РЕАЛИЗУЕМОСТЬ ГРАФОВ С ВРАЩЕНИЯМИ

Каибханов Ашум, Пермяков Дмитрий и Скопенков Аркадий.

ЗАДАЧИ, ПРЕДЛОЖЕННЫЕ ДО ПРОМЕЖУТОЧНОГО ФИНИША.

Введение и мотивировки.

Проблема вложимости (т.е. реализуемости без самопересечений) графов (или графов с дополнительной структурой) в плоскость, тор, лист Мебиуса (и другие поверхности) — одна из основных в топологической теории графов [Sha, LaZv]. Одна из красивых форм решения этой проблемы — найти несколько таких подграфов, что произвольный граф G вложим в данную поверхность тогда и только тогда, когда G не содержит ни одного из таких подграфов. Цель предлагаемого цикла задач — рассказать об интересных результатах такого рода. Основные результаты — задачи 2e, 4b и 8bc (фольклор, [ReSk00]), X5b [Man05, Per05], 12abc [Per]. Задачи 4c, 9 и 12d — нерешенные.

Если условие задачи является формулировкой утверждения, то задача состоит в том, чтобы его доказать.

Вводные задачи. Планарность графов.

В этом пункте напоминаются основные понятия теории графов. Читатель, знакомый с теорией графов, может пропустить этот пункт, возвращаясь к нему по мере необходимости. Теоремой Жордана, формулой Эйлера и ее обобщениями, сформулированными в тексте, можно пользоваться без доказательства.

Графом называется конечное множество, в котором выделены некоторые одноэлементные и двухэлементные подмножества с кратностями. Элементы этого множества называются *вершинами* графа. Выделенные подмножества называются *ребрами* графа.

Вершины изображаются точками (например, на плоскости или в пространстве). Каждое ребро, соответствующее двухэлементному выделенному подмножеству, изображается ломаной (или кривой), соединяющей соответствующие точки. Каждое ребро, соответствующее одноэлементному выделенному подмножеству $\{A\}$, изображается замкнутой ломаной (или кривой), соединяющей эту вершину A саму с собой. Таким образом, допускаются петли и кратные ребра. На изображении ломаные могут пересекаться, но точки пересечения (кроме двух концов ребра) не являются вершинами. Для простоты будем рассматривать только те рисунки, на которых ребра изображаются ломаными (а не произвольными кривыми).

Путем в графе называется конечная последовательность вершин, в которой любые две соседние вершины соединены ребром. *Циклом* называется путь, в котором первая и последняя вершины совпадают. Граф называется *связным*, если любые две его вершины можно соединить путем. Граф называется *деревом*, если он связен и не содержит несамопересекающихся циклов. Ясно, что в любом связном графе существует дерево, содержащее все его вершины. Такое дерево называется *максимальным деревом.*

Степенью вершины графа называется число выходящих из нее ребер.

Граф называется *планарным*, если его можно нарисовать на плоскости так, чтобы внутренности ребер (то есть ребра без их концов) не пересекались и не самопересекались. Например, любое дерево и любой граф, образованный вершинами и ребрами некоторого выпуклого многогранника — планарные. А графы K_5 и $K_{3,3}$ (рис. k5k33) не являются планарными. Это можно доказать путем небольшого перебора с использованием следующей теоремы Жордана.

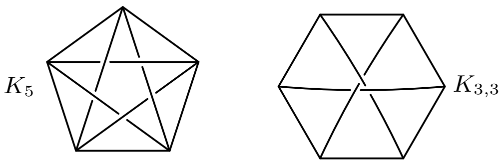

Рисунок k5k33

Теорема Жордана. *Замкнутая несамопересекающаяся кривая на плоскости делит плоскость ровно на две части. (При этом одна часть ограничена, другая неограничена, причем две точки плоскости, не принадлежащие кривой, лежат в одной части тогда и только тогда, когда их можно соединить ломаной, не пересекающей кривой).*

Плоским графом называется изображение графа на плоскости без самопересечений. Иногда такое изображение называют просто графом, но это неточно, поскольку один и тот же планарный граф можно нарисовать (без самопересечений) на плоскости разными способами (рис. dif). Из теоремы Жордана следует, что *любой плоский граф разбивает плоскость на конечное число связных частей.* Эти части называются *гранями* плоского графа.

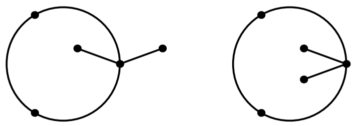

Рисунок dif

Формула Эйлера. *Для связного плоского графа с V вершинами, E ребрами и F гранями имеем $V-E+F=2$.*

0. Применения формулы Эйлера. (a) K_5 и $K_{3,3}$ не планарны.

(b) В любом плоском графе, отличном от точки, $2E \geq 3F$ и $E \leq 3V-6$.

(c) В любом плоском графе есть вершина степени не более 5.

(d) В любом многограннике есть либо треугольная грань, либо вершина степени 3.

Грубо говоря, *подграф* данного графа — это его часть. Формально, граф G называется *подграфом* графа H, если каждая вершина графа G является вершиной графа H, и каждое ребро графа G является ребром графа H. (При этом две вершины графа G, соединенные ребром в графе H, не обязательно соединены ребром в графе G.)

Ясно, что любой подграф планарного графа планарен. Ясно, что существует не планарный граф, не содержащий подграфов, изоморфных K_5 и $K_{3,3}$.

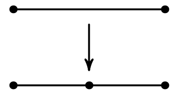

Рисунок podr

Операция *подразделения ребра* графа показана на рис. podr. Два графа называются *гомеоморфными*, если от одного можно перейти к другому при помощи операций подразделения ребра и обратных к ним. (Или, эквивалентно, если существует граф G, полученный из обоих данных графов операциями подразделения ребра.)

Ясно, что гомеоморфные графы являются или не являются планарными одновременно.

Следующая теорема дает простой критерий планарности графов.

Теорема Куратовского. *Граф является планарным тогда и только тогда, когда он не содержит подграфа, гомеоморфного графу K_5 или $K_{3,3}$ (рис. k5k33).*

Вводные задачи. Реализуемость графов с вращениями.

1a. (Б. Френкин) Улицы города (с двусторонним движением) идут либо с севера на юг, либо с запада на восток. Из одного перекрестка выехало три велосипедиста: первый на север, второй на восток и третий на запад. Все они приехали на другой перекресток: первый с севера, второй с востока и третий с запада. Докажите, что хотя бы один из велосипедистов пересекал следы другого.

Полуребром графа называется пара из ребра и его концевой вершины (или, неформально, конец ребра). *Графом с ориентированными вращениями* (кратко: *R-графом*) называется граф, для каждой вершины которого указан ориентированный циклический порядок выходящих из нее полуребер. (Синонимы: графы с системами вращений, ориентируемые 2-утолщения, эскизы.)

1. (b) Сколько R-графов с занумерованными вершинами соответствует (обычному) графу K_4?

(c)* То же с незанумерованными вершинами (т.е. с точностью до изоморфизма).

R-граф называется *R-планарным*, если его можно изобразить без самопересечений на плоскости так, чтобы для каждой вершины обход выходящих из нее ребер по часовой стрелке совпадал бы с указанным ориентированным циклическим порядком. Для R-графов понятия R-подграфа, R-гомеоморфности и т. д. определяются аналогично случаю обычных графов.

2. (a) Какие R-графы, соответствующие графу K_4, являются R-планарными?

(b) Любое дерево с любой системой вращений R-планарно.

(c) Любое R-дерево с n вершинами можно изобразить (с учетом вращений) без самопересечений на плоскости вне (внутренности) многоугольника $A_1 \dots A_n$ так, чтобы вершины дерева были бы вершинами многоугольника.

(d) Пусть дан R-граф. Выделим в нем максимальное R-дерево. Покрасим оставшиеся ребра в красный цвет. Из каждого красного ребра вырежем его 'среднюю треть', как на рис. tret. Получится R-дерево T. Расположим его так, как в (c). Пусть существуют вершины A, B, A_1, B_1 дерева T, лежащие на границе многоугольника в этом порядке, причем вершины A и A_1 лежат на одном красном ребре, а вершины B и B_1 — на другом. Тогда исходный R-граф содержит R-подграф, R-гомеоморфный одному из изображенных на рис. 8theta.

(e) **Критерий R-планарности.** R-граф R-планарен тогда и только тогда, когда он не содержит R-подграфов, R-гомеоморфных изображенным на рис. 8theta. Замечание: необходимость уже доказана (с использованием теоремы Жордана) на представлении.

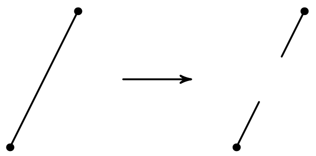

Рисунок tret

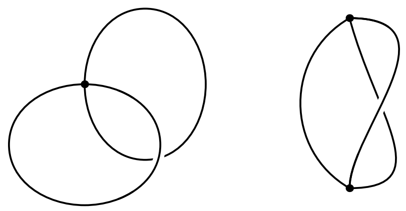

Рисунок 8theta

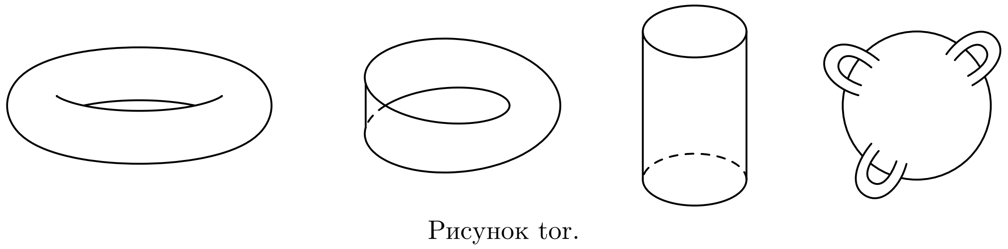

Рисунок tor.

3. Тор, лист Мебиуса, сфера и цилиндр (т.е. кольцо) нарисованы на рис. tor.

(a) Можно ли нарисовать без самопересечений (т.е. вложить, или реализовать) граф K_5 на торе?

(b),(c) Тот же вопрос для сферы и цилиндра (т.е. кольца).

(d) Можно ли нарисовать без самопересечений граф $K_{3,3}$ на листе Мебиуса?

Букетом называется граф с одной вершиной (из этой вершины выходит несколько петель). Граф называется *кубичным*, если из каждой вершины выходит 3 ребра.

4. (a) R-букет R-планарен тогда и только тогда, когда он не содержит 'восьмерки' (рис. 8theta).

(b)* Найдите аналог критерия (a) для R-вложений (R-реализаций) R-букетов в тор.

(c)* Найдите аналог теоремы планарности для R-вложений кубичных R-графов в тор.

Вводные задачи. Реализуемость графов с крестовой структурой.

Цикл называется *эйлеровым*, если он проходит по каждому *ребру* ровно по одному разу.

Пусть каждая вершина графа G имеет степень 4. Пусть T — эйлеров цикл в этом графе. Возьмем новый граф $S(T)$, являющийся несамопересекающимся циклом, ребра которого соответствуют всем ребрам эйлерова цикла T и идут в том же порядке. Таким образом, каждой вершине данного графа G соответствует две вершины цикла $S(T)$. Для каждой вершины графа G соединим ребром пару соответствующих ей вершин цикла $S(T)$. Такие ребра называются *хордами.* Объединение графа $S(T)$ и построенных хорд называется *хордовой диаграммой.* Две хорды *скрещиваются*, если соответствующие им вершины P и Q графа G идут вдоль эйлерова цикла T в порядке $PQPQ$.

X1. (a) Хордовая диаграмма (эйлерова цикла графа степени 4) планарна тогда и только тогда, когда ее хорды можно так разбить на два множества, что любые две хорды одного множества не скрещиваются.

(b) Граф степени 4 планарен тогда и только тогда, когда в нем найдется эйлеров цикл, хордовая диаграмма которого планарна.

Полуребром графа называется пара из ребра и его концевой вершины (или, неформально, конец ребра). *Графом с крестовой структурой* (кратко: *X-графом*) называется граф, степень каждой вершины которого равна 4, причем для каждой вершины фиксировано разбиение четырех входящих в нее полуребер на две пары. Иными словами, крестовая структура на графе степени 4 — это раскраска каждого его полуребра в черный или белый цвет, при которой из каждой вершины выходит по два черных и два белых полуребра (красятся именно полуребра, а не сами ребра). Далее мы будем использовать такую раскраску.

X2. В любом X-графе существует эйлеров цикл, при обходе вдоль которого в каждой вершине цвет полуребра меняется.

Общая вершина двух путей, не имеющих общих ребер, называется *точкой перекрестья*, если один из этих путей проходит по белым полуребрам, выходящим из этой вершины. (Из этого следует, что второй путь проходит по черным.)

X3. Если у двух циклов X-графа ровно одна общая вершина, и она является для этих циклов точкой перекрестья, то найдутся и два несамопересекающихся цикла с тем же свойством.

X-граф называется *X-планарным*, если его можно изобразить без самопересечений на плоскости таким образом, что при обходе вокруг каждой вершины белые и черные полуребра чередуются.

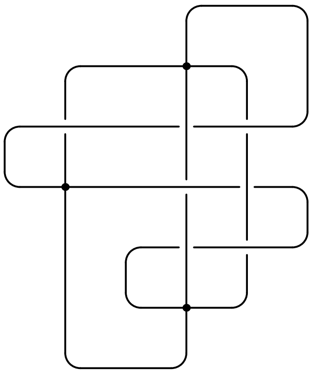

Рисунок xgraf.

X4. (a) X-граф на рис. xgraf X-планарен.

(b) Верно ли, что любой планарный X-граф X-планарен?

X5. На представлении (с использованием теоремы Жордана) доказано, что если у двух несамопересекающихся циклов X-графа ровно одна общая вершина, и она является для этих циклов точкой перекрестья, то этот X-граф не является X-планарным.

(a) Если среди общих вершин двух несамопересекающихся циклов X-графа ровно одна является для этих циклов точкой перекрестья, то этот X-граф не является X-планарным.

(b)* **Теорема X-планарности X-графов.** X-граф X-планарен тогда и только тогда, когда он не содержит двух несамопересекающихся циклов без общих ребер, имеющих ровно одну вершину перекрестья.

ЗАДАЧИ, ПРЕДЛОЖЕННЫЕ ПОСЛЕ ПРОМЕЖУТОЧНОГО ФИНИША.

После промежуточного финиша принимаются задачи: 1c, 4b, 4c, X2, X5.

Реализуемость графов с крестовой структурой.

X6. (a) Если в X-графе найдется два цикла с нечетным числом точек перекрестья, то найдется и два цикла ровно с одной точкой перекрестья.

(b) Если у двух циклов X-графа ровно одна общая вершина, и она является для этих циклов точкой перекрестья, то этот X-граф не является X-планарным.

(c) Пусть в X-графе два цикла не имеют общих ребер и имеют конечное число общих вершин. Если среди этих вершин точками перекрестья является нечетное число вершин, то этот X-граф не является X-планарным.

X7. Назовем цикл в X-графе *поворачивающим*, если при обходе вдоль него цвет полуребра в каждой вершине меняется. Рассмотрим в некотором X-графе поворачивающий эйлеров цикл T.

(a) При обходе вдоль цикла T в каждую вершину X-графа попадаем дважды. Докажите, что если в некоторую вершину мы попадем по полуребрам *разных* цветов, то в данном X-графе найдутся два цикла ровно с одной точкой перекрестья.

(b) Пусть хордовая диаграмма цикла T такова, как на рис. diagr. Тогда в данном X-графе найдутся два цикла ровно с одной точкой перекрестья.

(c) Если хордовая диаграмма цикла T не планарна, то в данном X-графе найдется два цикла ровно с одной точкой перекрестья.

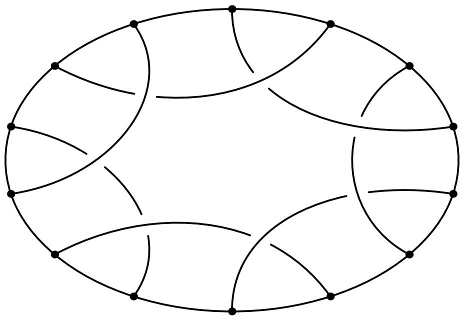

Рисунок diagr

Алгоритм распознавания рода графа.

5. Любой граф можно нарисовать без самопересечений
(a) в пространстве.
(b) на сфере с некоторым количеством ручек (рис. sferag), зависящим от конкретного графа.

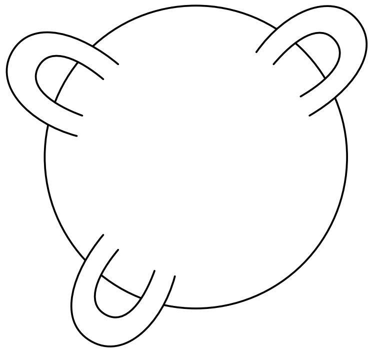

Рисунок sferag

Родом (ориентируемым) графа G называется наименьшее число g, для которого G вложим в сферу с g ручками.

6. Найдите ориентируемый род графа K_5.

Формула Эйлера для тора. *Пусть на торе нарисован без самопересечений связный граф с V вершинами и E ребрами. Назовем гранью замкнутую область на торе, ограниченную ребрами этого графа. Пусть F — число граней. Пусть каждая грань разбивается любой ломаной с концами на границе этой грани (т.е. топологически эквивалентна замкнутому диску на плоскости). Тогда $V - E + F = 0$.*

7. (a) K_8 не вложим в тор.
(b) Для любой сферы с ручками найдется граф, не вложимый в нее.

Формула Эйлера для сферы с g ручками. *Пусть на сфере с g ручками нарисован без самопересечений связный граф с V вершинами и E ребрами. Назовем гранью замкнутую область на сфере с ручками, ограниченную ребрами этого графа. Пусть F — число граней. Пусть каждая грань разбивается любой ломаной с концами на границе этой грани (т.е. топологически эквивалентна замкнутому диску на плоскости). Тогда $V - E + F = 2 - 2g$.*

Фиксируем ориентацию на сфере с g ручками. R-граф называется *R-вложимым* в сферу с g ручками, если его можно изобразить без самопересечений на сфере с g ручками так, чтобы для каждой вершины обход выходящих из нее ребер по часовой стрелке совпадал бы с указанным ориентированным циклическим порядком.

Родом (ориентируемым) R-графа называется наименьшее число g, для которого R-граф R-вложим в сферу с g ручками.

8. (a) Найдите род каждого из R-графов, соответствующих графу K_4.

(b) Найдите алгоритм распознавания рода R-графа, используя формулу Эйлера для сферы с g ручками.

(c) Найдите алгоритм распознавания рода графа.

9.* Для данного g опишите все R-букеты, не являющиеся R-вложимыми в сферу с g ручками.

Вложимость графов с системой вращений в лист Мебиуса.

В этих задачах можно использовать без доказательства следующий красивый факт:
из листа Мебиуса невозможно вырезать два непересекающихся листа Мебиуса.

Графом с вращениями называется граф вместе с расстановкой нулей и единиц на его ребрах вместе с, для каждой вершины графа, ориентированным циклическим порядком выходящих из нее полуребер. (Осторожно: в математике графом с вращениями называется класс эквивалентности указанных объектов с точностью до инвертирования, определенного ниже). Будем называть графы с вращениями сокращенно UR-графами. Для UR-графов понятия UR-подграфа, UR-гомеоморфности и т. д. определяются аналогично случаю обычных графов.

10. Рассмотрим граф K_4 с занумерованными вершинами. Сколько существует расстановок нулей и единиц на его ребрах вместе с, для каждой вершины графа, ориентированным циклическим порядком выходящих из нее полуребер (т.е. сколько UR-графов с занумерованными вершинами соответствует (обычному) графу K_4)?

UR-граф называется *UR-вложимым в лист Мебиуса*, если его можно изобразить без самопересечений на листе Мебиуса и окружить каждую вершину маленькой ориентированной окружностью так, чтобы выполнялись следующие условия

(1) для каждой вершины обход выходящих из нее ребер вдоль ориентированной окружности довал бы заданный ориентированный циклический порядок.

(2) на ребре стоит 0 тогда и только когда, когда ориентации замкнутых кривых, построенных вокруг концов этого ребра, *согласованы вдоль этого ребра* (рис. ori).

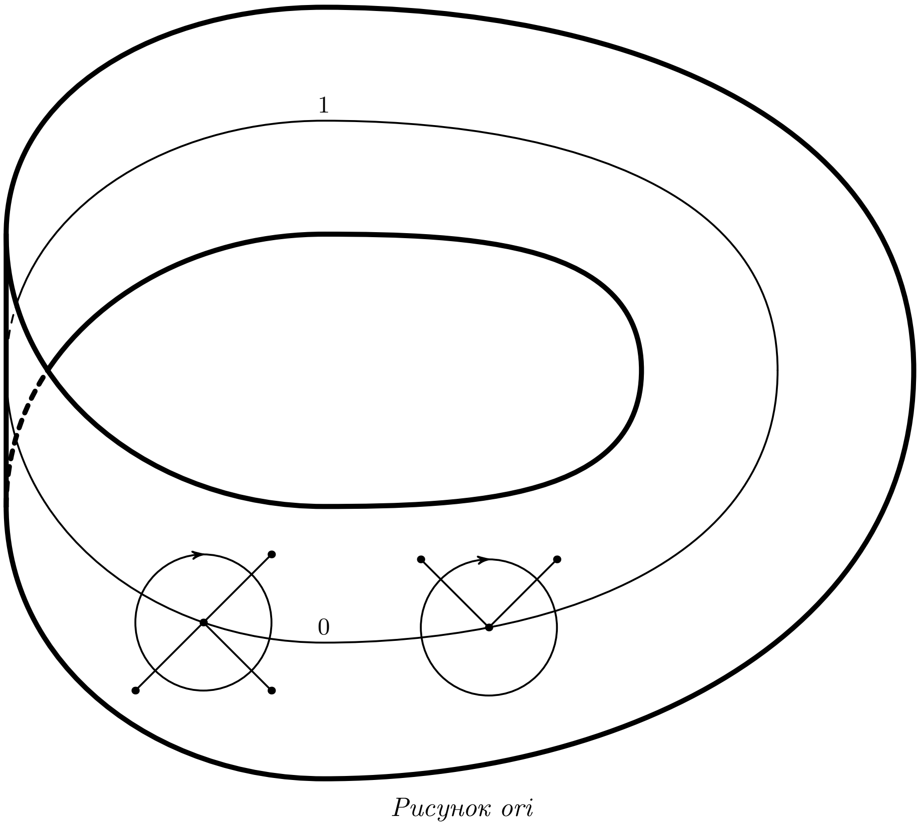

Рисунок ori

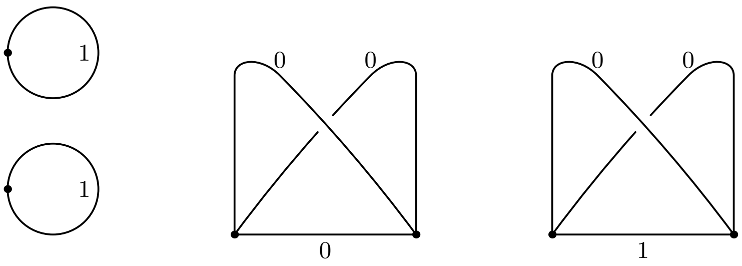

Рисунок ootheta

11. (a) UR-графы на рис. ootheta не являются UR-вложимыми в лист Мебиуса.

(b) Существует ли UR-граф, не являющийся UR-вложимым в лист Мебиуса и не содержащий UR-подграфов, UR-гомеоморфных одному из изображенных на рис. ootheta?

(c) *Инвертированием в вершине a* называется замена ориентации цикла полуребер, выходящих из a, одновременно с заменой нулей единицами, а единиц нулями на всех ребрах, выходящих из a (при этом числа на петлях не меняются). Два UR-графа называются *эквивалентными*, если от одного можно перейти к другому несколькими инвертированиями (возможно, в разных вершинах). Докажите, что эквивалентные UR-графы одновременно UR-вложимы в лист Мебиуса или нет.

(d) Если при удалении некоторого ребра из UR-графа получается дерево, то этот UR-граф UR-вложим в лист Мебиуса.

(e) Какие UR-графы, соответствующие графу K_4, являются UR-вложимыми в лист Мебиуса?

12.* (a) **Теорема вложимости кубичных UR-графов в лист Мебиуса.** Кубичный UR-граф является UR-вложимым в лист Мебиуса тогда и только тогда, когда он не содержит UR-подграфов, UR-гомеоморфных эквивалентным одному из изображенным на рис. ootheta.

(b) Найдите аналог критерия R-планарности для UR-вложений UR-букетов в лист Мебиуса.

(c) Найдите аналог теоремы вложимости *кубичных* UR-графов в лист Мебиуса для *произвольных* UR-графов.

(d) Для данного m опишите все UR-букеты, не являющиеся UR-вложимыми в граничную связную сумму m листов Мебиуса.

13.* *Графом с неориентированными вращениями* (кратко: *U-графом*) называется граф, для каждой вершины которого указан неориентированный циклический порядок выходящих из нее полуребер.

Сформулируйте и докажите аналоги вышеизложенных теорем и задач для U-графов.

РЕШЕНИЯ, РАССКАЗАННЫЕ НА ПРОМЕЖУТОЧНОМ ФИНИШЕ.

Am Ende konnte ja jede gut gelöste
Mathematikaufgabe geistigen Genuss bringen...
H. Hesse, Das Glasperlenspiel.

0. (a) Можно использовать теорему Жордана. Приведем более изящное (но по сути, аналогичное вышеуказанному) доказательство непланарности графа K_5, основанное на формуле Эйлера.

Пусть граф K_5 нарисован на плоскости без самопересечений. Тогда по формуле Эйлера $5-10+F=2$. Значит, $F=7$. Поставим около каждого ребра графа K_5, нарисованного на плоскости, стрелку вправо и стрелку влево. Тогда число стрелок равно $2E=20$. Но поскольку граница каждой грани состоит не менее чем из трех ребер, то число стрелок не меньше $3F=21>20$. Противоречие.

Основываясь на этой идее, можно доказать и непланарность графа $K_{3,3}$.

(b) **Условие:** для любого плоского связного графа без петель и кратных ребер, отличного от точки, $2E \geq 3F$ и $E \leq 3V-6$.

Решение. Нарисуем около каждого ребра графа стрелку вправо и стрелку влево. Тогда число стрелок равно $2E$. Из условия следует, что каждая грань содержит не менее трех стрелок. Поскольку $2E \geq 3F$, то $6=3(V-E+F) \leq 3V-E$, откуда $E \leq 3V-6$.

(c) Если степень каждой вершины ≥ 6, то $2E \geq 6V$. А это противоречит пункту (b).

(d) Допустим, что в некотором многограннике нет вершины степени 3 и нет треугольной грани. Т.к. это многогранник, то степень каждой вершины не менее 4. Значит, $2E \geq 4V$. Т.к. нет треугольных граней, то каждая грань содержит не менее, чем 4 ребра. Значит, $2E \geq 4F$. Следовательно $2=V-E+F \leq 0$. Противоречие.

1. (b) Ответ: $16=2^4$. Из каждой вершины графа выходит по 3 ребра. Тогда для каждой вершины существует два различных ориентированных циклических порядка выходящих из нее полуребер. Поэтому всего различных R-графов будет 2^4.

(c) Указание: порядки выходящих полуребер можно менять в 0, 1, 2, 3, 4-х вершинах. Следовательно, таких R-графов ≤ 5.

2. (a) Указание: перебор графов из задачи 1(a) с учетом симметрии.

(b),(c) Указание: индукция (отбрасывание висячей вершины).

(d) Соединим вершину A с A_1 и B с B_1 путями в дереве. Если эти пути пересекаются ровно по одной точке, то исходный R-граф содержит R-подграф R-гомеоморфный 'восьмерке' (см. рис. 8theta.). Если эти пути пересекаются ровно по одному отрезку, то исходный R-граф содержит R-подграф R-гомеоморфный букве 'тета' (см. рис. 8theta.). Остальные случаи сводятся к уже рассмотренным.

(e) Пусть R-граф не содержит R-подграфов, R-гомеоморфных изображенным на рис. 8theta. Проделаем конструкцию из условия пункта (d). Тогда из пункта (d) следует, что если вершины A, A_1 лежат на одном красном ребре, а B, B_1 — на другом, то вершины A, A_1, B, B_1 лежат на границе многоугольника в этом циклическом порядке (или в противоположном). Значит, их можно соединить внутри многоугольника непересекающимися отрезками. Следовательно, исходный R-граф R-планарен.

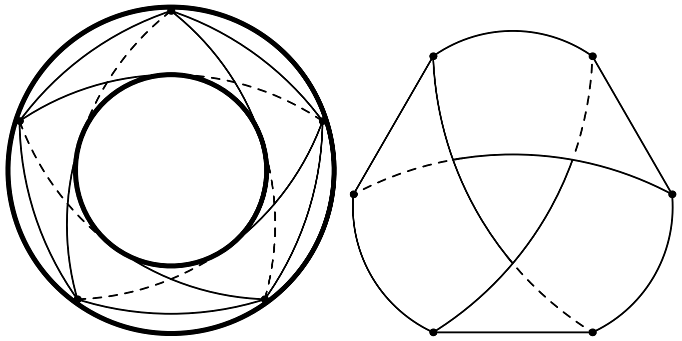

Рисунок real

3. (a) Можно, см. рис. real.

(b), (c) На сфере нельзя. От противного, пусть мы нарисовали на сфере граф K_5 без самопересечений. Если мы выкинем из сферы точку (не являющуюся вершиной K_5), то получится плоскость, а K_5 не планарен.

На цилиндре (кольце) тоже нельзя. Действительно, граф K_5 не планарен, а цилиндр (кольцо) можно изобразить на плоскости без самопересечений.

(d) Можно, см. рис. real.

X1. (a) Необходимость. Пусть хордовая диаграмма изображена на плоскости без самопересечений. Тогда объединение ее ребер, не являющихся хордами, разбивает плоскость на две части. Нужные два множества хорд — те, что в одной части и те, что в другой части.

Достаточность. Пусть хорды разбиты на два множества требуемым образом. Изобразим хорды первого множества ломаными внутри цикла. Их можно выбрать непересекающимися, поскольку соответствующие хорды не скрещиваются. Аналогично хорды второго множества можно изобразить непересекающимися ломаными вне цикла. Таким образом, хордовая диаграмма планарна.

(b) Достаточность. Пусть хордовая диаграмма некоторого эйлерова цикла планарна. Стянем в плоскости каждую хорду в точку. (рис. point) Получим вложение графа в плоскость.

Необходимость. Начнем двигаться из некоторой вершины A и будем двигаться, выходя из каждой вершины по ребру, соседнему по грани с тем, по которому пришли. При этом по ребрам разрешается проходить не более, чем по одному разу. Будем так двигаться, пока это возможно. Завершиться это движение может только в A. Более того, мы вернулись в A по ребру, лежащему в одной по грани с начальным ребром (иначе мы еще можем продолжить движение). По окончании движения получим цикл T', проходящий через каждую вершину по ребрам, лежащим в одной грани (в том числе и в A, как показано ранее). Если T' не эйлеров, то из некоторой его вершины B выходят ребра, не принадлежащие T'. Пройдем из B по циклу T', а затем продолжим движение так же, как при построении цикла T'. В итоге получим больший цикл, также проходящий через каждую вершину по ребрам, лежащим в одной грани. Таким образом можно увеличивать цикл, пока он не будет содержать все ребра графа.

Покажем, что хордовая диаграмма построенного эйлерова цикла T планарна. Расцепим эйлеров цикл T в каждой вершине, соединив в плоскости расцепленные точки хордами (рис. chord). Получим хордовую диаграмму цикла T, уже изображенную на плоскости.

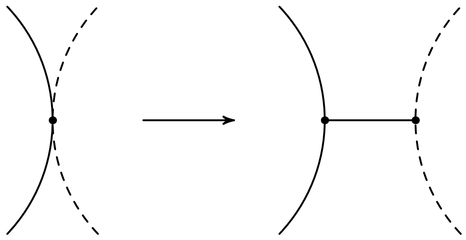

Рисунок chord

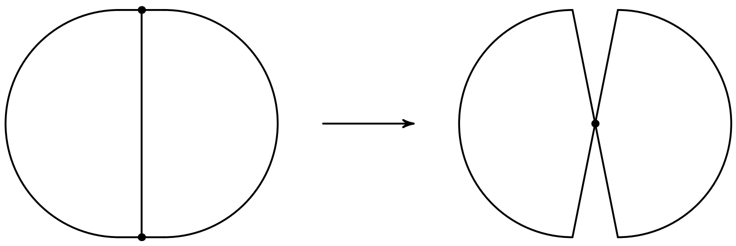

Рисунок point

X3. Пусть K_1 и K_2 - два цикла ровно с одной точкой перекрестья A. Рассмотрим несамопересекающийся цикл K_1^+ из ребер цикла K_1, содержащий вершину A. Аналогично определим цикл K_2^+. Тогда K_1^+ и K_2^+ и будут искомыми циклами.

X4.

(a) См. рис. realxgraf.

(b) Нет. X-граф "восьмерка" (рис. eight) планарен, но не X-планарен.

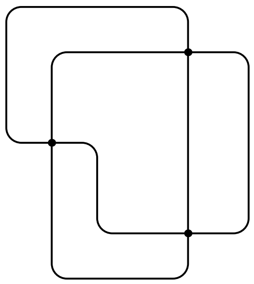

Рисунок realxgraf

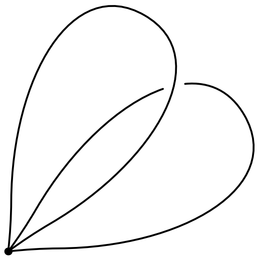

Рисунок eight

РЕШЕНИЯ И УКАЗАНИЯ К ОСТАВШИМСЯ ЗАДАЧАМ.

Реализуемость графов с крестовой структурой. См. [Per05].

Реализуемость графов с вращениями.

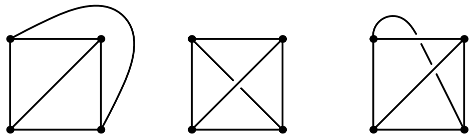

Рисунок 1.

1. (b) Ответ (получен Н. Гончарук, С. Крупиным и Г. Погудиным): 3, см. рис. 1.

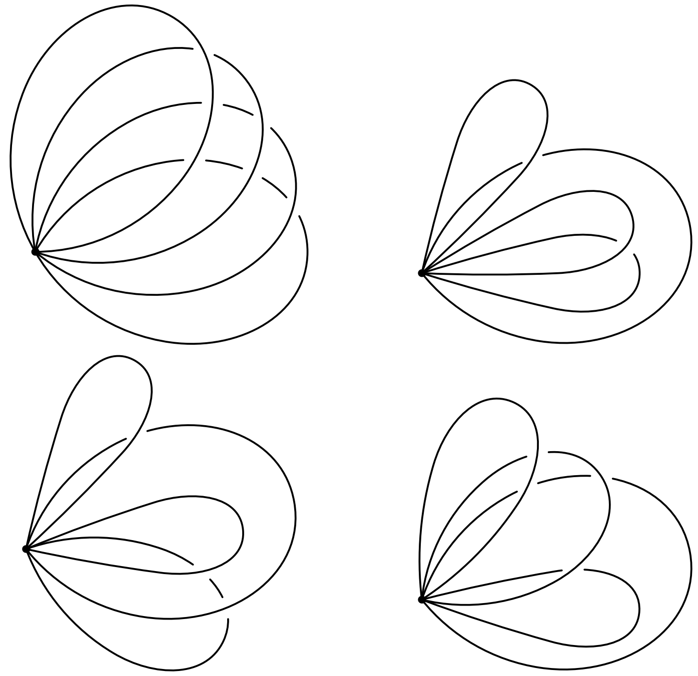

Рисунок 2.

4. (b) Запрещенные R-подбукеты изображены на рис. 2.
(c) Гипотеза: запрещенные R-подграфы — изображенные на рис. 3 (в конце).

Алгоритм распознавания рода графа.

5. (a) Нарисуем граф (возможно с пересечениями) на плоскости. Если есть точки пересечения, то поднимем одно из каждых двух пересекающихся ребер в пространство так, чтобы пересечение пропало.

(b) Указание: используйте идею решения пункта (a).

6. Ответ: 1.

7. (a) Аналогично 0.a.

(b) Аналогично 0.a граф K_{2g^2+9} не вложим в сферу с g ручками.

8. (a) Ответ: 0, 1, 1 для трех R-графов на рис. 1, соответственно.

(c) Указание: строится с помощью (b), используя перебор R-графов, соответствующих данному графу.

(b) Следующая конструкция *утолщения* возникает во многих задачах топологии и ее приложений. Нам она полезна для распознавания рода графов.

Для графа G рассмотрим несвязное объединение дисков, число которых равно числу вершин графа G. На каждой граничной окружности дисков отметим непересекающиеся отрезки, отвечающие выходящим из соответствующей вершины ребрам. Для каждого ребра графа G соединим (не обязательно в плоскости) соответствующие ему два отрезка ленточкой-прямоугольником. Заметим, что это можно сделать двумя способами (рис. 4). Пусть N — фигура (двумерное многообразие), являющаяся объединением построенных дисков и ленточек. Пара (N, G), состоящая из N и графа G, естественно вложенного в N, называется *(двумерным) утолщением* графа G. Иногда для краткости мы будем называть утолщением только 2-многообразие N. (Граф G называется *спайном*, или *утощением* 2-многообразия N.)

Рисунок 4.

Примеры утолщений. (1) Цилиндр с его средней линией и лист Мебиуса с его средней линией (рис. 5) являются утолщениями окружности.

Рисунок 5.

(2) Если граф вложен в плоскость (или в 2-многообразие), то легко выбрать окрестность этого графа, являющуюся его утолщением.

(3) Если дано отображение общего положения графа G в плоскость (или в 2-многообразие), то можно построить утолщение графа G, соответствующее этому отображению (рис. 6).

Рисунок 6.

(4) Пример утолщения графа $K_{3,3}$ изображен на рис. 7. Поскольку граничных окружностей три, то из формулы Эйлера вытекает, что это утолщение N гомеоморфно тору с дыркой.

Рисунок 7.

Утолщение называется *ориентируемым*, если можно так ввести ориентации на граничных окружностях его дисков так, чтобы для любой ленточки стрелки на двух ее противоположных сторонах, лежащих на ориентированных окружностях, были противонаправлены вдоль ленточки.

Ответ к 8b. Ориентируемый род графа G равен

$\frac{1}{2}(2-V+E)-\frac{1}{2}\max\{h(N)\mid N$ — ориентируемое утолщение графа $G\}$.

Указание: заклеив все граничные окружности ориентируемого утолщения дисками, получим новую фигуру — замкнутое 2-многообразие, т.е. сферу с ручками.

Ясно, что существует комбинаторный алгоритм подсчета числа $h(N)$ (докажите!).

Вложимость графов с системой вращений в лист Мебиуса.

10. Ответ: $2^4\cdot 2^6=2^{10}$.

11. (a) Пусть некоторый из UR-графов изображен на ленте Мебиуса. Окрестность первого UR-графа является объединением двух лент Мебиуса. Если разрезать окрестность третьего UR-графа по ребру, на котором стоит единица, и продолжить разрез до границы окрестности, то также получится объединение двух лент Мебиуса. Доказательство невложимости второго UR-графа в ленту Мебиуса аналогично доказательству невложимости его в плоскость.

(b) Ответ: да. Используйте инвертирование в вершине второго или третьего графа с рис. ootheta.

(c) Пусть некоторый UR-граф вложен в лист Мебиуса. Согласно определению вложения, каждую вершину можно окружить маленькой окружностью и выбрать направления на окружностях определенным образом. Сменим направление на произвольной окружности. Получим вложение UR-графа, отличающегося от исходного инвертированием в одной вершине.

(d) Расположим дерево внутри некоторого многоугольника так, чтобы вершины дерева оказались вершинами многоугольника. Оставшееся ребро можно провести вне многоугольника.

(e) У нас нет решения.

12.* (a), (b), (c) См. [Per].

Литература

[GrTu87] *J. L. Gross and T. W. Tucker*, Topological graph theory, Wiley-Interscience, New York, 1987.

[LaZv] *S. Lando and A. Zvonkin*, Embedded graphs, Springer.

[Man05] *В. О. Мантуров*, Доказательство гипотезы В. А. Васильева о планарности сингулярных зацеплений, препринт, 2005.

[Per05] *Д. Пермяков*, Вложения в плоскость графов степени 4 с крестовой структурой, представлено к публикации, 2005.

[Per] *Д. Пермяков*, Вложения в лист Мебиуса графов с вращениями, препринт.

[ReSk00] *Д. Реповш и А. Скопенков*, Теория препятствий для начинающих, Матем. Просвещение, 2000.

[Rin] *Рингель*, Раскраски карт на поверхностях.

[Sha] *G. B. Shabat*, private communication.

[Vas05] *В. А. Васильев*, Инварианты ... кривых в R^n, препринт, 2005.

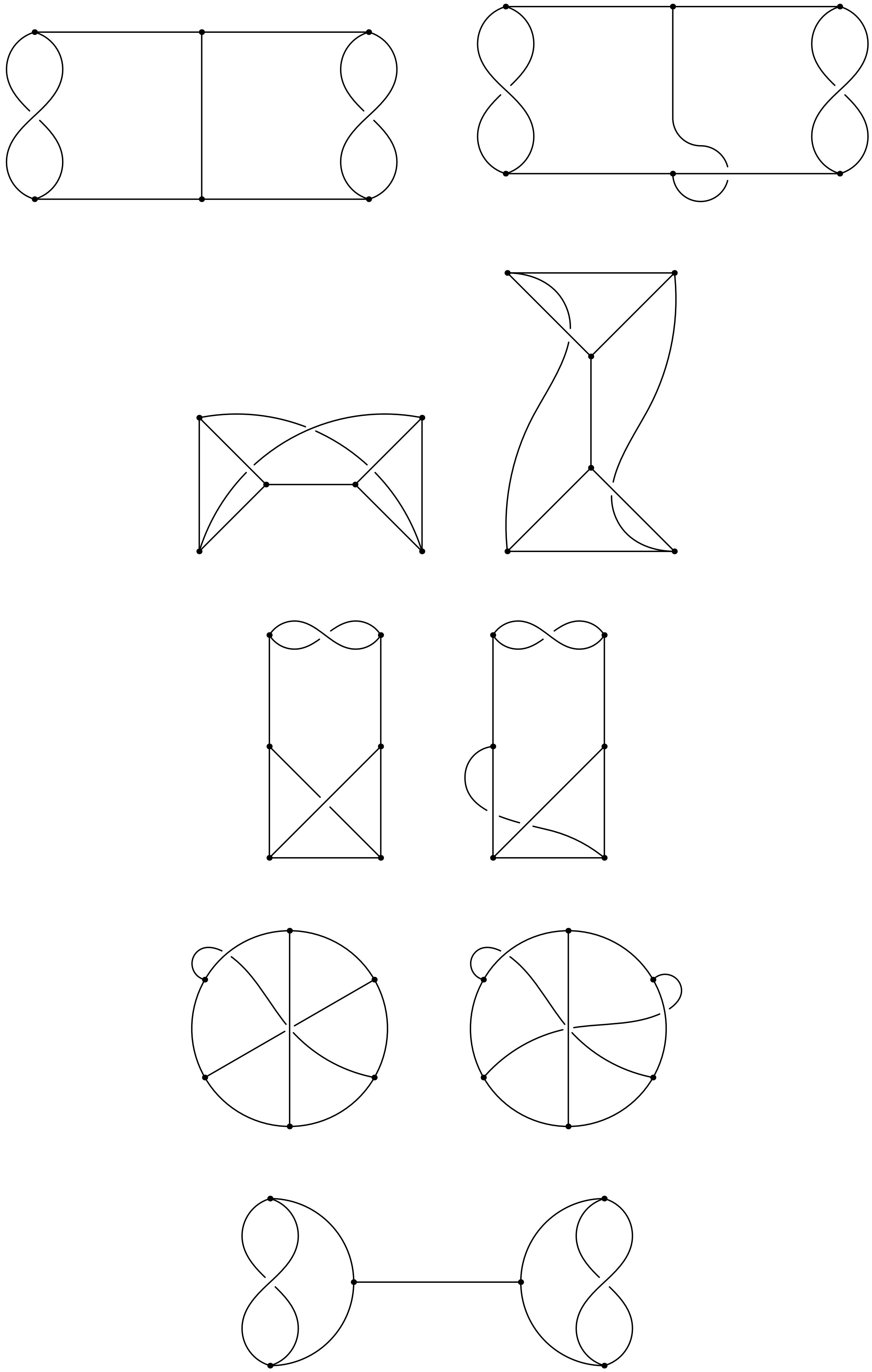

Рисунок 3.