Игра разбойников в ящики

И.Богданов, Е.Куликов, Г.Челноков

1 августа 2005

Погрузить бы в корабли,
Затопить бы в океане
Все песеты и рубли,
Все иены и юани...
А.Иващенко

Условия

***i* (Задача в сторону).** Два жадных разбойника делят добычу накануне III Мировой войны. Мы считаем, что каждое подмножество сокровищ каждый разбойник оценивает по своему разумению в долларах и в евро. Стоимости могут оказаться непропорциональными, а оценки — разными у разных разбойников; при этом разбойники не знают оценочных функций друг друга. Добыча считается безгранично делимой. Каждый разбойник хочет получить долю добычи, которая стоит не менее половины в каждой из валют (разумеется, с его точки зрения). Докажите, что не существует алгоритма, позволяющего осуществить требуемое. (На каждом шаге алгоритма один из разбойников делит некоторую часть добычи на две, имеющие заданные стоимости, если это возможно. Если на некотором шаге они могут распределить имеющиеся куски так, что каждый получил желаемое, дележка осуществилась.)

Из следующей задачи выводится, что такое разбиение существует; нет только конечного алгоритма его нахождения.

1. a) Докажите, что разбойники могут добиться требуемого, если каждому достаточно получить 49% всей добычи (или половину добычи без одного цента).

b) То же, если валют не две, а пять (есть еще динары, иены и юани).

c) То же самое, если разбойников не двое, а пятеро, и каждый удовлетворится 1/5 всей добычи без одного цента.

Внимание! Первую задачу лучше решать ПО ХОДУ РЕШЕНИЯ ВСЕГО ОСТАЛЬНОГО!

2. У разбойников есть 301 ящик, в которых разложено золото и ром.

a) Флинт имеет право выбрать себе 151 ящик. Докажите, что он может получить не меньше половины всего золота и не меньше половины всего рома. Докажите, что 150 ящиков для этого может и не хватить.

b) Какое наименьшее количество ящиков должен иметь право забрать Флинт, чтобы он гарантированно мог получить не меньше 1/3 всего золота и не меньше 1/3 всего рома?

c) Тот же вопрос для 2/5.

d) Решите задачу для 2/5, если ящиков 303.

3abc. Те же вопросы, но для трех типов ресурсов.

В решении задачи 3 может помочь следующая задача:

4. Пусть есть несколько ящиков, и в каждом лежит не больше 1 кг золота и не больше литра рома.

a) Пусть количество ящиков четно. Тогда ящики можно так разбить на две равных по количеству группы, что суммарное количество золота в двух группах различается не более чем на 1 кг, а суммарное количество рома — не более чем на 1 литр.

b) Аналогичное утверждение для 3 частей (а также 4, 5...).

Общая постановка. Пусть есть N ящиков, содержащих k типов ресурсов. Флинт хочет выбрать несколько ящиков так, что доля каждого ресурса в них не меньше α.

Обозначим через $f_{N,k}(\alpha)$ минимальное количество ящиков, которого заведомо хватит Флинту, если он хочет получить хотя бы α каждого ресурса. Если не возникает путаницы, мы будем писать $f_N(\alpha)$ вместо $f_{N,k}(\alpha)$.

5. a) Докажите, что существует константа c_k, зависящая от k (но не от N) со следующими свойствами. Пусть каждый ящик содержит не больше килограмма каждого ресурса. Тогда ящики можно разбить на две группы так, что суммарное количество каждого ресурса в группах отличается не больше, чем на c_k кг.

b) Докажите, что существует такая константа d_k, что $f_{N,k}(1/2) \leqslant N/2+d_k$; иными словами, при $\alpha=1/2$ Флинту всегда достаточно взять $N/2+d_k$ ящиков.

c) Тот же вопрос, что и в пункте a), для 3 групп (4, 5,...).

d) Докажите, что существует такая константа $d_{k,m}$, зависящая только от k и m, что при $\alpha=1/m$ Флинту достаточно взять $N/m+d_{m,k}$ ящиков.

6 (Жадный Флинт). Во всех пунктах этой задачи мы требуем найти оценку, выполняющуюся для всех N **и точную хотя бы для бесконечного множества значений** N.

В этой задаче принимаются частные продвижения, подобные, например, задаче 5.

a) В N ящиках лежат золото и ром, в каждом — суммарно 1 кг. Докажите, что Флинт может взять из некоторых ящиков только золото, а из остальных — только ром так, что останется в ящиках не более $(N+1)/4$ кг золота и не более $(N+1)/4$ кг рома.

b) В N ящиках лежат золото, ром, карты и порох, в каждом — суммарно 1 кг. Флинт хочет взять из каждого ящика ресурсы только двух типов так, что останется в ящиках не более α кг каждого ресурса. При каком минимальном α это возможно?

c) А если ресурсов k? И надо взять из каждого ящика $k-1$ ресурсов?

d) А если ресурсов k, и взять надо из каждого ящика только ℓ ресурсов?

7. a) Докажите, что в пункте 5a) $c_k \leqslant 2k-2$.

b) $c_k \leqslant k$.

c) $c_k \leqslant (k+1)/2$.

8. a) Докажите, что из 99 ящиков с золотом, ромом и картами можно выбрать либо 34 ящика, в которых не менее 1/3 каждого ресурса, либо 67 ящиков, в которых не менее 2/3 каждого ресурса.

b) Докажите, что из 1000 ящиков с пятью типами ресурсов можно выбрать либо 201 ящик, в которых не менее 1/5 каждого ресурса, либо 803 ящиков, в которых не менее 4/5 каждого ресурса.

Для сокращения формул, положим $s=k-1$ (напомним, что k — это количество типов). Обозначим через $\lceil x\rceil$ наименьшее целое число, не меньшее x; через $\lfloor x\rfloor$ — наибольшее целое, не большее x.

9. a) Докажите, что для достаточно больших N

$$f_N(1/2)=s+\left\lceil\frac{N-s}{2}\right\rceil$$

b) Докажите, что для достаточно больших N

$$f_N(1/3)=s+\left\lceil\frac{N-s}{3}\right\rceil$$

c) Докажите, что для достаточно больших N

$$f_N(2/3)=s+\left\lceil\frac{2N-s}{3}\right\rceil$$

d) Докажите, что для достаточно больших N

$$f_N(p/q)=s+\left\lceil\frac{pN-s}{q}\right\rceil$$

Совет. Решения задач 9abc можно сдавать, выбрав конкретное (достаточно большое и дающее правильный остаток от деления на q) N, дабы не перегружать текст формулами не по делу.

10†: Открытые вопросы и гипотезы. a) При любых N,k,α можно построить пример, в котором требуется ровно максимальное количество ящиков, загрузив каждый ящик ровно одним ресурсом.

b) Чему равно $f_N(\alpha)$ в случае “недостаточно большого” N? А в случае иррационального α?

c) Насколько усиливается результат задачи 7? (Один из авторов верит в оценку порядка $\sqrt{k}$, а другой — в $\mathrm{const}\cdot\ln k$.)

Промежуточный финиш

11. a) Разбойники захватили N ящиков, содержащих k типов фруктов. Флинт хочет взять ровно половину каждого типа фруктов. Какое минимальное количество ящиков ему гарантированно достаточно распаковать?

b) Тот же вопрос, если он хочет получить ровно $d\%$ каждого типа фруктов.

c) Пока Флинт размышлял над предыдущей задачей, его бабушка сварила из фруктов каждого ящика джем и положила джем из каждого ящика обратно в этот ящик. Докажите, что ответ в предыдущих пунктах не изменился.

Игра разбойников в ящики

Решения

i. Для начала переформулируем то, что нам надо доказать, следующим образом. Пусть есть некоторый алгоритм, предположительно дающий нужное деление. Можно считать, что на каждом шаге один из разбойников делит один из кусков на два. При этом, поскольку он ничего не знает об оценочных функциях другого, то мы можем произвольным образом сказать, как именно этот кусок разделился с точки зрения этого другого. Наша цель — говорить это так, чтобы после каждого хода дележка все еще была невозможна. Тогда, естественно, мы докажем, что алгоритм не выполняет того, что надо.

Остановитесь и осознайте...

Предъявим требуемый алгоритм назначения стоимостей. Предполагаем, что стоимость всей добычи для каждого разбойника есть 100 долларов и 100 евро.

Во-первых, мы всегда будем назначать стоимости так, что сумма долларовой и евровой стоимостей любого куска для первого разбойника будет равна той же сумме для второго. Пусть, действуя таким образом, справедливая дележка была достигнута. Тогда первый получил кусок, суммарная стоимость которого с его точки зрения не меньше 100. Тогда она не меньше 100 и с точки зрения второго. Но тогда второй получил кусок, стоимость которого с его точки зрения не больше 100, а значит, она есть *ровно* 50 долларов и *ровно* 50 евро. Аналогично, и стоимость куска первого с точки зрения первого — *ровно* 50 долларов и *ровно* 50 евро.

Далее. Пусть до очередного шага дележка была невозможна, а после того, как некоторый кусок разрезали на части A и B она стала возможной. Тогда при этой дележке, очевидно, куски A и B отходят разным разбойникам (иначе так поделить можно было и до разреза).

Покажем теперь, что, если до очередного шага дележка была невозможна, то и после него мы могли так назначить стоимости кусков, что дележка невозможна. Заметим, что способов назначить стоимости (для не делавшего ход) кусков последнего разбиения бесконечно много. Предположим, что в каждом из них возможна дележка. Тогда в двух из наших случаев эта дележка "одинакова", т. е. первому разбойнику достаются одни и те же куски, включая, скажем, кусок A, а второму — все остальные, включая B. Но, поскольку стоимость куска B (с точки зрения второго) в этих случаях различна, то в одном из них второй не получает ровно 50 долларов и ровно 50 евро. Этого не может быть по сказанному выше.

1a). Пусть первый разбойник разрежет всю добычу на 101 часть с равными долларовыми и евровыми ценами. Тогда второй разбойник может так выбрать себе 51 из этих частей, что с его точки зрения он получил не меньше половины и от долларовой, и от евровой цены сокровища (доказательство аналогично задаче 2a) ниже). Первый же разбойник получит со своей точки зрения ровно $50/101 > 49/100$ долю сокровища.

Замечание. Другое решение можно получить из задачи 5c) так же, как в замечании к решению следующего пункта. При этом разбойникам надо будет совершать гораздо более простые действия.

1b), 1c). Мы будем пользоваться задачей 5c).

Представим себе, что мы разложили части сокровища по ящикам некоторым образом. Для каждой пары разбойник–валюта заведем свой тип ресурса; будем говорить, что данный ящик содержит столько этого ресурса, какова цена этого ящика в этой валюте с точки зрения этого разбойника. Таким образом, мы завели 10 (или 25 в пункте c)) типов ресурсов.

Рассмотрим число c_{25} из задачи 5a) (а в пункте c) — из задачи 5c) для 5 частей). Тогда верно следующее. если сокровище разложено по ящикам так, что количество каждого ресурса в каждом ящике не превосходит x, то ящики можно разбить на 5 групп так, что количество каждого ресурса в группах различается не больше, чем на xc_{25}. Теперь выберем такое n, чтобы c_{25}/n не превосходило одного цента, и разложим все сокровище по ящикам так, что в каждом ящике лежит не больше $1/n$ каждого ресурса. Для этого предложим первому разбойнику разложить все сокровище по n ящикам так, чтобы с его точки зрения цена каждого ящика в каждой из валют одинакова. Затем второй разбойник разделит каждый ящик, созданный первым разбойником, на n равноценных (по каждой из валют) ящиков. Ящиков стало n^2, цена каждого из них в каждой из валют с точки зрения и первого, и второго разбойника не больше $1/n$. (В задаче c) — пусть вслед за ними то же самое сделает третий, четвертый, пятый разбойники.) Мы получили требуемую систему ящиков.

Осталось каждому разбойнику объявить, сколько с его точки зрения стоит каждый ящик, а потом воспользоваться упомянутым алгоритмом из задачи 5. Тогда каждый разбойник получил (по своему мнению, в любой из валют) не более, чем на цент меньше, чем остальные; а значит, не более, чем на цент меньше $1/5$ всей добычи.

Замечание. Заметим, что разбойникам не обязательно было делить ящики на *равные* доли — достаточно было делить на доли, доля каждого из ресурсов в которых не превосходит $1/n$; это делается гораздо более простыми методами.

2a). Очевидно, 150 ящиков не хватит, если во всех ящиках поровну золота и рома.

Пусть x_i — количество золота в i-м ящике. Упорядочим ящики по убыванию количества золота в них (то есть $x_1 \geqslant x_2 \geqslant \ldots \geqslant x_{301}$). Достаточно разбить ящики со 2-го по 301-й на две группы по 150 ящиков так, чтобы количество золота в двух группах различалось не больше, чем на x_1. Тогда, выбрав ту из двух групп, в ящиках которой в сумме не меньше рома, чем в другой, и добавив к ней первый ящик, мы получим требуемый выбор 151 ящика. Приведем два способа разбить 300 ящиков на две группы требуемым образом.

Способ 1. В одну группу поместим ящики 2, 4, 6, ..., 300, в другую — 3, 5, ..., 301. Тогда в первой группе золота не меньше, чем во второй, а в первой группе без ящика номер 2 — не больше, чем во второй группе. Значит, разность количества золота не больше, чем $x_2 \leqslant x_1$.

Способ 2. Разобьем ящики как угодно. Если количество золота различается больше, чем на x_2, то возьмем в группе, где золота больше, ящик, где больше всего золота, и поменяем его местами с ящиком из другой группы, в котором меньше всего золота (ясно, что в первом золота больше, чем во втором). При этом количество золота в группах изменилось на разность каких-то двух ящиков, то есть не могло случиться, что уже в другой группе золота больше хотя бы на x_2. При этом разность количества золота в группах уменьшается. Кроме того, возможных разбиений на две группы конечное число. Поэтому, повторяя эту операцию, мы придем к требуемой ситуации.

2b). **Ответ.** 101 ящик.

Пример для 100 — равномерное распределение ресурсов. Приведем алгоритм, позволяющий выбрать 101 ящик.

Аналогично предыдущему, достаточно разбить ящики со 2-го по 301-й на три группы по 100 ящиков так, чтобы количество золота в двух группах различалось не больше, чем на x_1.

Способ 1. В одну группу поместим ящики 2, 5, 8, ..., 98, в другую — 3, 6, ..., 99, в третью — 4, 7, ..., 100.

Способ 2. Разобьем ящики как угодно. Аналогично, если количество золота различается больше, чем на x_2, то возьмем в группе, где золота больше всего, ящик, где больше всего золота, и поменяем его местами с ящиком из самой меньшей группы, в котором меньше всего золота (ясно, что в первом золота больше, чем во втором). При этом максимальная разность количества золота в группах уменьшается. Поэтому, повторяя эту операцию, мы придем к требуемой ситуации.

2c). **Ответ.** 122 ящика.

Пример — в трех ящиках лежит только ром (поровну), в остальных 298 — только золото (тоже поровну). Тогда нужно взять хотя бы 2 ящика с ромом и хотя бы $\lceil 2\cdot 298/5\rceil = 120$ ящиков с золотом.

Докажем, что даже из 302 ящиков можно выбрать 122 с тем же условием. Для этого отложим два ящика с максимальным количеством золота x_1, x_2 и разобьем остальные 300 на 5 групп так, что количество золота в любых двух группах различается не более, чем на x_2 (так же, как в предыдущих пунктах). Тогда, взяв две группы с максимальным количеством рома и два отложенных ящика, получаем требуемое.

2d). **Ответ.** А все равно 122 ящика.

Пример, естественно, тот же — изменения требует лишь доказательство.

Назовем процессом приведения набора следующее.

Допустим, что есть ящик A, в котором x_A золота и y_A рома, и ящик B, в котором $x_B < x_A$ золота и $y_B < y_A$ рома. Тогда заменим их на ящик A', в котором x_A золота, и y_B рома, и ящик B', в котором x_B золота и y_A рома. Заметим, что если мы можем выбрать сколько-то ящиков из нового набора так, чтобы ресурсов было не меньше, чем сколько-то, то и из старого тоже можем. В самом деле, если из нового набора мы должны взять только один из ящиков A' и B', то в старом наборе возьмем вместо него ящик A, а если в новом наборе мы должны были взять оба ящика A' и B' — возьмем в старом наборе оба ящика A и B.

Легко показать, что конечным числом таких замен мы можем прийти к набору ящиков со следующим свойством: если в ящике X больше золота, чем в ящике Y, то в нем меньше рома, чем в ящике Y. Действительно, нетрудно понять, что количество таких пар (A,B) при нашей операции уменьшается хотя бы на одну.

Набор с таким свойством будем называть приведенным набором.

Докажем, что из 303 яшиков можно взять 122 так, чтобы в них было не меньше $2/5$ всего золота и всего рома. Достаточно доказать это для приведенного набора.

Занумеруем ящики по убыванию золота в них (в случае равенства количества золота меньший номер получает ящик с меньшим количеством рома). Выберем из каждой из первых 60 пятерок 1-й и 3-й ящик из каждой пятерки (то есть ящики 1, 3, 6, 8, 11, 13, ..., 296, 298), 301 и 303 ящик. Несложно понять, что для каждой пятерки количество золота в выбранных ящиках не меньше $2/5$ всего золота в ящиках этой пятерки. Также понятно, что в 301-м и 303-м ящиках не меньше $2/5$ золота из остатка.

Заметим, что если перенумеровать ящики с конца в начало (т.е. 303-й ящик сделать 1-м и т.д.), то окажется, что мы выбрали те же номера. Тогда понятно, что в выбранных ящиках также не меньше $2/5$ всего рома.

Замечание 1. Аналогично можно решить и предыдущие пункты этой задачи.

Замечание 2. Достаточно было так выбрать ящики, чтобы для любого k среди первых k ящиков было не меньше $\frac{2}{5}k$ выбранных (это гарантирует, что в выбранных не меньше $\frac{2}{5}$ всего золота), и среди последних k не меньше $\frac{2}{5}k$ выбранных (это гарантирует, что в выбраных не меньше $\frac{2}{5}$ всего рома). Можно показать, что построенная таким образом оценка будет точна для любого рационального α вместо $\frac{2}{5}$, если количество ящиков довольно велико.

3а). Ответ. Достаточно 152 ящиков.

Ресурсы мы будем называть золото, ром и карты. В обоих решениях мы покажем, что даже из 302 ящиков достаточно выбрать 152.

Пример. Положим все золото в один ящик, весь ром в другой, а карты разложим по одной по всем остальным ящикам. Тогда меньшего числа не хватает.

Оценка 1. Как и обещано, мы будем пользоваться задачей 4а).

Выберем из наших ящиков тот, что содержит наибольшее количество золота, а затем из оставшихся тот, что содержит наибольшее количество рома. Тогда оставшиеся ящики согласно 4а) можно разбить на две группы по 150 ящиков так, что разность количества золота в первой и второй группах не превосходит числа золота в первом ящике, а разность количества рома в первой и второй группах не превосходит числа рома во втором ящике. Но тогда добавим изначальные два ящика в ту группу, где не меньше карт. Очевидно, полученный набор из 152 ящиков удовлетворяет условиям задачи, что и требовалось.

Оценка 2. Мы применим следующую теорему.

Теорема о сэндвиче. Пусть в пространстве расположены три тела (скажем, хлеб, сыр и ветчина). Тогда можно провести плоскость, делящую все три тела пополам.

Итак, отметим в трехмерном пространстве 302 точки, никакие 4 из которых не лежат на одной плоскости. Тогда, если мы поместим в каждую точку ОЧЕНЬ маленький ящик, то никакая плоскость не будет задевать сразу 4 ящика. (Для этого достаточно взять ящики диаметра $d/3$, где d — наименьшее из расстояний от произвольной отмеченной точки до плоскости, проходящей через любые другие три.)

Разделим теперь золото, ром и карты (такой вот сэндвич) пополам. Проведенная плоскость пересекает не более трех ящиков, поэтому с одной стороны от нее (скажем, "слева") лежат полностью не меньше, чем 150 ящиков. Взяв все ящики, кроме них (их как раз 152), мы получим требуемое, поскольку в них попадет вся "правая" часть.

3b). Ответ. 102 ящика — опять же неважно, из 301 или 302.

Пример. Тот же, что и в предыдущем пункте.

Оценка. Та же схема, что и в доказательстве 1 предыдущего пункта (и тоже для 302). Выберем из наших ящиков тот, что содержит наибольшее количество золота, а затем из оставшихся тот, что содержит наибольшее количество рома. Оставшиеся ящики согласно 4b) можно разбить на три группы по 100 ящиков так, что разность количества золота в любых двух группах не превосходит числа золота в первом ящике, а разность количества рома в них же группах не превосходит числа рома во втором ящике. Но тогда добавим эти две ящики в ту группу, где не меньше карт. Заметим, что в ней теперь получилось не меньше золота и рома, чем в любой из оставшихся групп, т. е. не меньше трети суммарного количества, что и требовалось.

3c). Ответ. 122 ящика.

Жюри пока не знает элементарного решения этой задачи и поэтому отсылает желающих к решению 9d).

4a). Пусть количество ящиков равно $2n$. Обозначим через a_i и b_i количество в i- м ящике золота и рома соответственно.

Доказательство 1. Докажем утверждение по индукции. База $n=0$ очевидна. Теперь докажем переход.

Возьмем из $2n+2$ ящиков два, в которых максимально количество золота — пусть это первый и второй ящики ($a_1 \geqslant a_2$). Тогда оставшиеся ящики можно разбить на две группы по n штук так, что выполняются условия задачи. Обозначим через a и a' суммарное количество золота в первой и второй группах, а через b и b' — суммарное количество рома. Тогда $|a-a'| \leqslant a_2$ (т. к. максимальное a_i из оставшихся не превосходит a_2) и $|b-b'| \leqslant \max_i b_i$. Без ограничения общности можно считать, что $b \leqslant b'$. Пусть $b_1 \leqslant b_2$. Тогда добавим первый ящик во вторую группу, а второй ящик в первую группу. Тогда суммы a_i в группах стали равны $a+a_2$ и $a'+a_1$, причем $|(a+a_2)-(a'+a_1)| \leqslant |a-a'|+|a_2-a_1| \leqslant a_2+a_1-a_2 = \max_i a_i$; суммы же b_i в группах стали равны $b+b_2$ и $b'+b_1$, причем $|(b+b_2)-(b'+b_1)| \leqslant \max(b'-b, b_2-b_1) \leqslant \max_i b_i$, т. к. b_2-b_1 и $b-b'$ разных знаков. Поэтому данное разбиение удовлетворяет условиям задачи. Если же $b_1 \geqslant b_2$, то, добавив первый ящик к первой группе, а второй — ко второй, аналогично будем иметь $|(b+b_2)-(b'+b_1)| \leqslant \max_i b_i$ и $|(a+a_2)-(a'+a_1)| \leqslant a_1$, что и требовалось.

Доказательство 2. Упорядочим ящики по убыванию количества золота (т. е. $a_1 \geqslant \ldots \geqslant a_{2n}$). Назовем ящики с номерами $2i-1$ и $2i$ *двойкой*. Заметим, что если разбить ящики на две группы так, что ящики любой двойки попадут в разные группы, то количество золота в группах будет различаться не более, чем на $(a_1-a_2)+(a_3-a_4)+\ldots+(a_{2n-1}-a_{2n}) \leqslant a_1$.

Распределим двойки по группам произвольным образом. Пусть еще не получилось требуемого разбиения, причем в первой группе рома больше, чем во второй. Тогда в какой-то из двоек количество рома, попавшее в первую группу, больше количества рома, попавшего во вторую. Поменяв ящики, принадлежащие этой двойке, местами, мы получим, что разность количества рома уменьшилась по модулю, поскольку изменилась не более, чем на $2b_1$. Тогда такой процесс не может продолжаться бесконечно, поэтому когда-нибудь распределение станет требуемым.

4b). Процесс, аналогичный второму решению выше, проходит и здесь. Для наглядности опишем его при пяти группах; очевидно, он аналогично происходит и для любого количества. Мы считаем, что количество ящиков делится на 5.

Упорядочим ящики по убыванию количества золота (т. е. $a_1 \geqslant \ldots \geqslant a_{5n}$). Назовем ящики с номерами $5i-4$, …, $5i$ *пятеркой*. Опять же, если разбить ящики на пять групп так, что ящики любой пятерки попадут в разные группы, то количество золота в группах будет различаться не более, чем на $(a_1-a_5)+(a_6-a_{10})+\ldots+(a_{5n-4}-a_{5n}) \leqslant a_1$.

Распределим пятерки по группам произвольным образом. Пусть еще не получилось требуемого разбиения, и пусть в первой группе количество рома больше всего и равно b, а во второй — меньше всего и равно b' ($b-b' > 2b_1$). Тогда в какой-то из пятерок количество рома, попавшее в первую группу, больше количества рома, попавшего во вторую. Поменяв соответствующие два ящика местами, мы получим, что в первой группе количество рома уменьшилось (не более, чем на b_1), а во второй — увеличилось. Тогда разность количества рома в этих группах уменьшилась по модулю. Кроме того, в первой группе количество рома осталось больше b', а во второй — меньше b.

Таким образом, либо максимальная разность количества рома в группах уменьшилась, либо она осталась неизменной, но уменьшилось количество групп, в которых содержится максимальное количество рома. Поэтому такой процесс не может продолжаться бесконечно, и мы в конце концов придем к требуемому.

5a). Основная идея — продолжение задачи 4. Упорядочим ящики по убыванию количества первого ресурса в них. Объединим первый и второй ящик в пару, третий и четвертый ящик в пару, и так далее (эти пары мы будем называть парами первого порядка). Если для последнего ящика не хватило пары, добавим еще один ящик — пустой. В дальнейшем, будем рассматривать только разбиения на группы, в которых ящики из одной пары первого порядка попадают в разные группы. В любом таком разбиении на группы количество первого ресурса в группах различается не сильнее, чем на количество первого ресурса в первом ящике, то есть не более, чем на 1 кг.

Теперь посмотрим на пары первого порядка, как на ящики. В каждой паре назовем ящик большим, если он содержит не меньше **второго** ресурса, нежели второй ящик этой пары. Будем говорить, что мы берем некоторую пару в группу, если больший ящик нашей пары лежит в этой группе (а меньший, следовательно, в другой). Будем говорить, что в паре A лежит x i-го ресурса, если разность количества i-го ресурса в первом и во втором ящиках пары A равна x (таким образом, это количество может оказаться отрицательным). Тогда, как и для ящиков, взятие пары A в первую группу увеличивает разность количества i-го ресурса в первой и второй группах на x.

Упорядочим пары по убыванию второго ресурса в них, объединим первую и вторую пару первого порядка в пару второго порядка, третью и четвертую пару первого порядка в пару второго порядка, и т.д. Аналогично, дальше будем рассматривать только разбиения, когда первую и вторую пару первого порядка, входящие в одну пару второго порядка, мы берем в разные группы. Вот для чего мы определили понятие “взять пару в группу”.

Для любого такого разбиения уже верно, что количество первого и второго ресурса в двух группах различается не более, чем на 1 кг. Кроме того, количество каждого ресурса в каждой паре второго порядка (определенное аналогично количеству ресурса в паре первого порядка) не превосходит по модулю 2 кг.

Далее аналогично мы определим пары i-го порядка при $i=1,\ldots,k$ (в каждой паре i-го поярдка объединены две пары $(i-1)$-го, а именно: в d-й паре объединены $(2d-1)$-я и $2d$-я пары, если упорядочить их по убыванию i-го ресурса). При этом в любой паре i-го порядка количество любого ресурса по модулю не превосходит некоторой константы (на самом деле 2^{i-1} кг), и при произвольном распределении пар i-го порядка по группам разность количества любого из первых i ресурсов будет не больше 2^{i-1}. Итого, распределив произвольным образом по группам пары k-го порядка, получаем требуемое.

5b). Пусть Флинт возьмет для каждого типа ресурсов c_k ящиков, в которых этого ресурса больше всего (c_k определено в 5a)). Тогда (при должном выборе эталона) можно считать, что в каждом из взятых ящиков количество соответствующего ресурса не меньше 1 кг, а в остальных — не больше. Тогда, по предыдущему пункту разделим остальные ящики на две группы так, что количество каждого ресурса в группах отличается не больше, чем на c_k, и дадим Флинту ту из групп, где ящиков не больше, чем в другой.

Тогда Флинт получил не меньше половины каждого ресурса, забрав себе не более, чем $k \cdot c_k + \dfrac{N-k\cdot c_k}{2} = N/2+\mathrm{const}$ ящиков.

5c). Решение аналогично пункту 5a), только вместо пар i-го порядка все ящики надо объединять в k-ки i-го порядка (состоящие, естественно, из k k-к $(i-1)$-го порядка).

5d). Естественно, решение полностью аналогично решению 5b).

6a). **Решение 1.** Отсортируем ящики так, чтобы золота в ящике с меньшим номером было меньше, чем в ящике с большим номером. Тогда пусть в i-м ящике α_i кг золота ($\alpha_1 \leqslant \alpha_2 \leqslant \ldots \leqslant \alpha_N$). Если $\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_N \leqslant (N+1)/4$, то уберем весь ром и получим требуемое. Иначе существует такое k, что

$$\alpha_1+\ldots+\alpha_k \leqslant \frac{N+1}{4} \tag{6a.1}$$

и

$$\alpha_1+\ldots+\alpha_{k+1} > \frac{N+1}{4}. \tag{6a.2}$$

Пусть $\alpha=\alpha_{k+1}$. Т.к. при $i\leqslant k+1$ выполняется $\alpha\geqslant\alpha_i$, то $(k+1)\alpha>(N+1)/4$ (по (6a.2)). Теперь выкинем из первых k ящиков ром, а из остальных — золото. По (6a.1) суммарное количество золота не более $(N+1)/4$. Но при $i\geqslant k+1$ выполняется $\alpha_i\geqslant\alpha$, а значит в каждом из оставшихся ящиков не более $1-\alpha$ кг рома, откуда всего рома не более $(N-k)(1-\alpha)$ кг, и осталось доказать, что это количество не превосходит $(N+1)/4$. Пусть $N'=N+1$ и $k'=k+1$. Тогда нам надо доказать, что $(N'-k')(1-\alpha)\leqslant N'/4$. Но $1-\alpha<1-N'/(4k')$. Значит, нам надо доказать, что

$$\frac{(N'-k')(4k'-N')}{4k'} \leqslant \frac{N'}{4}.$$

После приведения к общему знаменателю, получаем

$$N'^2+4k'^2 \geqslant 4N'k'.$$

Это неравенство, очевидно, верно.

Решение 2. Это решение несколько длиннее первого, зато легче обобщается.

Пусть в i-м ящике α_i золота и $\beta_i = 1-\alpha_i$ рома. По сути дела, нам нужно доказать, что имеет решение в целых числах следующая система:

$$x_1+y_1=1, \quad \ldots, \quad x_N+y_N=1, \tag{6a.3}$$

$$x_1\alpha_1+\ldots+x_N\alpha_N \leqslant \frac{N+1}{4}, \quad y_1\beta_1+\ldots+y_N\beta_N \leqslant \frac{N+1}{4}, \tag{6a.4}$$

$$0 \leqslant x_i, y_i \leqslant 1. \tag{6a.5}$$

Здесь, если $x_i=0$, то золото из i-го ящика надо забрать, а если 1 — оставить. Неформально говоря, x_i — доля золота, которое нужно оставить в i-м ящике.

Заметим для начала, что без условия целости переменных решение существует; более того, оно существует, даже если заменить в (6a.4) правые части на $N/4$. Действительно, положим

$$x=\frac{N}{4(\alpha_1+\cdots+\alpha_N)}, \quad y=\frac{N}{4(\beta_1+\ldots+\beta_N)}.$$

Имеем:

$$x+y \geqslant \frac{4}{1/x+1/y}=1.$$

Поэтому можно положить $x_1=\cdots=x_N=x$, $y_1=\cdots=y_N=1-x \leqslant y$ (если $x>1$, то положим $x=1$, $y=0$). Мы будем считать, что переменные расположены в таблице с N столбцами и двумя строками (в первой — x_i, во второй — y_i); уравнения и неравенства системы мы будем соответственно называть горизонтальными и вертикальными. Будем теперь изменять найденное решение этой системы (так, чтобы оно оставалось решением, разумеется...).

Пусть есть два столбца, в которых стоят нецелые значения (скажем, первый и второй). Попробуем прибавить к переменным этих столбцов числа так, чтобы значения всех выражений системы не изменились, за исключением левой части первого неравенства (которая бы не увеличилась). Прибавим ε к x_1; тогда из y_1 нужно вычесть ε (для сохранения вертикального значения), поэтому — к y_2 добавить число $c\varepsilon$ для сохранения горизонтального значения (при некоторой константе c; на самом деле она равна β_1/β_2, но нам это неважно). Наконец, тогда из x_2 придется вычесть $c\varepsilon$. Заметим теперь, что значение в первой строке изменилось также на величину вида $d\varepsilon$, где d — фиксированное число. Поэтому при должном выборе знака ε это выражение не увеличится, что и требовалось; кроме того, при довольно малых ε все значения переменных останутся на отрезке $[0;1]$.

УФ-Ф-Ф-Ф...

Теперь можно подобрать такое ε, чтобы одна из переменных стала целой и все остались неотрицательными (тогда и другая в том же столбце также станет целой). Количество "нецелых" столбцов при этом уменьшится. Такими операциями мы придем к решению нашей системы (напомним — с заменой $(N+1)/4$ на $N/4$), в котором максимум в одном столбце стоят нецелые числа (пусть это первый столбец). Попробуем теперь изменить либо x_1 на 1, а y_1 на 0, либо наоборот. При этом в первый раз первое горизонтальное выражение увеличится на $(1-x_1)\alpha_1$, а во второй — второе увеличится на $(1-y_1)\beta_1=x_1(1-\alpha_1)$; произведение этих выражений не больше $1/16$, поэтому одно из них не превосходит $1/4$. Тогда при соответствующей замене исходная система будет по-прежнему выполняться, и все значения переменных будут целыми, что и требовалось.

Замечание. Приведенная оценка точна лишь для нечетных N. Видимо, удается доказать, что для четного N точной оценкой является $\dfrac{N(N+2)}{4(N+1)}$.

6b). Жюри не знает полного решения этой задачи. Мы приведем здесь доказательство оценки, подобной оценке в 5. Именно, если константа в задаче есть $c(N)$, то мы покажем, что $\dfrac{N}{8} \leqslant c(N) \leqslant \dfrac{N}{8}+1$.

Пример. Пусть в каждом ящике всех ресурсов поровну. Тогда хотя бы одного ресурса, естественно, останется не меньше половины, т. е. не меньше $N/8$. Оценка неточна при любом значении N.

Оценка. Сделаем то же, что и во втором решении предыдущего пункта. Именно, введем систему линейных уравнений и неравенств с переменными x_i, y_i, z_i, t_i, обозначающими, какую долю данного ресурса нужно оставить в i-м ящике. Система будет иметь следующий вид:

$$x_1+y_1+z_1+t_1=2, \quad \ldots, \quad x_N+y_N+z_N+t_N=2, \tag{6b.1}$$

$$x_1\alpha_1+\ldots+x_N\alpha_N \leqslant c(N), \quad \ldots, \quad t_1\delta_1+\ldots+t_N\delta_N \leqslant c(N), \tag{6b.2}$$
$$0 \leqslant x_i, y_i, z_i, t_i \leqslant 1. \tag{6b.3}$$

Нас интересует, при каких значениях $c(N)$ эта система имеет целое решение.

Заметим, что при $c=N/8$ одно (нецелое) решение система имеет всегда. Действительно, положив

$$x=\frac{N}{8(\alpha_1+\cdots+\alpha_N)}, \quad \ldots, \quad t=\frac{N}{8(\delta_1+\ldots+\delta_N)}, \qquad x+y+z+t \geqslant \frac{16}{1/x+1/y+1/z+1/t}=2,$$

аналогично предыдущему получаем решение $x_i=x$, …, $t_i=t$ (здесь $x_i+y_i+z_i+t_i \geqslant 2$, поэтому в случае строгого неравенства нужно будет уменьшить все значенияв одно и то же число раз; при этом решение системы останется решением). Далее, попытаемся изменять переменные. Аналогично, считаем их расположенными в таблице $4\times N$.

Теперь явно опишем процесс, позволяющий получить решение данной системы, в котором достаточно много переменных принимают целые значения.

Рассмотрим граф, вершинами которого являются строки таблицы; при этом две вершины соединены ребром, если в некотором столбце в обеих этих строках стоит по нецелому числу (две вершины могут быть соединены более, чем одним ребром). При этом, если в столбце больше двух нецелых чисел (скажем, числа в строках a_1, …, a_k), то мы соединяем только строки, между которыми нет нецелых чисел в нашем столбце (т. е., скажем, соединим только $a_1-a_2-\cdots-a_k$).

Предположим, что в графе есть цикл. Рассмотрим любое его ребро, это пара нецелых переменных в одном столбце. К одной из них прибавим ε_1, из другой вычтем. Возьмем второе ребро цикла, прибавим к одной его переменной ε_2, а из другой вычтем так, чтобы левая часть неравенства, соответствующая строке, из которой выходят первое и второе ребра цикла, не изменилась. Такое ε_2 изменяется пропорционально ε_1. Аналогично подберем ε_3, ε_4 и т. д. Тогда левые части неравенств во всех строках, кроме одной, не изменились. Теперь, выбрав знак ε_1, можно добиться того, что сумма в этой строке не увеличилась, а выбрав его модуль — что все переменные остались от нуля до единицы, причем хотя бы одна стала целой.

Повторяя эту процедуру, добьемся того, что в графе больше не будет циклов.

Тогда наш граф есть лес. Рассмотрим в нем любую вершину степени 1; тогда в соответствующей строке таблицы только одно значение нецелое. Увеличим его до 1, уменьшив соответственно остальные. Тогда соответствующая правая часть в (6b.2) увеличится не более, чем на 1. Далее, откинув нашу вершину, мы продолжим процесс таким же образом. В конце концов, мы увеличм число в каждой строчке не более, чем на 1 (т. к. числа в каждой строке мы увеличиваем не более, чем однократно). В результате у нас получится целочисленное решение системы, в которой $c(N)=N/8+1$.

6c). Ответ. $\dfrac{N+k-1}{k^2}$.

Пример. Пусть во всех ящиках лежит поровну каждого ресурса и $N=mk+1$. Тогда ящиков с каким-то ресурсом останется не меньше, чем $m+1$, поэтому этого ресурса останется хотя бы $\dfrac{m+1}{k}=\dfrac{N+k-1}{k^2}$, что и требовалось.

Оценка. Будем доказывать утверждение задачи индукцией по k, взяв пункт в качестве базы. Докажем переход.

Пусть у нас имеется $k+1$ вид ресурсов. Назовем первый из ресурсов золотом. Тогда занумеруем ящики так, что в ящике с меньшим номером золота не больше, чем в ящике с большим. Пусть в первом ящике α_1 кг золота, во втором — α_2 и т.д. ($\alpha_1 \leqslant \alpha_2 \leqslant \ldots \leqslant \alpha_N$). Если $\alpha_1+\ldots+\alpha_N \leqslant \dfrac{N+k}{(k+1)^2}$, то оставив во всех ящиках золото, получим требуемое. Иначе существует t такое, что

$$\alpha_1+\ldots+\alpha_t \leqslant \frac{N+k}{(k+1)^2} \tag{6c.1}$$

и

$$\alpha_1+\ldots+\alpha_{t+1} > \frac{N+k}{(k+1)^2}. \tag{6c.2}$$

Оставим золото в первых t ящиках и выкинем из остальных. Тогда по (6c.1) количество золота не превзойдет требуемого. Далее, пусть $\alpha=\alpha_{t+1}$. Тогда из (6c.2)

$$(t+1)\alpha > \frac{N+k}{(k+1)^2}. \tag{6c.3}$$

Но в любом ящике с номером, большим t, осталось суммарно не более $1-\alpha$ кг ресурсов. По предположению индукции можно так оставить в каждом из этих ящиков по одному ресурсу, что суммарное количество каждого из них не превзойдет $c=(1-\alpha)\dfrac{(N-t)+k-1}{k^2}$. Докажем, что $c\leqslant\dfrac{N+k}{(k+1)^2}$. Подставив условие на α из (6c.3), получаем

$$c\leqslant\left(1-\frac{N+k}{(k+1)^2(t+1)}\right)\frac{(N-t)+k-1}{k^2}.$$

Сделаем замены $N'=N+k$ и $t'=t+1$. Неравенство, которое нам нужно доказать, примет вид

$$((k+1)^2t'-N')(N'-t')\leqslant k^2t'N'.$$

Это неравенство после раскрытия скобок превращается в $N'^2+(k+1)^2t'^2\geqslant 2(k+1)N't'$, что очевидно.

6d). Жюри опять же не знает полного решения этой задачи. Мы покажем следующее. Пусть c — точная оценка в этой задаче. Тогда, если $k\geqslant 2\ell$, то $N/(4\ell)\leqslant c\leqslant N/(4\ell)+1$; иначе $(k-\ell)N/k^2\leqslant c\leqslant (k-\ell)N/k^2+1$. Эти оценки можно было бы немного уточнить ценой увеличения объема текста; мы не стали этого делать.

Сделаем то же, что и в решении пункта 6b): введем систему линейных уравнений и неравенств с переменными x_{id}, обозначающими, какую долю d-го ресурса нужно оставить в i-м ящике. При этом количество d-го ресурса в i-м ящике мы обозначим α_{id}.

Система будет иметь следующий вид:

$$x_{11}+x_{12}+\dots+x_{1k}=k-\ell,\quad \dots,\quad x_{N1}+x_{N2}\dots+x_{Nk}=k-\ell, \tag{6d.1}$$

$$x_{11}\alpha_{11}+x_{21}\alpha_{21}+\ldots+x_{N1}\alpha_{N1}\leqslant c,\quad \dots,\quad x_{1k}\alpha_{1k}+x_{2k}\alpha_{2k}+\ldots+x_{Nk}\alpha_{Nk}\leqslant c, \tag{6d.2}$$

$$0\leqslant x_{id}\leqslant 1. \tag{6d.3}$$

Нас интересует, при каких значениях c эта система имеет целое решение. Выясним сначала, при каких c она вообще имеет решение. Точнее, найдем такое c, что наша система всегда имеет решение вида $x_{1d}=x_{2d}=\ldots=x_{Nd}=t_d$.

Пусть суммарное количество d-го ресурса есть $S_d=\sum_i\alpha_{id}$ (заметим, что $\sum_d S_d=\sum_{i,d}\alpha_{id}=N$). Тогда достаточно (и необходимо) положить

$$t_d\leqslant\min\left(1,\frac{c}{S_d}\right). \tag{6d.4}$$

Итак, если мы подберем такие t_d, что неравенства (6d.4) выполняются и $\sum_d t_d=k-\ell$, то мы нашли и решение исходной системы.

Таким образом, нам нужно выяснить, при каком c такие t_d всегда найдутся. Для этого, очевидно, достаточно выполнения неравенства

$$\sum_d\min\left(1,\frac{c}{S_d}\right)\geqslant k-\ell \tag{6d.5}$$

для всех S_d таких, что $\sum_d S_d=N$. Пусть количество d таких, что $S_d\leqslant c$, равно r. Тогда количество единиц в сумме также равно r, и наше неравенство преобразуется к виду

$$c\geqslant\frac{k-\ell-r}{\sum\limits_{d=1}^{k-r}\dfrac{1}{S_d}}$$

при условии $\sum\limits_{d=1}^{k-r}S_d\leqslant N$. Оценим знаменатель выражения в правой части:

$$\sum_{d=1}^{k-r}\frac{1}{S_d}\geqslant\frac{(k-r)^2}{\sum\limits_{d=1}^{k-r}S_d}\geqslant\frac{(k-r)^2}{N};$$

поэтому это выражение не превосходит $\dfrac{(k-\ell-r)N}{(k-r)^2}$. Следовательно, нам достаточно выбрать

$$c \geqslant \max_{r=0,\dots,k-\ell} \frac{(k-\ell-r)N}{(k-r)^2}.$$

Обозначим этот максимум через B и найдем его. Он достигается в точке минимума выражения

$$\frac{(k-r)^2}{k-r-\ell} = (k-r-\ell) + \frac{\ell^2}{k-r-\ell} + 2\ell.$$

Последнее слагаемое — константа, а произведение двух первых постоянно, поэтому их сумма тем меньше, чем они ближе друг к другу. Поэтому, если $k-\ell \geqslant \dfrac{\ell^2}{k-\ell}$ (т. е $k \geqslant 2\ell$), то максимум достигается, когда $k-r-\ell = \dfrac{\ell^2}{k-r-\ell}$, т. е $r = k-2\ell$; иначе он достигается при $r=0$.

Итак, если $k \geqslant 2\ell$, то найденное пригодное значение есть $B = N/(4\ell)$; если же $k < 2\ell$, то значение есть $B = (k-\ell)N/k^2$. Напомним, что при данном значении c существует решение нашей системы, но не обязательно целое.

Тогда, проделав тот же процесс "переделки" решения, что и в мы получим, что на некотором решении соответствующий граф является деревом. Округляя переменные так же, как и в упомянутом решении, мы получим, что каждая константа в правой части неравенств увеличилась не более, чем на 1. Итак, мы показали, что всегда можно оставить не более, чем $B+1$ кг каждого ресурса.

С другой стороны, если мы положим в каждый ящик поровну первых $k-r$ ресурсов и не положим остальных r ресурсов вовсе. Тогда каждого ресурса лежит по $N/(k-r)$ кг, а убираем мы не больше, чем $N\ell/(k-r)$ кг. Поэтому какого-то ресурса останется не менее, чем

$$\frac{N}{k-r} - \frac{N\ell}{(k-r)^2} = \frac{N(k-r-\ell)}{(k-r)^2} = B.$$

Поэтому наше B является нижней оценкой. Итак, мы доказали, что $B \leqslant c \leqslant B+1$.

Общее слово о системах линейных уравнений и неравенств.

В дальнейшем мы часто будем исследовать решения систем линейных уравнений и неравенств; поэтому целесообразно изложить здесь стандартные общие принципы работы с ними.

Система линейных уравнений и неравенств имеет вид

$$\begin{array}{c} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = c_1 \\ \vdots \\ a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \ldots + a_{kn}x_n = c_k \end{array} \qquad (*)$$
$$\begin{array}{c} b_{11}x_1 + b_{12}x_2 + \ldots + b_{1n}x_n \leqslant d_1 \\ \vdots \\ b_{l1}x_1 + b_{l2}x_2 + \ldots + b_{ln}x_n \leqslant d_l \end{array} \qquad (**)$$

Мы предполагаем, что множество решений этой системы ограничено; иными словами, существует такое C, что в любом решении системы $|x_i| \leqslant C$. Кроме того, мы предполагаем, что система ИМЕЕТ хотя бы одно решение. Все системы, которые будут появляться в дальнейшем, этим условиям удовлетворяют.

Для начала заметим, что мы можем привести систему $(*)$ методом Гаусса к ступенчатому виду:

$$\begin{array}{ccccccccccccc} a'_{1,i_1}x_{i_1} & + & a'_{1,i_1+1}x_{i_1+1} & + & a'_{1,i_1+2}x_{i_1+2} & + & a'_{1,i_1+3}x_{i_1+3} & + & \ldots & + & a'_{1n}x_n & = & c'_1 \\ & & a'_{2,i_2}x_{i_2} & + & a'_{2,i_2+1}x_{i_2+1} & + & a'_{2,i_2+2}x_{i_2+2} & + & \ldots & + & a'_{2n}x_n & = & c'_2 \\ & & & \ddots & & & \vdots & & & & & & \vdots \\ & & & & a'_{k,i_k}x_{i_k} & + & a'_{k,i_k+1}x_{i_k+1} & + & \ldots & + & a'_{kn}x_n & = & c'_k \end{array}$$

$$(1 \leqslant i_1 < \ldots < i_k)$$

(мы предполагаем, что никакое уравнение не обнулилось тождественно). Тогда можно из этих уравнений выразить $x_{i_1},\dots,x_{i_k}$ через остальные переменные и, подставив их в неравенства $(**)$, получить систему с меньшим количеством переменных, состоящую только из неравенств. Заметим, что мы избавились не более, чем от k переменных (меньше переменных могло оказаться как раз в случае, если какое-то уравнение стало тождественным нулем).

Рассмотрим некоторое решение нашей системы (оно есть по предположению) и будем его изменять следующим образом. Пусть ни одно из неравенств не обращается в равенство. Тогда мы можем рассмотреть одну из оставшихся переменных и начать изменять ее значение (увеличивать или уменьшать). При этом нельзя делать это до бесконечности, поскольку множество решений ограничено. Значит, когда-нибудь мы "упремся" в одно из неравенств, т. е. добьемся того, что оно обратится в равенство.

Тогда далее мы будем искать лишь решения нашей системы, в которых это неравенство обращается в равенство. При этом это равенство мы можем добавить к части $(*)$, убрав соответствующее неравенство из $(**)$ (мы только что поняли, что получившаяся система будет иметь решение).

Очевидно, так можно продолжать делать до тех пор, пока в "нижней" системе неравенств будут оставаться переменные, еще не выраженные через другие (и, разумеется, через константы). В конце концов, окажется, что все переменные обрели свое численное значение; иначе, если неравенств внизу не осталось и не все переменные имеют определенное численное значение, то любую из неопределенных переменных можно сделать сколь угодно большой.

Иначе говоря, у полученной "верхней" системы уравнений есть ровно одно решение. Это решение является решением исходной системы; при этом хотя бы $n-k$ из неравенств части $(**)$ на этом решении обращаются в равенства, иначе не все переменные выражаются однозначно.

Применим этот метод, чтобы доказать следующую теорему. (k-мерным вектором называется просто упорядоченная k-ка чисел; векторы складываются и умножаются на число покомпонентно.)

Теорема Каратеодори. Пусть в k-мерном пространстве есть n векторов $\vec{\mathbf{u}}_1,\dots,\vec{\mathbf{u}}_n$, и пусть вектор $\vec{\mathbf{v}}$ лежит в их выпуклой оболочке, т. е. существуют такие $\alpha_i \geqslant 0$, $\alpha_1+\dots+\alpha_n=1$, что

$$\vec{\mathbf{v}}=\alpha_1\vec{\mathbf{u}}_1+\dots+\alpha_n\vec{\mathbf{u}}_n. \tag{$***$}$$

Тогда существуют такие $k+1$ вектор среди $\vec{\mathbf{u}}_i$, что $\vec{\mathbf{v}}$ лежит в их выпуклой оболочке.

Доказательство. Условие $(***)$ есть система из k линейных уравнений с n переменными α_i. К ним добавляется условие $\alpha_1+\dots+\alpha_n=1$ и неравенствами $\alpha_i\geqslant 0$. Тогда по сказанному выше есть решение этой системы, в котором $n-k-1$ из этих неравенств обращаются в равенства, т. е. только $k+1$ коэффициент может отличаться от нуля. Это и означает, что $\vec{\mathbf{v}}$ есть выпуклая комбинация $k+1$ вектора (именно тех, при которых коэффициенты остались ненулевыми).

7a), 7b). На сей раз мы припишем по переменной каждому ящику: значение $x_i=1$ будет означать, что i-й ящик в первой группе, а $x_i=-1$ — во второй. Пусть в i-м ящике количество d-го ресурса равно α_{di}. Попробуем распределить ящики так, чтобы всех ресурсов в группах было поровну:

$$\begin{gathered}\alpha_{11}x_1+\alpha_{12}x_2+\dots+\alpha_{1N}x_N=0\\ \vdots\\ \alpha_{k1}x_1+\alpha_{22}x_2+\dots+\alpha_{kN}x_N=0\\ |x_1|\leqslant 1\quad\dots\quad|x_N|\leqslant 1\end{gathered} \tag{7a.1}$$

(каждое неравенство на самом деле есть два линейных: $|s|\leqslant t$ расшифровывается как $-t\leqslant s\leqslant t$). Одно решение есть: $x_i=0$. Используя технику, описанную выше, мы найдем решение, в котором $N-k$ неравенств обращаются в равенства, т. е. $N-k$ переменных равны ±1 (назовем остальные k переменных *плохими*). Заменим положительные плохие переменные единицами, а неположительные — минус единицами. Тогда к каждой правой части уравнений (7a.1) прибавится не более, чем $k\cdot 1$ кг и вычтется не более, чем $k\cdot 1$ кг. Следовательно, ее модуль не превзойдет k. Осталось заметить, что это и требовалось: ящики разбились на две группы так, что количество каждого ресурса отличается не больше, чем на k кг.

Замечание. Другое решение этой задачи можно бы было получить, используя многомерную теорему о сэндвиче (в k-мерном пространстве можно гиперплоскостью разделить пополам k тел), подобно указанному в одном из решений 3a). К сожалению, доказательство многомерной теоремы о сэндвиче очень неэлементарно.

7c). Уточним метод предыдущего решения. Пусть плохие переменные носят номера от 1 до k; положим $y_i=(x_i+1)/2$. Согласно задаче 6а), мы можем так разбить числа от 1 до k на два подмножества A и B что $\sum\limits_{i\in A} y_i \leqslant (k+1)/4$ и $\sum\limits_{i\in B}(1-y_i)\leqslant (k+1)/4$. Тогда, если $i\in A$, то уменьшим соответствующее x_i до -1. Сумма уменьшилась на $2\sum\limits_{i\in A} y_i\leqslant (n+1)/2$. Если же $i\in B$, то увеличим соответствующее x_i до 1. Аналогично, сумма увеличилась на $2\sum\limits_{i\in B}(1-y_i)\leqslant (n+1)/2$. Следовательно, сумма стала отличаться от 0 не более, чем на $(n+1)/2$. Но все переменные стали или 1, или -1, что и требовалось.

8a). Рассмотрим 99-ки чисел $(x_1,x_2,\ldots,x_{99})$ такие, что

$$x_i\in[0,1],\quad \sum_i x_i\vec{\mathbf{u}}_i=(1/3,1/3,1/3)=\frac{1}{3}(1,1,1).$$

Это — система линейных условий на x_i, среди которых три уравнения. Поэтому существует решение, в котором хотя бы 96 неравенств обратилось в равенство, т. е. 96 координат — нули или единицы.

Тогда либо 65 координат равны нулю, либо 32 координаты равны 1 (иначе нулевых и единичных координат не больше $64+31=95<96$). Если 65 координат равны нулю (скажем, это последние 65 координат), то

$$\sum_{i=1}^{34}\vec{\mathbf{u}}_i\geqslant\sum_{i=1}^{34}x_i\vec{\mathbf{u}}_i=\sum_{i=1}^{99}x_i\vec{\mathbf{u}}_i=\frac{1}{3}(1,1,\ldots,1),$$

поэтому в (не более, чем 34) ящиках с ненулевыми координатами не меньше 1/3 каждого ресурса. Если же 32 координаты равны единице (скажем, последние), то

$$\sum_{i=1}^{67}\vec{\mathbf{u}}_i\geqslant\sum_{i=1}^{67}(1-x_i)\vec{\mathbf{u}}_i=\sum_{i=1}^{99}(1-x_i)\vec{\mathbf{u}}_i=\frac{2}{3}(1,1,\ldots,1),$$

поэтому в ящиках с неединичными координатами не меньше 2/3 каждого ресурса, что и требовалось.

8b). Аналогично, рассмотрим 1000-ки чисел $(x_1,x_2,\ldots,x_{1000})$ такие, что

$$x_i\in[0,1],\quad \sum_i x_i\vec{\mathbf{u}}_i=(1/5,\ldots,1/5)=\frac{1}{5}(1,\ldots,1).$$

Это — система линейных условий на x_i, среди которых пять уравнений. Поэтому существует решение, в котором хотя бы 995 неравенств обратилось в равенство, т. е. 995 координат — нули или единицы.

Тогда либо 799 координат равны нулю, либо 197 координаты равны 1 (иначе нулевых и единичных координат не больше $798+196=994<995$). Если 799 координат равны нулю, то в (не более, чем в 201) ящиках с ненулевыми координатами не меньше 1/5 каждого ресурса. Если же есть 197 координат равны единице, то в ящиках с неединичными координатами не меньше 4/5 каждого ресурса, что и требовалось.

9. Во всех примерах каждый ящик будет содержать ресурсы ровно одного типа, и все ящики с i-м ресурсом будут равными. Поэтому примеры мы будем записывать так: $(a_1,a_2,\ldots,a_t)$, где a_i — количество ящиков с i-м ресурсом.

Ящику номер i мы сопоставим k-мерный вектор $\vec{\mathbf{u}}_i$, у которого j-я координата u_{ij} есть количество j-го ресурса в этом ящике. Считаем, что векторы нормированы, т. е. $\sum_i\vec{\mathbf{u}}_i=(1,1,\ldots,1)$ (этого можно добиться выбором подходящей единицы измерения для каждого ресурса).

9a). Пример. $(1,1,\ldots,1,N-k+1)$.

Оценка. Рассмотрим N-ки чисел $(x_1,\ldots,x_N)$ такие, что

$$x_i\in[0,1],\quad \sum_i x_i\vec{\mathbf{u}}_i=(1/2,1/2,\ldots,1/2)=\frac{1}{2}(1,1,\ldots,1).$$

Это — система линейных условий на x_i, среди которых k уравнений. Поэтому существует решение, в котором хотя бы $n-k$ неравенств обратилось в равенство, т. е. $n-k$ координат — нули или единицы.

Тогда либо $N-f_N(1/2)$ координат равны нулю, либо

$$f_N(1/2)-s=\left\lceil\frac{1}{2}(N-s)\right\rceil\geqslant\left\lfloor\frac{1}{2}(N-s)\right\rfloor=N-f_N(1/2)$$

координат равны 1. Действительно, иначе нулевых и единичных координат не больше

$$(N-f_N(1/2)-1)+(f_N(1/2)-s-1)=N-k-1,$$

что невозможно.

Пусть это последние $N-f_N(1/2)$ координат. Заменяя, если нужно, набор $A=(x_1,\ldots,x_N)$ на $(1-x_1,\ldots,1-x_N)$, можно считать, что $x_{f_N(1/2)+1}=x_{f_N(1/2)+2}=\ldots=x_N=0$. Тогда

$$\sum_{i=1}^{f_N(1/2)}\vec{\mathbf{u}}_i \geqslant \sum_{i=1}^{f_N(1/2)}x_i\vec{\mathbf{u}}_i=\sum_{i=1}^{N}x_i\vec{\mathbf{u}}_i=\frac{1}{2}(1,1,\ldots,1),$$

что и требовалось.

9b). Пример. $(1,\ldots,1,N-k+1)$.

Оценка. Опять рассмотрим N-ки чисел $(x_1,\ldots,x_N)$ такие, что

$$x_i\in[0,1],\qquad \sum_i x_i\vec{\mathbf{u}}_i=\frac{1}{3}(1,1,\ldots,1).$$

По аналогичным причинам существует решение, в котором не более k координат отличны от 0 и 1, и поэтому либо $N-f_N(1/3)$ координат равны нулю, либо $f_N(1/3)-s$ координат равны 1.

В первом случае аналогично получаем, что первые $f_N(1/3)$ ящиков дают требуемый набор. Во втором, опять же заменяя набор на обратный, получаем, что первые

$$N_1=N-f_N(1/3)+s=s+\left\lfloor\frac{2}{3}(N-s)\right\rfloor$$

ящиков содержат хотя бы 2/3 всех ресурсов. Тогда мы знаем, что из них можно выбрать

$$f_{N_1}(1/2)=s+\left\lceil\frac{1}{2}(N_1-s)\right\rceil\leqslant s+\left\lceil\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}(N-s)\right\rceil=f(1/3),$$

что и требовалось.

9c). Пример. $(2,\ldots,2,N-2(k-1))$.

Оценка. Рассмотрим решение системы

$$\left\{(x_1,\ldots,x_N):\quad x_i\in[0,1],\quad \sum_i x_i\vec{\mathbf{u}}_i=\frac{2}{3}(1,1,\ldots,1)\right\}.$$

с минимальным количеством координат, отличных от нуля и единицы (таких не более k). В нем либо $N-f_N(2/3)$ координат равны нулю, либо $f_N(2/3)-s$ координат равны 1. В первом случае первые $f_N(2/3)$ ящиков дают требуемый набор.

Во втором получаем, что первые $N-f_N(2/3)+s=N-N_1$ ящиков содержат хотя бы 1/3 всех ресурсов. Рассмотрим остальные $N_1=f_N(2/3)-s$ ящиков и выберем из них $f_{N_1}(1/2)$, содержащие хотя бы половину остатка. Тогда получаем всего

$$N-N_1+f_{N_1}(1/2)=N-\left\lfloor\frac{1}{2}(f_N(2/3)-2s)\right\rfloor\leqslant N-\left\lfloor\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}(N-2s)\right\rfloor=f_N(2/3),$$

что и требовалось.

9d). Пример. Пусть $r\in[1,q-1]$ таково, что $pr\equiv 1 \pmod q$, $d=\lceil pr/q\rceil$ (тогда $qd-pr=q-1$). Тогда, если $N\geqslant rs$, то пример таков: $(r,\ldots,r,N-rp)$. Действительно, тогда нужно взять

$$ds+\left\lceil\frac{p}{q}(N-rs)\right\rceil=\left\lceil\frac{pN+s(qd-pr)}{q}\right\rceil=\left\lceil\frac{pN+s(q-1)}{q}\right\rceil=s+\left\lceil\frac{pN-s}{q}\right\rceil,$$

ящиков, что и требовалось.

Оценка. Индукция по $p+q$. Опять рассмотрим решения системы

$$\left\{(x_1,\ldots,x_N):\quad x_i\in[0,1],\quad \sum_i x_i\vec{\mathbf{u}}_i=\frac{p}{q}(1,1,\ldots,1)\right\}.$$

В одном из них не более k координат отличны от 0 и 1, и поэтому либо $N-f_N(p/q)$ координат равны нулю, либо $f_N(p/q)-s$ координат равны 1. В первом случае первые $f_N(p/q)$ ящиков дают требуемый набор.

Во втором получаем, что некоторые $N-f_N(p/q)+s$ ящиков содержат хотя бы $(q-p)/q$ всех ресурсов. Возможны снова два случая: (i) $q-p>p$ и (ii) $q-p<p$.

В случае (i) положим

$$N_1=N-f_N(p/q)+s=\left\lfloor\frac{(q-p)N+s}{q}\right\rfloor,$$

откуда

$$pN_1-s\leqslant\frac{p}{q}((q-p)N+s)-s=\frac{q-p}{q}(pN-s).$$

Тогда мы знаем, что из N_1 ящиков можно выбрать

$$f_{N_1}\left(\frac{p}{q-p}\right)=s+\left\lceil\frac{pN_1-s}{q-p}\right\rceil\leqslant s+\left\lceil\frac{1}{q-p}\cdot\frac{q-p}{q}(pN-s)\right\rceil=f_N(p/q)$$

ящиков, содержащих не менее $\dfrac{p}{q-p}\cdot\dfrac{q-p}{q}=\dfrac{p}{q}$ ресурсов каждого типа, что и требовалось.

В случае (ii) мы получили $N-f_N(p/q)+s$ ящиков, содержащие хотя бы $(q-p)/q$ ресурсов. Тогда среди оставшихся

$$N_1=f_N(p/q)-s=\left\lceil\frac{pN-s}{q}\right\rceil$$

ящиков найдутся $f_{N_1}((2p-q)/p)$, содержащие хотя бы $\alpha_1=(2p-q)/p$ от остатка ресурсов каждого типа. Рассмотрим полученные

$$k=N-f_N(p/q)+s+f_{N_1}((2p-q)/p)=N-N_1+f_{N_1}((2p-q)/p)$$

ящиков. Если в первых $N-f_N(p/q)+s$ содержится $l_i\geqslant(q-p)/q$ ресурсов i-го типа, то всего их не менее, чем

$$l_i+\frac{2p-q}{p}(1-l_i)=\frac{2p-q}{p}+\frac{q-p}{p}l_i\geqslant\frac{2p-q}{p}+\frac{(q-p)^2}{pq}=\frac{p}{q},$$

что и требовалось. Осталось показать, что $k\leqslant f_N(p/q)$. Имеем:

$$(q-p)N_1+s\geqslant\frac{q-p}{q}(pN-s)+s=\frac{p}{q}((q-p)N+s),$$

откуда

$$k=N-N_1+f_{N_1}\left(\frac{2p-q}{p}\right)=N-s-\left\lfloor\frac{(q-p)N_1+s}{p}\right\rfloor\leqslant N-s-\left\lfloor\frac{1}{p}\cdot\frac{p}{q}((q-p)N+s)\right\rfloor=f_N(p/q),$$

что и требовалось.

11. Ответ. k ящиков в любом случае.

Идея решения совпадает с идеей решения задач 8 и 9. Надо лишь добавить, что при количестве ящиков, не меньшем количества типов фруктов, можно заполнить каждый ящик одним типом фруктов; тогда нужно будет вскрыть по ящику с каждым типом фруктов, т. е. суммарно не менее k ящиков.