2]$.

    б) Привести пример, когда оценка $[N/2]$ достигается.

    в) N спортсменов, где N четно, дважды провели круговой турнир. Сумма очков каждого изменилась не менее чем на $N/2$. Доказать, что она у всех изменилась ровно на $N/2$.

11. В турнире без ничьих был определен коэффициент каждого участника, равный сумме очков, набранных теми, кого победил данный спортсмен. Оказалось, что у всех участников коэффициент одинаков. Число участников турнира больше двух. Доказать, что все спортсмены набрали одинаковое количество очков.

12. Доказать, что определенный в предыдущей задаче коэффициент у участников с максимальной суммой очков не ниже среднего.

13. Будем называть встречу двух игроков неправильной, если выигравший ее набрал в итоге меньше очков, чем проигравший. Какую долю от общего числа встреч могут составлять неправильные?

14. Для каждого участника i турнира подсчитали его "бергеровский коэффициент" B_i по формуле: сумма очков тех участников, у кого i выиграл минус сумма очков тех, кому он проиграл.

    а) Известно, что для всех i $B_i \geq 0$. Верно ли, что для всех i $B_i = 0$?

    б) Известно, что для всех i $B_i \leq 0$. Верно ли, что для всех i $B_i = 0$?

15. а) Известны результаты всех игроков. Известно также, что на турнире были странные участники (см. определение 3). Сколько очков они набрали

    б) Доказать, что число странных всегда не больше $[N/2] - 1$.

    в) Для произвольного $N \geq 4$ и произвольного натурального $K \leq [N/2] - 1$ построить пример, когда число странных равно K.

    г) Докажите, что на любом турнире сильные вместе со странными составляют меньше $2/3$ от общего числа игроков, и что то же верно для слабых вместе со странными.

    Если же на турнире нет средних, то сильные и слабые составляют более чем по трети участников турнира, а странные — менее трети. Более точно, если N имеет вид $3M$, $3M + 1$ или $3M + 2$ (M натуральное), то число странных не превосходит, соответственно, $M - 2$, $M - 1$, M.

    д) Постройте пример (для произвольного $N \geq 5$), когда на турнире есть странные, нет средних, а число сильных, как и число слабых, равно наименьшему целому, большему $N/3$.

    е) Пусть в круговом турнире все участники набрали разное количество очков. Постройте пример, когда ровно две ничьих и имеется странный игрок.

    ж) В круговом турнире была только одна ничья. Любые два участника набрали разное количество очков. Докажите, что странных игроков нет.

МАТЕМАТИКА ТУРНИРОВ

А. Заславский, Б. Френкин, А. Толпыго, С. Токарев

3 Дополнительные задачи

16. Для турнира с данными s_i найти

а) Максимально возможное число ничьих.

б) Минимально возможное число нетранзитивных троек.

17. Назовем *правильным* турнир со следующим свойством: если A выиграл у B, то A выиграл у всех игроков, набравших не больше очков, чем B, а B проиграл всем игрокам, набравшим не меньше очков, чем A.

а) Доказать, что правильный турнир является полутранзитивным.

б) Доказать, что полутранзитивный турнир не является правильным тогда и только тогда, когда найдутся четыре игрока, резвльтаты встреч которых друг с другом задаются одной из следующих таблиц

$$\begin{pmatrix} - & 1/2 & 1 & 1 \\ 1/2 & - & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & - & 1 \\ 0 & 1/2 & 0 & - \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} - & 1/2 & 1/2 & 1 \\ 1/2 & - & 1 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & - & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 1/2 & - \end{pmatrix}$$

в) Привести пример распределения очков, для которого не существует правильного турнира.

г) Найти условия на количества очков, при которых правильный турнир существует.

18. В турнире без ничьих определим коэффициент каждого участника, как в задаче 11. Затем для каждого участника определим второй коэффициент, равный сумме коэффициентов побежденных им участников, третий коэффициент, равный сумме их вторых коэффициентов и т.д.

а) Пусть для некоторого k k-е коэффициенты всех участников оказались равны. Верно ли, что все участники набрали поровну очков?

б) Будем упорядочивать участников по их первым, вторым и т.д. коэффициентам. Доказать, что, начиная с некоторого момента, порядок участников перестанет изменяться.

19. Назовем A общим победителем для $B_1, B_2, \ldots, B_k$, если он выиграл у всех этих игроков. Скажем, что турнирная таблица с n участниками удовлетворяет условию $P_{n,k}$, если каждые k участников имеют общего победителя.

а) Каждые два участника имеют общего победителя. Доказать, что $n \geq 7$.

б) При 7 участниках в турнире играется 21 партия, так что существует 3^{21} возможных таблицы турнира. Сколько из них удовлетворяют условию $P_{7,2}$?

в) Привести пример турнира, удовлетворяющего условию $P_{n,3}$ (для какого-нибудь n).

г) Доказать, что существует таблица турнира, удовлетворяющего условию $P_{n,5}$ (для какого-нибудь n).

Решения

4 Вводные задачи

1. а) Так как любые k участников проводят между собой $\frac{k(k-1)}{2}$ встреч, а в каждой встрече ее участники в сумме получают одно очко, сумма очков любых k участников не меньше $\frac{k(k-1)}{2}$. При $k = n$ это неравенство, очевидно обращается в равенство.

   б) Для любого допустимого набора $s_1, \dots, s_n$ рассмотрим все разности $s_1 + \dots + s_k - \frac{k(k-1)}{2}, k = 1, \dots, n-1$. Упорядочим наборы по максимальной из этих разностей, а если максимальные разности равны, то по количеству разностей, равных максимальной. Существование искомого турнира докажем индукцией по полученному порядку.

   Если для всех k $s_1 + \dots + s_k = \frac{k(k-1)}{2}$, то $s_1 = 0, s_2 = 1, \dots, s_n = n-1$ и турнир строится очевидным образом. Пусть $s_1 + \dots + s_k \frac{k(k-1)}{2} = l > 0$ — максимальная из разностей. Тогда $s_1, \dots, s_k - 1, s_{k+1} + 1, \dots, s_n$ — допустимый набор, предшествующий данному, и по предположению индукции существует турнир с таким распределением очков. Если в этом турнире $k+1$-й участник победил k-го, то изменим результат их встречи на противоположный, если же победил k-й участник, то, поскольку $s_{k+1} + 1 > s_k - 1$, то найдется участник, выигравший у k-го, но проигравший $k+1$-му. Поменяв результаты этих встреч, получим турнир с нужным распределением очков.

   в) Аналогично п.б) проводится индукция по числу m полуцелых s_i. Отметим, что таким образом доказывается более сильное утверждение: существует турнир с данным распределением очков и числом ничьих $m/2$.

2. Проведем доказательство по индукции. Для $k = 3$ утверждение очевидно. Пусть $k > 3$, и утверждение доказано для всех меньших значений. Рассмотрим партии участников 1 и 3, 2 и 4,..., $k-2$ и k, $k-1$ и 1, k и 2. Если во всех этих партиях побеждают участники, названные вторыми, k троек $(1, 2, 3), (2, 3, 4), \dots, (k-1, k, 1), (k, 1, 2)$ являются нетранзитивными и утверждение задачи выполнено. Предположим, что k выиграл у 2. Тогда игроки $2, 3, \dots, k$ образуют цикл длины $k-1$ и по предположению индукции найдутся $k-3$ нетранзитивных тройки, образованных этими участниками. Рассмотрим теперь тройки $(1, 2, 3), (1, 3, 4), \dots, (1, k-1, k)$ и покажем, что все они не могут быть транзитивными. Действительно, в противном случае поскольку 1 выиграл у 2, а 2 у 3, 1 должен выиграть у 3, т.к. 3 выиграл у 4, 1 должен выиграть у 4, и т.д. Наконец, получаем, что 1 должен выиграть у k, что противоречит условию. Итак, по крайней мере одна из указанных троек является нетранзитивной, и так как она не совпадает ни с одной из найденных ранее $k-3$ троек, утверждение доказано.

3. а) Пусть все партии кроме партии участников с номерами 1 и 2 сыграны. Очевидно, что результат последней партии влияет на транзитивность только тех троек, в которые входят оба ее участника. Пусть в партиях с остальными участниками 1 и 2 набрали соответственно t_1 и t_2 очков, причем число участников, у которых они оба выиграли равно x_{11}, число участников, у которых 1 выиграл, а 2 проиграл — x_{12}, 2 выиграл, а 1 проиграл — x_{21}, оба проиграли — x_{22}. Ясно, что выполняются соотношения:

$$x_{11}+x_{12}=t_1,\quad x_{11}+x_{21}=t_2,\quad x_{11}+x_{12}+x_{21}+x_{22}=n-2.$$

Эти соотношения показывают, что если t_1, t_2 известны, то, зная одно из чисел $x_{11}, x_{12}, x_{21}, x_{22}$, можно определить остальные. В частности $x_{12}=n-2-t_2-x_{22}, x_{21}=n-2-t_1-x_{22}$.

Рассмотрим теперь различные исходы последней партии.

1) Победа игрока 1. В этом случае 1 набирает t_1+1 очко, у 2 остается t_2. Правая часть формулы (2) принимает вид:

$$C_1-(t_1+1)^2/2-t_2^2/2,$$

где C_1 - полусумма квадратов очков остальных участников, не зависящая от исхода последней партии.

Тройка с участием 1 и 2 будет нетранзитивной тогда и только тогда, когда третий ее участник выигрывает у 1 и проигрывает 2. Поскольку число таких троек равно x_{21}, левую часть формулы можно записать в виде C_2+x_{21}, где C_2 не зависит от исхода партии.

2) Победа игрока 2. Рассуждая аналогично, получаем для правой части (2)

$C_1-(t_2+1)^2/2-t_1^2/2$,

а для левой C_2+x_{12}.

Используя найденные ранее выражения для x_{12}, x_{21}, получаем, что разность левой и правой части в обоих случаях равна:

$C_2-C_1+t_1^2/2+t_2^2/2+1/2+n-2-x_{22}$

Таким образом, эта разность не зависит от результата произвольной партии, и, значит, одинакова для всех турниров. Рассмотрим теперь турнир, в котором первый участник выиграл у всех остальных, второй у всех кроме первого и т.д. Для этого турнира число нетранзитивных троек равно нулю, а количества очков $s_1=n-1, s_2=n-2,\ldots,s_n=0$. Используя формулу суммы квадратов натурального ряда, убеждаемся, что формула (2) для этого турнира верна. Следовательно она верна для всех турниров.

б) Заменим результаты всех партий в турнире на противоположные. При этом транзитивность всех троек не изменится, а количества очков, набранных участниками, будут равны $n-1-s_1,\ldots,n-1-s_n$. Поэтому:

$$\begin{array}{rcl} NT &=& \frac{n(n-1)(2n-1)}{12}-\frac{1}{2}\sum s_i^2=\frac{n(n-1)(2n-1)}{12}-\frac{1}{2}\sum(n-1-s_i)^2= \\ &=& \frac{n(n-1)(2n-1)}{12}-\frac{1}{4}\sum(s_i^2+(n-1-s_i)^2) \end{array}.$$

Так как $s_i^2+(n-1-s_i)^2=\frac{(n-1)^2+(2s_i-n+1)^2}{2}$,

$$NT=\frac{n^3-n-3\sum(2s_i-n+1)^2}{24}$$

Отсюда следует, что при нечетном n $NT_{max}=\frac{n^3-n}{24}$, если все $s_i=(n-1)/2$ (такой турнир легко строится по индукции). При четном n число $2s_i-n+1$ обязательно будет нечетным, значит его квадрат не может быть меньше 1. $NT_{max}=\frac{n^3-4n}{24}$ достигается на турнире, в котором для одной половины участников $s_i=n/2$, для другой $s_i=(n-2)/2$. Такой турнир можно получить, добавив одного участника к турниру с нечетным числом игроков, набравших поровну очков.

4. Среди всех турниров с данным распределением очков рассмотрим турнир, в котором наибольшее число партий закончилось вничью. Пусть A выиграл у B, а B у C. Если A проиграл C, то заменим результаты всех трех партий ничьими. Если же A и C сыграли вничью, то результаты партий $A-B$ и $B-C$ заменим ничьими, а результат партии $A-C$ победой A. В обоих случаях число очков у всех участников не изменится, а количество ничьих увеличится, что противоречит его максимальности.

5. Нет. Например, можно рассмотреть следующие два турнира

$$\begin{pmatrix} - & 1/2 & 1 & 1/2 & 1 & 1/2 \\ 1/2 & - & 1/2 & 1 & 1/2 & 1 \\ 0 & 1/2 & - & 1/2 & 1 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & - & 1/2 & 1 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & - & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & - \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} - & 1/2 & 1/2 & 1/2 & 1 & 1 \\ 1/2 & - & 1/2 & 1/2 & 1 & 1 \\ 1/2 & 1/2 & - & 1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 1/2 & - & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 & - & 1/2 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 & 1/2 & - \end{pmatrix}$$

6. а) Пусть "нестандартный" участник набрал больше очков, чем "стандартные". Результат "среднеарифметического" участника составляет $(N-1)/2$. Недобор "стандартного" участника до этого количества не может быть меньше $1/2$, поэтому "стандартные" вместе не добрали не менее чем $(N-1)/2$ очков. "Нестандартный" должен на столько же превысить средний уровень, т.е. он получил не меньше $N-1$ очков. Это возможно лишь в случае, когда "нестандартный" у всех выиграл.

   Аналогично разбирается случай, когда "нестандартный" набрал меньше, чем "стандартные".

   б) Если на турнире не было ничьих, то число очков каждого участника — целое, в промежутке от 0 до $N-1$. Если все они различны, то это — все целые числа от 0 до $N-1$. Очевидно, игрок с $N-1$ очками выиграл у всех остальных. Тогда игрок с $N-2$ очками выиграл у всех, кроме первого, и т.д.

7. а) Предположим, что странный занял место выше тринадцатого. Тогда количество тех, кто набрал меньше очков, чем он, превышает двадцать. Рассмотрим их поединки между собой. Каждый из них провел не менее 20 таких поединков. Кто-то выиграл не менее половины этих поединков и, следовательно, набрал в них не менее 10 очков. Кроме того, он выиграл у странного — значит, всего набрал не менее 11 очков. Странный набрал больше его — значит, не менее 12 очков. Но странный выиграл только у тех, кто занял более высокое место на турнире -следовательно, их не менее 12, и странный занял место не выше тринадцатого.

   Поменяем теперь результаты всех матчей на противоположные. Условия задачи по-прежнему выполняются, и по доказанному странный богатырь занял место не выше тринадцатого. Снова поменяем результаты на противоположные. Последовательность мест изменится на обратную. Заметим теперь, что при 33 участниках двадцать первое место — это тринадцатое с конца.

   б) Пусть А и Б — странные, причем А набрал больше очков, чем Б. Тогда А проиграл Б. Очевидно, А сыграл с каким-то третьим игроком (и не с одним) лучше, чем с ним сыграл Б. Но если такой игрок В набрал меньше очков, чем А, то В выиграл у А (по определению странного игрока). Если же В набрал не меньше очков, чем А, то В набрал больше, чем Б, и тогда Б (как странный) выиграл у В. Значит, А ни с кем не сыграл лучше, чем Б, в противоречии с предыдущим.

в) Пусть в турнире шесть участников. Первые трое сыграли между собой вничью, четвертый с пятым — также вничью, причем проиграли первым троим, а шестой выиграл у первых трех и проиграл четвертому и пятому. Тогда шестой разделил первое место с первыми тремя игроками и при этом является странным.

Чтобы поместить странного игрока на последнее место, поменяем все результаты на противоположные.

г) Пусть первое место полностью принадлежит странным, и их число равно M. Любой из них проиграл всем, кто не делит первое место, и поэтому набрал не более $M-1$ очков. Игрок, не находящийся на первом месте, выиграл у всех странных и потому получил результат не меньше M, что противоречит предыдущему. Значит, первое место не может принадлежать только странным.

Для последнего места рассуждение аналогичное.

8. а) Проведем индукцию по N. Начало индукции ($N=1$) тривиально. Проведем индуктивный переход от $N-1$ к N. Разобьем 2^N участников на непересекающиеся пары. Рассмотрим победителей этих пар и поединки между ними. По предположению индукции из этих участников можно составить цепочку длины N, в которой каждый победил следующего. Последний спортсмен в этой цепочке — победитель одной из пар, выбранных в начале. Присоединив к цепочке проигравшего в этой паре, получим искомую цепочку длины $N+1$.

   б) Проведем индукцию по N. Начало индукции ($N=1$) тривиально. Проведем индуктивный переход от $N-1$ к N. Пусть в турнире с 2^N участниками спортсмен S является победителем (или одним из победителей, если их несколько), и пусть $M0$ — множество проигравших ему. В $M0$ не менее 2^{N-1} спортсменов (так как иначе каждый участник выиграл меньше поединков, чем проиграл, в то время как общее число побед равно числу поражений). Выберем из $M0$ любых 2^{N-1} спортсменов и это множество обозначим $M1$. По предположению индукции в $M1$ существует искомая цепочка длины N. Поставив впереди цепочки спортсмена S, получим цепочку длины $N+1$ с требуемым свойством.

5 Основные задачи

9. а) Рассмотрим две пары турниров

$$\begin{pmatrix} - & 1/2 & 1/2 & 1/2 & 1 \\ 1/2 & - & 1 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & - & 1 & 1/2 \\ 1/2 & 1 & 0 & - & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 1/2 & 1/2 & - \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} - & 1 & 1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & - & 1 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & - & 1 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & - & 1 \\ 1/2 & 1/2 & 1/2 & 0 & - \end{pmatrix}$$

и

$$\begin{pmatrix} - & 1/2 & 1/2 & 1 & 1 \\ 1/2 & - & 1 & 0 & 1 \\ 1/2 & 0 & - & 1 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 & - & 1/2 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 & - \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} - & 1 & 1 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & - & 1/2 & 1 & 1 \\ 0 & 1/2 & - & 1 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 0 & - & 1 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & - \end{pmatrix}.$$

В обеих парах числа v_i, n_i, p_i совпадают для всех i. Непосредственно перебрав все тройки и приравняв для каждой пары суммарные нетранзитивности, получим:

$$\begin{cases} 1 + 9y = 3x + 6y \\ 1 + 2x + 3y = 4x + 3y \end{cases}$$

Решив эту систему, получим $x = 1/2$, $y = 1/6$.

б) Рассуждая так же, как в задаче 3, получаем

$$NT = \frac{((n^3 - n) - \sum n_i(n_i + 2) - 3\sum(v_i - p_i)^2)}{24}$$

10. а) Для краткости положим $M = [N/2]$. Пусть в турнире X таких участников, каждый из которых увеличил свое количество очков более чем на M. Прирост их суммы очков обозначим D. Тогда $D > XM$. Сумма очков в поединках между данными участниками всегда одна и та же. Прирост достигается в матчах с другими участниками. Максимален он в том случае, если в первом турнире данные X спортсменов всем проиграли, а во втором турнире у всех выиграли. Тогда $D = X(N - X)$. Значит, $XM \leq X(N - X)$. Если $X > 0$, то отсюда $X < N - X$. При $X = 0$ это неравенство также выполняется. Так как X — целое, то отсюда следует, что $X < N/2$.

    Пусть теперь Y — число участников, каждый из которых уменьшил свое количество очков более чем на M. Аналогично, $Y < N/2$. Сложив последние два неравенства, получаем искомый результат.

    б) Пусть 1-й участник выиграл у всех, 2-й - у всех, кроме первого, и т.д. (i-й участник набрал $N - i$ очков). Далее, пусть таблица второго турнира имеет аналогичный вид, но участники сдвинулись по кругу на M (где снова $M = [N/2]$): 1-й занял $(M + 1)$-е место, 2-й — $(M + 2)$-е место, ..., $(N - M)$-й - последнее место, $(N - M + 1)$-й - первое место, ..., N-й - M-е место. Тогда те, кто в первом турнире занял первые $N-M$ мест, ухудшили свой результат на M очков, а остальные улучшили его на $N-M$. Но всегда $N-M \leq M$, поэтому минимальное изменение равно M.

в) Участники турнира делятся на тех, кто увеличил свою сумму очков не менее чем на $N/2$ и кто ее, соответственно, уменьшил. Хотя бы одна из этих групп включает не менее $N/2$ спортсменов. Пусть, например, такова первая группа, и в ней X спортсменов. Если D - прирост их суммы очков, то $D \geq XN/2$. Эта сумма увеличилась за счет матчей с остальными $N-X$ участниками, поэтому $D \leq X(N-X)$. Отсюда $N-X \geq N/2$. Но по предположению $X \geq N/2$. Значит, $X = N/2$, и оба неравенства обращаются в равенства. Первое из этих равенств означает, что все спортсмены первой группы увеличили свою сумму очков ровно на $N/2$. Как следует из доказанного, вторая группа состоит из $N-X = N/2$ участников, поэтому к ней применимо такое же рассуждение.

11. Пусть не все набрали одинаковое число очков. Пусть, далее, занявшие первое место набрали K очков, а последнее — L очков. Коэффициент занявших первое место — это сумма K чисел, каждое из которых не меньше L. Значит, этот коэффициент не меньше KL. Аналогично, коэффициент занявших последнее место — это сумма L чисел, каждое из которых не больше K. Поэтому коэффициент занявших последнее место не превосходит KL. Если коэффициенты первых и последних равны, то они равняются KL. Это возможно только в том случае, если занявшие первое место выиграли только у (некоторых) набравших L очков, т.е.занявших последнее место, и обратно.

    Если первое место заняли более 1 спортсмена, то один из них выиграл у другого, что противоречит предыдущему. Значит, на первом месте 1 спортсмен - аналогично и на последнем. По условию в турнире есть третий участник. Из предыдущего следует, что он выиграл и у первого, и у последнего. Но тогда он набрал больше очков, чем первый, так как первый мог выиграть только у последнего. Получено искомое противоречие.

12. Пусть N обозначает число участников турнира МИНУС 1 (т.е. число встреч, сыгранных каждым участником). Одного из набравших наибольшее число очков назовем чемпионом. Тех, кто ему проиграл (соответственно выиграл у него), для краткости называем просто "проигравшими" ("выигравшими"). Пусть, далее, $M = [(N^2-1)/4]$. Покажем, что коэффициент чемпиона не ниже M. Пусть чемпион набрал K очков. Число "выигравших" равно $N-K$, и каждый из них набрал не больше чемпиона, поэтому в сумме "выигравшие" набрали не больше $(N-K)K$. Общая сумма очков во всех матчах равна $N(N+1)/2$. Поэтому сумма очков "проигравших" (т.е. коэффициент чемпиона) не меньше, чем $N*(N+1)/2-K-(N-K)*K = N*(N+1)/2-K*(N+1-K) \geq N*(N+1)/2-(N+1)^2/4 = (N+1)/2*(N-1)/2 = (N^2-1)/4$. Так как коэффициент чемпиона - целое число, то он не меньше M.

    Теперь покажем, что средний коэффициент участников не больше M, откуда и следует утверждение задачи. Если спортсмен набрал X очков, то эти очки внесут вклад в коэффициенты тех $N-X$ участников, которые у него выиграли. В общей сумме коэффициентов появится слагаемое $X(N-X)$. Оно не превосходит $N^2/4$, но так как обязано быть целым, то при нечетном N не превосходит и $(N^2-1)/4$. Таким образом, оно не больше M.

    Сумма коэффициентов равна сумме $(N+1)$ такого слагаемого. Чтобы получить средний коэффициент, нужно эту сумму разделить на N+1. Поэтому средний коэффициент участника турнира не выше M, что и требовалось.

13. Докажем сначала, что доля неправильных встреч всегда меньше $\frac{3}{4}$. Пусть n - число игроков, $m = [n/2]$. Игроков, занявших первые m мест, назовем сильными, а остальных слабыми (между участниками с одинаковой суммой очков места распределяются произвольно). Пусть x - число правильных партий между сильными и слабыми. Сумма очков, набранных сильными во встречах между собой, равна $m(m-1)/2$, а во встречах со слабыми не больше x. Поэтому средний результат сильного не больше $(m-1)/2 + x/m$. Аналогично, средний результат слабого не меньше $(n-m-1)/2 + (m(n-m)-x)/(n-m) = (n+m-1)/2 - x/(n-m)$. Если есть неправильные партии, то не все игроки набрали поровну, и средний результат сильного больше, чем слабого. Отсюда $x > m(n-m)/2 \geq (n^2-1)/8$. Так как общее число партий равно $n(n-1)/2$, то доля правильных партий больше $(n+1)/4n > 1/4$.

    Теперь докажем, что доля неправильных партий может быть сколь угодно близка к $\frac{3}{4}$. Возьмем сначала турнир из $2k+1$ игроков, в котором каждый участник с номером $i \leq k$ проиграл участникам с номерами $i+1, \ldots, i+k$ и выиграл у остальных, а каждый участник с номером $i > k$ выиграл у участников с номерами $i-k, \ldots, i-1$ и проиграл остальным. Теперь "размножим" каждого участника, заменив его блоком из k новых, и пусть игроки из разных блоков играют друг с другом так же, как соответствующие прежние участники, а игроки из одного блока играют вничью. Занумеруем игроков в каждом блоке числами от 1 до k. Будем менять результаты участников из блока $k+1$ во встречах с блоком $k+1-i$ $(i = 1, \ldots, k)$. Пусть j-й игрок блока $k+1$ при $j \leq k-i$ играет вничью с игроками $j+1, \ldots, j+i$ и выигрывает у остальных игроков блока $k+1-i$, а при $j > k-i$ выигрывает у игроков $j-k+i, \ldots, j-1$ и делает ничью с остальными. В партиях блока $k+1$ с блоком $k+1+i$ заменим ничьими ik проигрышей по аналогичной схеме. Теперь сумма очков одинакова внутри каждого блока и убывает при росте номера блока. Число неправильных партий составляет $\frac{3}{2}k^4 - \frac{k^3}{2} - k^2$. Поскольку общее число партий равно $k(2k+1)(k(2k+1)-1)/2$, то при больших k доля неправильных партий будет сколь угодно близка к $\frac{3}{4}$.

14. Рассмотрим сумму $\sum_i s_i B_i$. Из определения B_i следует, что эта сумма состоит из слагаемых вида $\pm s_i s_j$, по всем парам участников, встреча которых закончилась не вничью. При этом каждое такое произведение входит в сумму дважды с разными знаками, т.е. сумма равна нулю. Если все B_i одного знака, то они отличны от нуля тогда и только тогда, когда $s_i = 0$. Но, если $s_i = 0$, то $B_i < 0$, следовательно ответ на вопрос п.а) положительный. На вопрос п.б) ответ отрицательный. Например, пусть один участник проиграл все встречи, а встречи остальных между собой закончились вничью. Тогда коэффициенты всех участников, кроме последнего, равны нулю, а коэффициент последнего отрицателен.

15. а) Странный игрок набирает очки только во встречах с теми, кто получил не меньше. Поэтому он обладает следующим свойством:

    (*) *Количество очков, полученное странным игроком, меньше числа игроков, набравших столько же или больше (включая его самого).*

    Пусть игрок A набрал больше, чем странный (который по определению выиграл у всех, кто набрал больше его). Тогда сумма очков игрока A заведомо больше, чем число игроков, имеющих столько или больше, чем он. Как следствие, А не обладает свойством (*).

Ответ на поставленный вопрос теперь ясен: количество очков странного участника — это наибольшее количество очков, которое меньше числа игроков, набравших столько или больше.

Отметим, что мы заново доказали, что все странные имеют одинаковую сумму очков.

б) Все странные игроки делят одно и то же место в турнирной таблице. Пусть это место не является первым. Тогда участник, находящийся на первом месте, проиграл всем странным. Но он проиграл меньше встреч, чем выиграл. Значит, число проигранных им матчей меньше $N/2-1$ и (как целое) не больше $[N/2]-1$, что и требуется. Если же странные участники делят первое место, то аналогичное рассуждение можно применить к последнему месту.

в) Пусть $M=[N/2],\ 1 \leq L \leq M-1$, игроки занумерованы от 1 до N и разделены на 4 группы. В первую группу включим участников с номерами от 1 до L, во вторую — от $L+1$ до M, в третью — от $M+1$ до $N-L$ и в четвертую — остальных. Пусть при этом игроки первой группы проиграли все матчи со второй группой и выиграли матчи с третьей и четвертой. Четвертая группа выиграла у второй и проиграла первой и третьей. Все остальные встречи закончились вничью. Нетрудно подсчитать, что игроки первой группы набрали по $N-M+(L-1)/2$ очков, т.е. не меньше $N/2$. Игроки четвертой группы получили по $M-(L+1)/2$ очков — не больше $N/2-1$. Во второй и третьей группах результат равен $(N-1)/2$. Отсюда следует, что вторую группу составляют странные, первую — сильные, третью — средние, а четвертую — слабые. При этом число странных равно $[N/2]-L$, и за счет выбора L его можно сделать любым натуральным числом в пределах от 1 до $[N/2]-1$.

г) Рассмотрим "среднеарифметического" сильного игрока (т.е. сложим очки, набранные сильными, и разделим на число таких участников). Этот условный игрок выиграл у стольких же сильных, скольким и проиграл. При этом он проиграл всем странным. Поэтому сумма очков "среднеарифметического" сильного игрока не больше, чем число средних и слабых плюс половина числа сильных. Аналогично, результат "среднеарифметического" странного игрока не меньше, чем число сильных плюс половина числа странных. Но эта сумма меньше, чем в первом случае. Как следствие, общее число средних и слабых больше, чем половина общего числа сильных и странных. А это и означает, что сильные и странные составляют менее двух третей от всего состава игроков.Утверждение о численности странных вместе со слабыми доказывается аналогично.

д) Построение примера по существу содержится в решении п. г). Разделим участников турнира на три группы, причем в первых двух по $[N/3]+1$ человек. Пусть игроки первой группы выиграли все матчи у игроков второй группы. Аналогично, вторая группа выиграла у третьей, а третья — у первой. Внутри каждой группы все матчи закончились вничью. Нетрудно убедиться, что третья группа состоит из странных, первая из сильных и вторая из слабых.

е) Пусть число игроков нечетно, они занумерованы от 1 до $2M+1$ и меньшие номера выиграли у б′ольших со следующими исключениями. Вничью сыграли первый с M-м и $(M+2)$-й с последним. Игрок с номером $M+1$ выиграл у всех предыдущих и проиграл всем последующим. Нетрудно убедиться, что сумма очков убывает с ростом номера и $(M+1)$-й игрок — странный.

ж) Нам потребуется следующая

Лемма. *Пусть в круговом турнире все участники набрали различное число очков и сделали [в общей сложности] ровно одну ничью. Тогда:*

1) разность соседних результатов не может быть больше 2;

2) если разность соседних результатов равна 2, то игроки не участвовали в ничьей.

Доказательство леммы. Пусть лемма неверна. Выберем турнир с наименьшим числом участников, в котором она нарушается. Очевидно, $N > 2$. Для краткости вместо "разность соседних результатов" будем говорить просто "разность".

Пусть S — сумма всех разностей, D — разность, нарушающая 1) и 2). Число полуцелых разностей среди остальных игроков обозначим K. Каждая полуцелая разность не меньше $1/2$, а целая — не меньше 1. Поэтому

$$S \geq D + N - 2 - K/2 \ . \qquad (**)$$

Результаты участников ничьей — полуцелые, а остальных — целые. Поэтому в каждой полуцелой разности обязательно "участвует" один из тех, кто сделал ничью, и число таких разностей не больше 4.

Пусть нарушено 1), т.е. $D > 2$. Если $D \geq 3$, то ввиду (**) $S \geq N-1$ (поскольку $K \leq 4$). Если же $D = 5/2$, то $K \leq 3$ (так как D полуцелое), и опять $S \geq N-1$. Пусть теперь нарушено 2), т.е. $D = 2$ и один из "участников" этой разности участвовал в ничьей. Его результат — полуцелый, поэтому второй "участник" разности D тоже имеет полуцелый результат и участвовал в ничьей. Отсюда $K \leq 2$, и ввиду (**) снова $S \geq N-1$.

Итак, во всех случаях разность между наилучшим и наихудшим результатами не меньше $N-1$. Но больше она и не бывает, а равенство означает, что один из участников у всех выиграл, а другой — всем проиграл. В разности D не участвует хотя бы один из "крайних" игроков. Удалим его из турнирной таблицы. Утверждение леммы по-прежнему нарушается. Но число участников уменьшилось, что и дает противоречие. Лемма доказана.

Предположим, что все участники турнира набрали разное количество очков, имеется ровно одна ничья и при этом есть странный игрок А. Согласно задаче 2б) он не может занять первое или последнее место. Игроки Б и В, находящиеся на соседних местах, отличаются от А по сумме очков не меньше чем на $1/2$. Поэтому между собой они различаются не меньше чем на 1.

Удалим А из турнирной таблицы. Результаты слабых (которые выиграли у А) уменьшатся на 1, а результаты сильных останутся без изменения. Поэтому у всех игроков снова будет разное число очков. Ничья сохранится, поскольку А (как странный) в ней не участвовал. Результаты Б и В теперь соседние, и их разность не меньше 2. Но в силу леммы это означает, что она равна 2, причем Б и В не участвуют в ничьей.

Как следствие, в исходной таблице результаты Б и В различаются на 1. Значит, оба они отличаются на $1/2$ от результата А. Но А, Б и В не участвуют в ничьей, поэтому их результаты — целочисленные. Получено искомое противоречие.

6 Дополнительные задачи

16. Ответ неизвестен.

17. а) Указание: докажите, что, если A выиграл у B, то A набрал больше очков, чем B.

    в) Например, можно рассмотреть турнир с 5 участниками, набравшими, соответственно, 3, 3, 2, 1.5 и 0.5 очков.

18. а) Ответ: да.

19. а) Указание: если для того, чтобы у каждых r участников был общий победитель, нужно не менее n участников, то для того, чтобы у каждых $r+1$ был общий победитель, требуется не менее $2n+1$ участников.

    б) Ответ: 240.

    в) Из задачи а) следует, что требуется не менее 15 участников. Однако, насколько известно жюри, при $n = 15$ подходящую таблицу составить невозможно. Известен пример при $n = 19$. Метод его построения: занумеруем участников вычетами по модулю 19 от 0 до 18, и установим следующее правило: a выигрывает у b, если $a - b$ - квадратичный вычет по модулю 19. Напомним, что число c называется квадратичным вычетом, если оно сравнимо с квадратом по данному модулю. Например, квадратами по модулю 19 являются (кроме нуля, который не в счет) числа 1, 4, 5, 6, 7, 9, 11, 17.

    Нерешенная проблема: доказать, что та же конструкция позволяет построить турнир, в котором любые r участников имеют общего победителя, каково бы ни было r, если только выбрать (при данном r) достаточно большое p.

    г) Доказательство существования нужной турнирной таблицы проводится следующим образом: пусть число участников N достаточно велико (достаточно, например, взять $N = 2000$), рассмотрим ВСЕ турнирные таблицы для этого числа участников, и сосчитаем долю таблиц, в которых у данных 5 участников нет общего победителя. Она равна, как легко сообразить, $(1 - \frac{1}{32})^{n-5}$. Таким образом, она очень мала. Отсюда легко доказать, что доля тех турниров, в которых любая пятерка имеет общего победителя, больше нуля. Другое, эффективное построение таблицы предложили участники из Краснодара, но оно требует огромного числа участников.