Почти-периодичность и символическая динамика.

Приближения чисел и символическая динамика.

Мы изучаем эволюцию систем во времени. Простейшей и самой важной системой служит Кентавр, прыгающий по круглому стадиону и сдвигающийся на одну и ту же дугу. Даже этот случай чрезвычайно интересен — он связан с приближением иррациональных чисел рациональными и его понимание помогает решить много хороших задач, в том числе олимпиадных). Система из нескольких кентавров описывает совместные приближения нескольких чисел. Более сложные системы описывают поведение значений многочленов в целых точках.

Общая терминология такова. Пусть M – множество (множество состояний изучаемого объекта ("природы").

$f : M \to M$ – отображение M в себя — *функция перехода* к следующему моменту времени. $f^{(n)}(x) = f(f(\dots x)\dots)$ (n раз).

$f^{(-1)}$ — есть обратная функция, а если f не взаимно однозначна, то $f^{(-1)}(x)$ — один из прообразов x. $f^{(-n)}(x) = f^{(-1)}(f^{(-1)}(\dots x)\dots)$ (n раз). *Орбита* или *эволюция* точки x — это множество $\{x, f(x), \dots, f^{(n)}(x), \dots\}$.

Определение. Пусть M множество действительных чисел (Можно представлять M как множество точек на числовой прямой.). Предельной точкой множества M будем считать точку (не обязательно принадлежащую M), такую, что сколь угодно близко к ней найдутся точки из M. Например, нуль — предельная точка множества положительных чисел.

Как описываются явления природы? Точное состояние нам никогда не известно, его задают приближенно. Явление природы наблюдается, когда состояние системы попадает в некоторое множество $U \subset M$. Поэтому действуют так.

Мы наблюдаем попадание или не попадание $f^{(k)}(x_0)$ в U, в зависимости от чего на k-ом месте слова W пишем 0 или 1. W — суть протокол эксперимента.

Более детальное описание требует большего алфавита, но по сути ничем не отличается.

Изучать бесконечное слово мы будем прежде всего исследуя его конечные куски. Последовательности мы иногда будем называть *словами*. *Куском*, или *подсловом* V слова W мы называем набор символов, встречающихся в W, идущих подряд. Место, где этот кусок встречается, называется *вхождением* v в W.

Цикл A — Предварительный.

Немного олимпиадчины

A1. а) На бесконечной в обе стороны клетчатой полоске записаны целые числа. Докажите, что найдется ее кусок, сумма чисел в клетках которого делится на 2005.

б) Пусть теперь на этой полоске записаны произвольные числа. Докажите, что найдется ее кусок сумма чисел в клетках которого отличается от целого не больше, чем на $0,001$.

в) $\sum_{i=1}^{100} x_i = 1$, $x_i > 0$, $|x_{k+1} - x_k| < 1/50$. Докажите, что можно выбрать 50 чисел, сумма которых отличается от $1/2$ меньше, чем на $1/100$.

A2. Периодична ли функция:
а) $Y = \cos(x) + \cos(\sqrt{2}x) + \cos(\sqrt{3}x) + \cos(\sqrt{5}x)$
б) $Y = \sin(x) + \sin(\sqrt{2}x) + \sin(\sqrt{3}x) + \sin(\sqrt{5}x)$

A3. а) Может ли сумма двух периодических функций с наименьшими периодами 1 и $\sqrt{2}$ снова быть периодической функцией?

б) Может ли сумма нескольких непрерывных периодических функций с попарно несоизмеримыми наименьшими периодами снова быть периодической функцией?

A4. Даны две прямые, образующие угол φ. На одной взята точка M и в этой точке сидит блоха, которая прыгает с одной прямой на другую ровно на 1 см, причем всегда в точку, отличную от предыдущей. Докажите, что если блоха снова оказалась в исходной точке, то число φ/π — рационально.

A5. Докажите, что $\sin(n^2)$ не стремится к 0 при $n \to \infty$.

Прыжки Кентавров.

А6. а) По круглому стадиону (кольцу длины 1) прыгает Кентавр. Ширина его прыжка (т.е. длина дуги, на которую он все время сдвигается) постоянна и равна a. Здесь и далее будем считать, что длина прыжка кентавра иррациональна. Докажите, что Кентавр будет сколь угодно близко подходить к своему начальному положению.

б) Докажите, что не позднее, чем за n шагов Кентавр приблизится к началу на расстояние, меньшее $1/n$.

Рассмотрим теперь случай более сложного множества состояний. Пусть прыгает стадо кентавров, для простоты два кентавра.

А7. а) Два кентавра появляются в стартовой точке Стадиона и прыгают, как в предыдущем случае. Ширина прыжка одного — a, другого — b. Докажите, что рано или поздно оба одновременно окажутся сколь угодно близко от стартовой точки.

б) Докажите, что не позднее чем за n^2 шагов оба они окажутся на расстоянии меньшем чем $1/n$ от стартовой точки.

А8. Теорема Пуанкаре о возвращении. Пусть отображение F, сохраняющее площади, переводит единичный квадрат K в себя. Докажите, что для любого подмножества $U \in K$ положительной площади, найдется точка $x \in U$, такая, что при некотором $n > 0$ $F(F(\dots F(x)\dots)$ (n раз) тоже принадлежит U.

А9. Фишку можно сдвигать на величину ± 1 и $\pm\sqrt{2}$ вдоль числовой прямой. Докажите, что ее можно приблизить к началу координат с любой точностью вне зависимости от ее начального положения.

Определение. Множество точек числовой прямой называется *всюду плотным* если в любом интервале есть точки этого множества.

А10. а) Докажите, что множество положений Кентавра всюду плотно, т.е. на любой интервал он рано или поздно попадает.

б) Докажите, что множество положений Кентавра равномерно распределено, т.е. вероятность обнаружения Кентавра на данной дуге длины b равна b вне зависимости от положении дуги на окружности.

Указание. Сдвиг дуги на d не меняет вероятности обнаружения.

А12. Назовем набор вещественных чисел $x_1, \dots, x_s$ *линейно независимым над* $\mathbb{Q}$, если для любых рациональных $\alpha_1, \dots, \alpha_s$ равенство $\sum_{i=1}^{s} \alpha_i x_i = 0$ влечет равенство нулю всех α_i. (Например, независимость 1 и a означает иррациональность a).

а) Докажите, что числа $1, \sqrt{2}, \sqrt{3}$ линейно независимы над $\mathbb{Q}$.

б) Пусть $n_1, \dots, n_s$ – различные натуральные числа, свободные от квадратов (т.е. не делящиеся на квадрат числа, большего единицы). Доказать, что $1, \sqrt{n_1}, \dots, \sqrt{n_s}$ линейно независимы над $\mathbb{Q}$.

А13. Полная теорема о группе из n Кентавров: Пусть величины прыжков кентавров a_i, $i = 1, \dots n$ линейно независимы над Q.

Тогда для любого набора точек g_i и любого $\varepsilon > 0$ найдется такой момент времени, когда каждый i-й кентавр попадет в ε -окрестность соответствующей точки.

Обозначим через T_n^d полную теорему о группе Кентавров для дискретного времени, T_n^c – для непрерывного. Теорема T_1^d обсуждена в предыдущих пунктах. Докажите импликации:

а). $T_n^d \to T_{n+1}^c$

б). $T_n^c \to T_n^d$

Из них получите всю теорему.

Цикл В. Кентавр и теория чисел.

В1. а) Докажите, что для любого положительного числа a найдутся сколь угодно большие целые p и q такие, что $|q \cdot a - p| < 1/q$ (или, что то же самое, $|a - p/q| < 1/q^2$, так что дробь p/q "хорошо приближает" a.

б) Докажите, что для любых действительных $a_1, \dots, a_k$, найдутся сколь угодно большие целые $q \neq 0$ и $p_1, \dots, p_k$ такие, что $|q \cdot a_i - p_i| < 1/q^{1/k}$.

в) Пусть $a_{ij}; i = 1, \ldots, k; j = 1, \ldots, l$ – вещественные числа. Тогда существуют сколь угодно большие целые $q_i; i = 1, \ldots, l$ (не все нули) и целые $p_j; j = 1, \ldots, k$ такие, что при всех j

$$|\sum_i q_i \cdot a_{ij} - p_j| < 1/\max_j(q_j)^{l/k}$$

г) **Лемма Кронекера.** Пусть $1, a_1, \ldots, a_k$ – вещественные числа, линейно независимые над $\mathbb{Q}$, $b_1, \ldots, b_k \in [0, 1]$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ при некотором $n \in \mathbb{N}$ для всех i выполняются неравенства $|\{na_i\} - \{b_i\}| < \varepsilon$.

B2. Дана бумага в клетку. Через два узла проведены параллельные прямые. Докажите, что в образовавшейся замкнутой полосе лежит бесконечно много узлов сетки.

B3. а) Докажите, что если радиус окружности стремится к бесконечности, то расстояние от нее до ближайшей целой точки стремится к нулю.

б) К нулю стремится также отношение числа целых точек, попавших на окружность к ее радиусу.

B4. а) Докажите, что степень двойки может начинаться с любого числа девяток.

Указание. Прологарифмируйте по основанию 10 неравенство: $0,9...9 \cdot 10^k < 2^l < 10^k$;, воспользуйтесь иррациональностью $\log 2$ и утверждением о дробных частях арифметической прогрессии.

б) Докажите, что степень двойки может начинаться с любой комбинации цифр.

в) С какой вероятностью наугад взятая степень двойки начинается с 1?

г) Докажите, что найдется такое n, что числа 2^n и 3^n начинаются либо с 100000 либо с 99999.

д) Докажите, что найдется такое n, что числа 2^n и 3^n начинаются соответственно с 2005 и с 2006.

е). Докажите, что 2^{n^2} может начинаться с любой комбинации цифр

Указание. См. серию C.

ж). Докажите, что если $P(n) > 0$ то $2^{P(n)}$ может начинаться с любой комбинации цифр, (P — многочлен с целыми коэффициентами).

Цикл C. Дробные части значений многочлена в целых точках

C1. а) Последовательность натуральных чисел n_i называется хорошей для x, если все предельные точки $\{n_i a\}$ суть 0 или 1, а последовательность $\{n_i^2 a\}$ имеет предельной точкой x.

Рассмотрим дробные части $\{n^2 a\}$. Назовем число x *хорошим*, если существует хорошая последовательность натуральных чисел n_i для x. Докажите, что сумма хороших чисел снова хорошее число.

Докажите, что если $\{n_i\}$ хорошая последовательность для a, а $\{m_j\}$ хорошая последовательность для b, то для некоторой $j(i)$ $\{n_i + m_{j(i)}\}$ есть хорошая последовательность для $a + b$ или для $a + b - 1$.

б) Докажите что 0 и 1 хорошие числа.

в) Докажите, что если $\{n^2 a\} = \varepsilon$ и $c \in [0, 1]$ то при некотором целом k $|\{(kn)^2 a\} - c| < 2\sqrt{\varepsilon}$.

г) Пусть $a \notin Q$. Докажите, что множество $\{n^2 a\}$ всюду плотно.

C2. а) Пусть $a \notin \mathbb{Q}$, $m \in \mathbb{N}$ – фиксировано. Докажите, что множество $\{n^m a\}$ всюду плотно.

б) Пусть $P(x)$ многочлен с иррациональным старшим коэффициентом. Докажите, что множество $\{P(n)\}$ всюду плотно.

в) Пусть $P(x)$ многочлен с иррациональным коэффициентом не при константе. Докажите, что множество $\{P(n)\}$ всюду плотно.

Лемма Вейля.

Пусть $P_1, \ldots, P_s$ – многочлены такие, что никакая их линейная комбинация с рациональными коэффициентами не есть сумма многочлена с рациональными коэффициентами и константы. Тогда вектор, составленный из дробных частей $(\{P_1(n)\}, \ldots, \{P_s(n)\})$, всюду плотен.

C3. Докажите лемму Вейля.

Цикл D. Кентавр и слова.

D1. Стадион, по которому прыгает Кентавр (ширина прыжка a иррациональна) разбит на два равных сектора: первый и второй. Судья записывает номера секторов, посещаемых Кентавром. Докажите, что эта последовательность непериодична.

D2. а) Пусть W есть последовательность первых цифр степеней двойки, $W = 1248136125\ldots$, $V = 1521635\ldots$ – последовательность первых цифр степеней пятерки, u – подслово W, u^* – слово, получающееся если u записать в обратном порядке. Докажите, что u^* есть подслово V.

б) Докажите, что сверхслово W из предыдущего пункта непериодично.

в). Сколько различных подслов длины 13 в сверхслове W?

г). Сколько различных подслов длины k в сверхслове W?

д). Докажите, что последовательность первых цифр 2^{n^2} непериодична.

Почти-периодичность и символическая динамика.

После промежуточного финиша

Теперь мы будем заниматься протоколом наблюдения за кентавром, прыгающим по окружности, и его попаданиями в фиксированную полуокружность. А также прочими аналогичными системами.

Изучим ситуацию, когда начальная точка в процессе эволюции попадает на границу области наблюдения. Интуиция говорит, что надо тогда рассматривать бесконечно малые сдвиги. Эта интуиция оформляется так:

Конечное слово v^f называется *существенной конечной эволюцией* точки x^*, если в любой окрестности точки x^* существует открытое множество V, любая точка $x \in V$ из которого обладает эволюцией v^f. Бесконечное слово w называется *существенной эволюцией* точки x^*, если любое его начальное подслово — существенная конечная эволюция точки x^*.

Под *эволюцией точки*, когда это не вызовет недоразумений, будем понимать, существенную эволюцию. Отметим, что точка может иметь несколько существенных эволюций.

D3. Пусть v — конечное слово. Тогда множество точек с конечной существенной эволюцией v замкнуто. Аналогичное утверждение верно для бесконечного слова w.

D4. Сколько существенных эволюций может иметь точка при динамике Кентавра?

Серия E. Значения многочлена в целых точках. Слова и тор.

При решении серии E можно пользоваться леммой Вейля.

E1. Рассмотрим преобразование T :

$$x \to x + y \quad y \to y \tag{1}$$

Найдите обратное отображение $T^{(-1)}$, а также $T^{(n)}$.

Пусть далее $U : 1/2 < x < 1$ и $W_n = 1$ если $T^{(n)}(A_0) \in U$, иначе $W_n = 0$. Будем рассматривать единичный квадрат как тор, склеив нижние и верхние а также левую и правую стороны. (Это координатный тор для пары дробных частей $(\{x\}, \{y\})$, подобно тому окружность задает дробную часть одного числа).

а) Нарисуйте образы прямых $x = 1/2$ и $x = 0$ (она же — прямая $x = 1$) при отображениях $T^{(-k)}; k = 0, 1, 2, 3, 4$ и части, на которые они разбивают тор. Покажите, что первые 4 шага эволюции для точек одной области одинаковы и укажите слова, отвечающие каждой такой области.

б) Докажите, что любое слово в этой динамике получается и в динамике, описанной в задаче D1 при некотором α. Верно и обратное.

в) Докажите, что областям, центрально симметричным относительно точки $(1/2, 1/2)$ отвечают инвертированные слова (0 заменяется на 1 и наоборот), а областям тора, центрально симметричным относительно точки $(1/4, 1/2)$ (или, что то же самое, $(3/4, 1/2)$, почему?) отвечают одинаковые слова.

г) Пусть F_k есть число рациональных чисел полуинтервала $[0, 1)$ со знаменателем не превосходящим n, M_n – число слов длины $n + 1$, возникающих в задаче D1 при всевозможных α. Докажите, что $M_n = (\sum_{k=1}^{n} F_k)/2$.

E2. Для каждой пары действительных чисел a и b рассмотрим последовательность $p_n = [2\{an + b\}]$, где фигурные скобки означают дробную часть числа, а квадратные — целую часть. Любые k подряд членов этой последовательности назовем словом. Верно ли, что любой упорядоченный набор из нулей и единиц длины k будет словом в некоторой последовательности p_n, если а) $k = 4$? б) $k = 5$?

E3. Пусть $P(x) = \alpha x^2$, $\alpha \notin \mathbb{Q}$, $W_n = 1$, если $\{P(n)\} \geq 1/2$ и $W_n = 0$ если $\{P(n)\} < 1/2$. Докажите, что сверхслово W можно получить так. Рассмотрим преобразование T :

$$x \to x + y \quad y \to y + 2\alpha \tag{2}$$

$A_0 = (x_0, y_0)$. $U : 1/2 < x < 1$. $W_n = 1$ если $T^{(n)}(A_0) \in U$, иначе $W_n = 0$.

Найдите A_0.

E4.

a) Докажите, что при иррациональном α никакие 3 образа прямых $x = n/2; n \in \mathbb{Z}$ не пересекаются в одной точке.

b) Докажите, что при любом рациональном α такие точки пересечения появятся.

E5. а) Найдите число частей разбиения плоскости k прямыми общего положения.

б) Тот же вопрос для разбиения сферы k экваторами общего положения.

в) Докажите, что число частей разбиения тора набором прямых с рациональным наклоном, никакие 3 из которых не пересекаются в точке, равно числу их точек пересечения.

д) Найдите общее число частей разбиения двумерного тора образами прямых $x = 1/2$ и $x = 1$ при отображениях $T^{(k)}; k = 0, \ldots, -n$.

E7. Сколько существенных эволюций может иметь точка в двумерной динамике при иррациональном α (см. E3 и конец серии D)?

Напомним, что мы имеем дел с множеством N с заданным на нём отображением $f : N \to N$ и его подмножествами.

E8. Слои. Пусть замкнутое подмножество M удовлетворяет следующему условию : если A -точка из M и $f^{(n_i)}(A) \to C$ $(C \in M,\ n_i \to \infty)$ то и для любой точки B из множества расстояние между $\{f^{(n_i)}(B)\}$ и множеством M стремится к нулю. Такое множество будем называть *слоем.*

Следующее свойство иллюстрирует введённое понятие **E9.** (Склейка). Пусть $f : M \to M$ – отображение замкнутого ограниченного множества M в себя. Пусть множество M разбито на семейство замкнутых подмножеств N_λ, которые f переставляет (т.е. $f(N_\lambda) = N_{\lambda'}$). Докажите, что тогда $\{N_\lambda\}$ суть семейство слоёв.

E10. Докажите, что множество точек с данной существенной эволюцией является слоем.

E11. (Эволюция пар точек). Теперь возьмём две произвольные точки A и B и изучим устройство замыкания множества $(f^{(n)}(A), f^{(n)}(B))$.

а) Докажите, что если в условиях пункта E3 $1, \alpha, Y_A - Y_B$ линейно независимы над $\mathbb{Q}$, то замыкание множества пар точек представляет собой множество точек вида (D, E) где $Y_D - Y_E = Y_A - Y_B$, а координаты X_E, X_D произвольны. (За Y_A и X_A обозначены соответствующие координаты точки A)

Назовём хорошей последовательность индексов n_i, для которой $f^{(n_i)}(A) \to A$. Нас интересуют предельные точки последовательности $f^{(n_i)}(B)$ для хорошей последовательности n_i. Множество таких точек назовём *облаком* и обозначим $O(A, B)$.

б) Докажите, что $O(A, B)$ замкнуто, и что образ облака $O(A, B)$ при k-ой итерации есть облако $O(f^{(k)}(A), f^{(k)}(B))$.

в) Докажите, что если $(Y_B - Y_A)/\alpha$ иррационально, то облако $O(A, B)$ содержит точку (Z, Y_B) для любого Z.

E12. Слои и облака а) Обозначим $O(A, B)$ через L_0; через L_{i+1} обозначим замыкание объединения всевозможных облаков $O(A_i, B_i)$, для которых $A_i,\ B_i \in L_i$. Положим $L_{AB} = \bigcup L_i$. Докажите, что любой слой, содержащий точки A и B, содержит и замыкание L_{AB}.

б) Докажите, что если $Y_B - Y_A$ иррационально, то L_{AB} содержит точку (Z, Y_A) для любого Z.

в) Докажите что произвольный слой пересекается с каждым из множеств $x \in [0, 1/2]$ и $x \in [1/2, 1]$ и г) Разные точки имеют разные существенные эволюции.

E13. а) Докажите, что из любой последовательности пар точек квадрата можно извлечь сходящуюся подпоследовательность.

б) Докажите, что для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $N(\varepsilon)$, что все существенные эволюции длины $N(\varepsilon)$ для любых двух точек находящихся на расстоянии не меньшем, чем ε различны

E14. Рассмотрим образы прямых $x = 0, x = 1/2$ при отображении $T^{(0)}, \ldots, T^{(-s)}$, $s > N(1/2)$. Они разбивают единичный тор на многоугольники M_i. Докажите, что образы прямых $x = 0, x = 1/2$ при отображении $T^{-(s+1)}$ не могут одновременно пересечь M_i.

E15. Докажите, что при больших N между многоугольниками разбиения и словами длины N устанавливается взаимно однозначное соответствие.

E16. $P(n) = \alpha n^2; \alpha \notin \mathbb{Q}$. Пусть слово w ($w = (w_n), n \in \mathbb{N}$) состоит из последовательности первых двоичных цифр $\{P(n)\}$ т.е. $w_n = [2\{P(n)\}]$. Обозначим через $T(k)$ число различных подслов длины k слова w.

Тогда существует многочлен $Q(k)$, такой, что при достаточно больших k выполнено равенство $T(k) = Q(k)$. Докажите.

E17. Докажите, что в зависимости от α равенство $T(k) = Q(k)$ может начинать выполняться со сколь угодно большого номера k.

Многомерная динамика

F1. а) Рассмотрим преобразование T :

$$\begin{cases} x_1 \to x_1 + x_2 \\ x_2 \to x_2 + x_3 \\ \quad \cdots \\ x_n \to x_n + \varepsilon \end{cases}$$

Докажите, что при иррациональном ε никакие $n+1$ образа гиперплоскостей $x_1 = n/2; n \in \mathbb{Z}$ не пересекаются в одной точке.

б) Докажите, что при любом рациональном ε такие точки пересечения появятся.

F2. а) Докажите, что число точек пересечения n-мерного пространства k гиперплоскостями общего положения есть многочлен от k. Найдите его при $n = 3$.

б) Тот же вопрос для разбиения n-мерной сферы k экваторами общего положения.

в) Обобщите утверждение пункта E5 в) для многомерного тора.

г) Пусть $\varepsilon \notin \mathbb{Q}$. Рассмотрим преобразование T :

$$\begin{cases} x_1 \to x_1 + x_2 \\ x_2 \to x_2 + x_3 \\ \quad \cdots \\ x_n \to x_n + \varepsilon \end{cases}$$

Докажите, что число частей разбиения единичного n-мерного тора образами плоскостей $x_1 = 0$ и $x_1 = 1/2$ при отображениях $T^{(0)}, \ldots, T^{(-k)}$ есть многочлен от k, если $\varepsilon \notin \mathbb{Q}$.

F3. Рассмотрим преобразование T :

$$x \to x + y \quad y \to y + z \quad z \to z \tag{3}$$

а) Найдите обратное отображение $T^{(-1)}$, а также $T^{(n)}$.

Пусть далее $U : 1/2 < x < 1$ и $W_n = 1$ если $T^{(n)}(A_0) \in U$, иначе $W_n = 0$. Будем рассматривать единичный куб, как тор, склеив противоположные грани. (Это координатный тор для тройки дробных частей $(\{x\}, \{y\}, \{z\})$).

б) Докажите, что любое слово в этой динамике получается и в динамике, описанной в задаче E2 при некотором α. Верно и обратное.

в) Докажите, что областям, центрально симметричным относительно точки $(1/2, 1/2, 1/2)$ отвечают инвертированные слова (0 заменяется на 1 и наоборот). Каким центральным симметриям отвечают одинаковые слова?

г) Докажите, что имеется слово, которое не получается эволюцией из задачи E2 ни для какого α.

д) Рассмотрим преобразование T :

$$x \to x + y \quad y \to y + z \quad z \to z + \alpha \tag{4}$$

Докажите, что если $\alpha \notin \mathbb{Q}$, то никакие 4 образа плоскостей $x = 1$ и $x = 1/2$ не пересекаются в одной точке (а если $\alpha \in \mathbb{Q}$ то такие точки появятся). Докажите, что число частей разбиения тора образами этих прямых под действием $T^{(k)}; k = 0, \ldots, n$ есть многочлен $Q_3(n)$.

F4. Обобщите утверждение задачи E16 на многочлен $P(x)$ степени n с иррациональным старшим коэффициентом.

Уточнение понятия вероятности в задаче о Кентавре

В некоторых задачах о Кентавре речь идет о *вероятности* обнаружения Кентавра или группы Кентавров в заданной области (например, на дуге окружности). Дадим точное определение такой вероятности. Пусть Кентавр путешествует внутри множества M, стартуя в начальной точке X_0. Для каждой открытой области $U \subset M$ обозначим через $u(n)$ число посещений Кентавром области U после n прыжков. Тогда величина $u(n)/n$ есть частота появления Кентавра в U после n прыжков. Предел этой частоты при $n \to \infty$ (если он существует) называется *вероятностью* $p(U)$ обнаружения кентавра в области U. Вероятность обнаружения группы из m Кентавров в областях $U_1, U_2, \dots, U_m$ соответственно определяется аналогично.

Нетрудно заметить, что величина $u(n)$ совпадает с числом единиц на начальном отрезке протокола для области U длины n. Поэтому вероятность $p(U)$ можно иначе определить как *частоту вхождения* единицы в протокол для области U.

Вероятность события A, заданного на множестве M, называется *равномерно распределенной* на M, если для любой области $U \subset M$ вероятность $p_U(A)$ события A в области U пропорциональна площади (объему) U. Для задачи о Кентавре: $A =$ "Кентавр обнаружен в точке $X \in M$".

Мы рассматриваем только дуги и области, являющиеся многоугольниками.

A10. в) Пусть по Стадиону прыгают два Кентавра с шириной прыжков a и b, которые линейно независимы над $\mathbb{Q}$. Определим положение системы из двух Кентавров как упорядоченную пару $P = (x, y)$, где $0 \leq x < 1$ и $0 \leq y < 1$ — координаты этих Кентавров на Стадионе. Таким образом, систему из двух Кентавров будем рассматривать как некоторую точку P, принадлежащую единичному квадрату $M = [0, 1) \times [0, 1)$ на координатной плоскости.

Докажите, что множество положений системы из двух Кентавров равномерно распределено на M.

Решения задач

Цикл А

Задача 1А.

1) Зафиксируем начальную клетку K_0 и рассмотрим клетки $K_1, K_2, \ldots$, следующие за ней. Рассмотрим остатки сумм чисел, записанных в клетках $S_0 = K_0, S_1 = K_0+K_1, S_2 = K_0+K_1+K_2, \ldots S_n = K_0+K_1+\ldots K_n$ по модулю 2005. При $n > 2005$ две такие суммы $S_l = K_0+\ldots K_l$ и $S_t = K_0 + \ldots K_t$ $(t > l)$ будут иметь одинаковый остаток. Тогда сумма чисел в клетках $K_{l+1}, \ldots K_t$, равная $S = K_{l+1} + \ldots K_t$ будет делиться на 2005.

2) Разобьем отрезок $[0, 1]$ на 2000 одинаковых частей и рассмотрим попадание сумм S_i, описанных в предыдущей задаче, в каждый из этих отрезков. Если $n > 2000$, то две суммы попадут в один и тот же отрезок. Далее рассуждаем как в пункте 1.

3) Рассмотрим наборы чисел: $S_1 = x_1, x_3, \ldots, x_{99}$ и $S_2 = x_2 + x_4 + \ldots x_{100}$; Будем последовательно осуществлять обмен x_1 и x_2, x_3 и x_4 и т.д. Как только обменяем x_{99} и x_{100}, наборы поменяются местами. Т.к. $S_1+S_2 = 1$, то либо $S_1 < 1/2 < S_2$, либо $S_2 < 1/2 < S_1$ и в процессе обмена мы перешагнем через $1/2$. Поскольку изменение суммы каждый раз происходит не более чем на $1/50$, мы в этот момент приблизимся к $1/2$ не далее, чем на $1/100$.

Задача 2А.

1) Нет. $Y(0) = 4$, а в других точках все слагаемые одновременно максимума не достигают.

2) Нет. В виде линейных комбинаций функции Y и ее производных можно по-отдельности получить $\sin(x)$, $\sin(\sqrt{2}x)$, $\sin(\sqrt{3}x)$, $\sin(\sqrt{5}x)$, поэтому период Y должен быть общий для всех этих функций, что, очевидно, невозможно.

Задача 3А.

1) Ответ: может. Рассмотрим функции $f_1(x), f_2(x)$ вида: $f_i(x) = 0$, если x не представимо в виде $m+n\sqrt{2}+k\sqrt{3}$, где $m, n, k \in \mathbb{Z}$, и $f_1(m+n\sqrt{2}+k\sqrt{3}) = m-k^2$, $f_2(m+n\sqrt{2}+k\sqrt{3}) = n+k^2$.

   Легко видеть, что наименьший период функции f_1 равен 1, наименьший период функции f_2 равен $\sqrt{2}$, а наименьший период суммы $f_1 + f_2$ равен $\sqrt{3}$, ибо $f_1(x) + f_2(x) = 0$, если x не представимо в виде $m + n\sqrt{2} + k\sqrt{3}$, где $m, n, k \in \mathbb{Z}$, и $f_1(x) + f_2(x) = m + n$, если $x = m + n\sqrt{2} + k\sqrt{3}$, $m, n, k \in \mathbb{Z}$.

   Ни один из участников не справился с этой задачей.

2) Ответ: не может. Воспользуемся леммой Кронекера и тем фактом, что непрерывная функция достигает на отрезке своего sup. Сумма *sup* нескольких непрерывных функций равна sup суммы по Кронекеру, но из-за несоизмеримости периодов sup может достигаться только в одной точке (см. задачу 2 в)).

Задача 4А.

Обозначим данные прямые l_0, l_1. Пусть для определенности блоха сидит на прямой l_0. Обозначим последовательность точек, посещаемых блохой, через $A_0 = M, A_1, \ldots, A_n, \ldots$. Заметим, что если i нечетно, то отрезок A_iA_{i-1} переходит в отрезок A_iA_{i+1} при осевой симметрии относительно некоторого перпендикуляра к прямой l_0, а если i четно, — относительно перпендикуляра к l_1. Так как суперпозиция двух таких симметрий есть поворот на угол 2φ, то вектор $A_{2n}A_{2n+1}$ получается из вектора A_0A_1 поворотом на угол $2n\varphi$. Если блоха возвращается в исходную точку, то при некотором n имеем $A_{2n} = A_0$ и $A_{2n+1} = A_1$. Отсюда $A_{2n}A_{2n+1} = A_0A_1$. Следовательно, $2n\varphi = 2\pi k$ при некотором целом k, то есть число φ/π рационально.

Задача 5А.

Предположим, что $\sin(n^2) \to 0$, то есть n^2/π ε-близко к 0 при $n > N$. Рассмотрим $n > N$: $|(2n+1)/\pi| > 1/2$ (такое существует в силу несоизмеримости π и 2). Но тогда n^2/π и $(n+1)^2/\pi = (n^2+2n+1)/\pi$ не могут быть одновременно ε-близки к 0.

Задача 6А.

Покажем, что Кентавр может подойти к своему начальному положению ближе, чем на ε. Для этого разобьем окружность (стадион) на n равных дуг, n выберем так, чтобы $1/n < \varepsilon$. Рассмотрим n прыжков Кентавра и обозначим точки траектории $x_1, \dots x_n$. Включая начальную точку x_0, мы имеем $n+1$ точку траектории, две из которых по принципу Дирихле попадут в один интервал, обозначим их x_l, x_k, $(l < k)$. Следовательно, если Кентавр сделает $k-l$ прыжков, он попадет либо на первую, либо на последнюю дугу, т.е. в $1/n$-окрестность начальной точки x_0. Пункт б) таким образом доказан автоматически. Заметим, что в случае иррациональности длины прыжка a все точки траектории различны и траектория Кентавра никогда не попадет в начальную точку, хотя может приблизиться к ней сколь угодно близко.

Задача 7А.

Как и в предыдущей задаче докажем сразу оба пункта. Покажем, что два Кентавра могут подойти к своему начальному положению ближе, чем на ε. Опять выберем n: $1/n \leqslant \varepsilon$ и рассмотрим теперь уже n^2 прыжков Кентавра. Обозначим (s,t) состояние, когда первый Кентавр попадает в s-ую дугу, а второй — в t-ую. Всего таких состояний возможно не больше, чем $n \times n = n^2$. Значит, рассматривая n^2 точек траектории плюс начальное положение, по принципу Дирихле два таких состояния повторятся. Пусть для определенности точки траектории после l-го и k-го прыжков попадают в состояние (s,t). Тогда после $k-l$ прыжков оба Кентавра попадут в $1/n$ — окрестность начальной точки.

Задача 8А.

Для каждого множества U обозначим $F^{-1}(U)$ его прообраз, то есть множество точек x таких, что $F(x) \in U$, аналогично определяется $F^{-2}(U), F^{-3}(U), \dots$. В силу сохранения площади $F^{-1}(U)$ имеет такую же площадь, что и U. Теперь, пусть площадь $U > 1/n$ для некоторого натурального n. Рассмотрим множества $U = F^0(U), F^{-1}(U), \dots F^{-n}(U)$. Суммарная площадь этих множеств больше 1, следовательно найдутся k, l такие, что пересечение множеств $S = F^{-k}(U) \cap F^{-l}(U)$ имеет ненулевую площадь. Но тогда $F(S), F^2(S), \dots$ тоже имеют ненулевую площадь, следовательно, $F^k(S) = U \cap F^{k-l}(U)$ имеет ненулевую площадь, то есть существуют точки из U, которые через (k-l) итераций снова попадают в U.

Задача 9А.

Пусть фишка находилась в начале в точке x_0 и пусть нам нужно сдвинуть ее к началу координат с точностью $\varepsilon = 1/n$ для некоторого натурального n. Рассмотрим числа $\{\sqrt{2}\}, \{2\sqrt{2}\}, \dots \{n\sqrt{2}\}$, среди них, как и в задаче с Кентавром, есть два, отличающиеся не более, чем на $1/n$. Пусть это $\{k\sqrt{2}\}$ $\{l\sqrt{2}\}$. Тогда $(k-l)\sqrt{2}$ ε-близко к некоторому целому m, то есть, если мы совершим сначала $k-l$ сдвигов вправо на $\sqrt{2}$, а затем мы сдвинемся на целую величину m, то в результате совершим сдвиг на величину, меньшую ε. Двигаясь такими маленькими "шажками" от x_0, мы окажемся в ε — окрестности некоторого целого, от которого целыми шагами попадем в ε-окрестность начала координат.

Задача 10А.

1) Покажем, что Кентавр попадет на произвольный интервал длины ε. По задаче 6., Кентавр в некоторый момент приблизится к началу координат ближе, чем на ε, пусть для определенности он сделает для этого n прыжков. Но тогда, делая сразу по n прыжков, он будет смещаться на величину, не превосходящую ε, а, значит, рано или поздно попадет в нужный интервал, так как его длина равна ε.

2) Приведем набросок доказательства. Обозначим длину дуги AB через $l(A, B)$ и вероятность обнаружения Кентавра на AB — через $P(A, B)$. Заметим, что если дуга AB за n прыжков Кентавра переходит в дугу $A'B'$, то $P(A', B') = P(A, B)$. Действительно, если в некоторый момент Кентавр находится на дуге AB, то через n прыжков он окажется на $A'B'$. Поэтому предел частоты появления Кентавра на AB равен соответствующему пределу для $A'B'$. Это означает, что $P(A', B') = P(A, B)$

   Докажем, что $P(A, B) \to 0$ при $l(A, B) \to 0$. Предположим, что это неверно. Тогда существует такое число $c > 0$, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется дуга A_0B_0 длины меньше ε со свойством $P(A_0, B_0) > c$. Выберем $\varepsilon < c/2$. Из доказанной в а) всюду плотности положений Кентавра на окружности следует, что при некотором n дуга A_0B_0 за n прыжков перейдет в дугу A_1B_1, не пересекающуюся с A_0B_0 и находящуюся от нее на расстоянии не больше $\varepsilon/2$. Продолжая делать сдвиги на n прыжков, получим на окружности более чем $1/c$ попарно непересекающихся дуг (образов дуги A_0B_0), вероятность обнаружения Кентавра внутри каждой из которых больше c. Отсюда вероятность обнаружения Кентавра на всей окружности должна быть больше 1. Из полученного противоречия следует, что $P(A, B) \to 0$ при $l(A, B) \to 0$.

   Теперь нетрудно показать, что вероятность обнаружения Кентавра на дугах одной и той же длины одинакова. Действительно, если AB и A_1B_1 — две дуги одинаковой длины, то согласно пункту а) найдется дуга A_2B_2 — образ дуги AB при динамике Кентавра, положение которой сколь угодно близко к A_1B_1. Не теряя общности, можно считать, что точка A_2 расположена на дуге A_1B_1. Тогда $P(A_1, B_1) = P(A_2, B_2) + P(A_1, A_2) - P(B_1, B_2) = P(A, B) + P(A_1, A_2) - P(B_1, B_2)$. По доказанному величина $P(A_1, A_2) - P(B_1, B_2)$ стремится к нулю. Следовательно, $P(A, B) = P(A_1, B_1)$.

   Поскольку при любом n существует разбиение единичной окружности на n непересекающихся дуг длины $1/n$, то вероятность обнаружения Кентавра на любой дуге длины $1/n$ равна $1/n$. Отсюда следует равенство $P(A, B) = l(A, B)$ для дуг рациональной длины. Пусть $l(A, B) \notin \mathbf{Q}$. Предположим, что $P(A, B) \neq l(A, B)$. Для определенности пусть $P(A, B) > l(A, B)$ (случай $P(A, B) < l(A, B)$ рассматривается аналогично). Выберем на окружности такую точку C, для которой $l(A, C) = P(A, B)$ и $B \in AC$. На дуге BC зафиксируем такую точку X, что $l(AX) \in \mathbf{Q}$. Тогда $P(A, X) = l(A, X) < l(A, C) = P(A, B) \leq P(A, X)$ — противоречие.

Задача 12А.

Предположим противное. Пусть

$$r_0 + r_1\sqrt{n_1} + \cdots + r_k\sqrt{n_k} = 0 \qquad (*)$$

при некоторых $r_0, r_1, \ldots, r_k \in \mathbf{Q}$. Будем вести индукцию по числу простых чисел под радикалами. Пусть $p_1, \ldots, p_s$ — эти числа. Представим равенство (*) в виде

$$\sqrt{p_1}A + B,$$

где A и B — выражения с меньшим числом простых чисел, стоящих под радикалами. Можно считать, что $A \neq 0$ (иначе $B \neq 0$ и мы воспользуемся предположением индукции для A и B). В этом случае $\sqrt{p_1} = -B/A = C$, где C представимо в виде $C = \lambda_1\sqrt{m_1} + \cdots \lambda_t\sqrt{m_t}$, причем в m_i входят только $p_2, \ldots, p_s$.

Случай 1. $C = r\sqrt{k}$, где $k \in \mathbb{Z}$, $r \in \mathbf{Q}$. Легко видеть, что этот случай невозможен.

Случай 2. При некотором p_i $C = E\sqrt{p_i}+F$, где $E \neq 0, F \neq 0$ и p_1 и p_i не входят в рациональные выражения для E и F. Перенумеровав индексы, можно считать, что $i = 2$.

Тогда имеем

$$\sqrt{p_1} = E\sqrt{p_2} + F$$

или

$$p_1 = E^2 p_2 + F^2 + 2EF\sqrt{p_2}$$

или

$$2EF\sqrt{p_2} + E^2 p_2 + F^2 - p_1 = 0.$$

Последнее равенство можно представить в виде $G\sqrt{p_2} + H = 0$, где G и H не равны нулю одновременно (и так как $EF \neq 0$ — оба не нули). Теперь для завершения доказательства достаточно применить индукцию по числу радикалов.

Задача 13A.

1) Покажем, как задача для n Кентавров и непрерывного времени сводится к задаче для $n-1$ Кентавра и дискретного времени. Рассмотрим время t_0, за которое n-ый Кентавр проходит целый круг, то есть $t_0 = 1/\alpha_n$ (сечение Пуанкаре). Таким образом, $\alpha_n k t_0 \in \mathbb{Z}$ для любого целого k, а за время $T = kt_0 + g_n/\alpha_n$ n-ый Кентавр попадет в точку g_n. Для того, чтобы за данное время T каждый i-ый кентавр (i=1,2,...n-1) попал в ε-окрестность точки g_i необходимо, чтобы для некоторого k $\alpha_i k t_0$ попало в ε-окрестность точки $g_i - \alpha_i \cdot g_n/\alpha_n$ для всех i одновременно. То есть задача свелась к задаче для $n-1$ Кентавра и дискретного времени.

2) Теперь осуществим переход от задачи с n кентаврами и непрерывным временем к задаче с дискретным временем и тем же количеством кентавров. Пусть кентаврам нужно попасть в ε-окрестности своих точек. В силу задачи A6. существует такое натуральное n, что все кентавры через n прыжков окажутся $\varepsilon/2\sqrt{n}$-близко от начальной точки. Рассмотрим множество точек $(\{\alpha_1 t\}, \ldots, \{\alpha_n t\} | t \in \mathbb{R})$. В силу непрерывного случая это множество всюду плотно в единичном n-мерном единичном кубе. Значит, существует такое t_0, что $|\alpha_i t_0 - g_i| < \varepsilon/2$ для всех i. Смещаясь каждый раз на n шагов, кентавры начнут сдвигаться от начальной точки на расстояние, не большее $\varepsilon/2$. В фазовом n-мерном пространстве точка, обозначающая положение всех кентавров будет смещаться маленькими шагами (не превышающими $\varepsilon/2$) вдоль вектора $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ и в некоторый момент окажется в $\varepsilon/2$-окрестности точки $(\alpha t_0, \ldots \alpha_n t_0)$, которая находится в $\varepsilon/2$-окрестности точки $(g_1, \ldots, g_n)$. Это и означает, что через целое число прыжков все кентавры окажутся на расстоянии, не превышающем $\varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$ от требуемых точек.

Серия B

Задача 1B.

1) Рассмотрим Кентавра, прыгающего по окружности с величиной прыжка a. Рассмотрим моменты, когда кентавр максимально приближается к начальной точке (то есть в предыдущий и последующие момент он находится дальше) Если при этом он совершает q прыжков, то, значит, приблизится к начальной точке не более, чем на $1/q$ (см 5a.). Пусть при этом он делает p кругов, тогда $|qa - p| < 1/q$, при этом q может быть сколь угодно большим.

2) Пусть теперь прыгает k Кентавров. По задаче 5б) для любого n все кентавры одновременно окажутся в $1/n$-окрестности начальной точки не более чем за n^k прыжков, например, за q

(при этом $q^{1/k} < n$). Тогда существуют такие целые $p_i, i = 1, 2, \dots k$, что $|qa_i - p_i| < 1/n < 1/(q^{1/k})$.

3) Теорема Кронекера сразу следует из полной теоремы о группе Кентавров.

Задача 2B.

Случаи, когда прямые параллельны линиям сетки или имеют рациональный тангенс угла наклона очевидны — в этих случаях бесконечно много узлов сетки лежит на самих прямых. Рассмотрим случай, когда тангенс угла наклона α иррационально. Введем систему координат, связанную с сеткой такую, что одна прямая имеет уравнение $y = \alpha x$, другая $y = \alpha x + a$ (для определенности a положительно). Тогда можно выбрать бесконечно много таких пар целых чисел, что (p, q) что $p - q\alpha < a$ (см B1.) из чего следует требуемое.

Задача 3B.

1) Рассмотрим окружность с достаточно большим диаметром и ее касательную с тангенсом угла наклона $\sqrt{2}$. Рассмотрим отрезок касательной такой, что расстояние от точек отрезка до окружности не больше, чем $\varepsilon/2$. Ясно, что чем больше радиус, тем длиннее кусок такой касательной. Расстояние от отрезка касательной длины l до ближайшей целой точки можно оценить как c/l (c — константа). Выбирая радиус достаточно большим, можно добиться, чтобы c/l было также меньше $\varepsilon/2$. Поэтому минимально расстояние от окружности до целой точки будет не больше ε.

2) Докажем данное утверждение для строго выпуклой фигуры, если ее диаметр стремится к бесконечности. Если число целых точек на границе не меньше εD, то найдется порядка $\varepsilon D/100$ пар целых точек на границе на расстоянии не более $100/\varepsilon$ друг от друга. Однако число различных векторов, соединяющих пары целых точек на расстоянии не более ε, не превосходит $\pi\varepsilon^2$. Поэтому при достаточно большом D какой-то вектор повторится не менее двух раз, что невозможно для строго выпуклой фигуры.

Задача 4B.

1) Докажем сразу пункт б). Пусть нужно, чтобы степень двойки начиналась с числа A. Это эквивалентно неравенству
$$A \cdot 10^k \leqslant 2^n < A + 1 \cdot 10^k$$
Прологарифмировав по основанию 10, имеем: $\log A + k \leqslant n \log 2 < \log(A+1) + k$. Поскольку $\log 2$ иррационально и меньше 1 и $\log(A + 1) - \log A < 1$ для всех натуральных A, то существование такого n следует из всюдуплотности траектории кентавра с длиной прыжка $\log 2$.

2) Чтобы степень двойки начиналась с единицы, необходимо и достаточно выполнение неравенства $0 < \{n \log 2\} < \log 2$. Из равномерной распределенности следует, что вероятность попадания в этот интервал равна $\log 2$.

3) Задача со степенями 2^n и 3^n аналогичным образом сводится к задаче о двух кентаврах.

4) Задача о первых цифрах числа 2^{n^2} сводится к доказательству всюдуплотности множества чисел вида $\{n^2 \log 2\}$, то есть к задаче C1.

5) То же самое, но для множества $\{\log(2)P(n)\}$.

Цикл C

Задача 1C.

1) Рассмотрим последовательность $m_{j(i)}$ такую, что $m_{j(i)}a < 1/n_i^2$ или $1 - 1/n_i^2 < m_{j(i)}a$. Тогда $\{(n_i + m_{j(i)})^2 a\} = \{\{n_i^2 a\} + \{m_{j(i)}^2 a\} + \{2n_i m_{j(i)} a\}\}$ Однако, последнее слагаемое, исходя из неравенства, будет стремиться к нулю или единице. Отсюда сразу получаем утверждение задачи.

2) Пусть a — хорошее число. Если оно рационально, то по предыдущей задаче мы можем домножить его на знаменатель и получить 0 или 1. Если же оно — иррационально, то рассмотрим числа ka они все — хорошие. Из результатов предыдущих задач следует, что ноль — предельная точка множества хороших чисел. Таким образом, можно выбрать последовательность хороших чисел a_i, сходящуюся к нулю. Построим теперь новую последовательность, сходящуюся к нулю следующим образом: исходя из a_1 возьмём число n_1 такое, что $\{n_1 a\}$ отличается от нуля или единицы меньше чем на $1/1$ и одновременно $\{n_1^2 a\}$ отличается меньше чем на $1/1$ от a_1. Теперь возьмём $n_2 > n_1$ такое, что $\{n_2 a\}$ и $\{n_2^2 a\}$ отличаются меньше, чем на $1/2$ от 0 и a_2 соответственно. Аналогично построим и следующие члены последовательности. Нетрудно видеть, что эта последовательность и является искомой.

3) Пусть $k = [\sqrt{c/\varepsilon}]$ Понятно, что c лежит между $\{(kn)^2 a\{$ $\{((k+1)n)^2 a\}$ расстояние между этими числами равно $\{2kn^2 a + n^2 a\{$, что оценивается как $2\sqrt{\varepsilon}\sqrt{c} + \varepsilon < 3\sqrt{\varepsilon}$. Отсюда получаем, что либо k, либо $k+1$ удовлетворяет условию задачи.

4) Очевидно следует из предыдущих двух пунктов.

задача 2C.

1) См. следующий пункт.

2) Поступим аналогично предыдущей задаче. Пусть степень многочлена – d, а старший коэффициент равен a. Назовём число хорошим, если существует последовательность n_i такая, что $\{n_i^d a\}$ сходится к этому числу, в то время как $\forall 0 < h < d \{n_i^h a\} \to 0$ или $\{n_i^h a\} \to 1$. Повторяя рассуждения предыдущей задачи, доказываем, что сумма хороших чисел — хорошее число, а следовательно, 0 или 1 — хорошее число. Тогда мы можем выбрать такое n, что $\forall 0 < h < d + 1 \{n^h a\} < \varepsilon_h$ или $\{n^h a\} > 1 - \varepsilon_h$. После чего мы снова рассматриваем решётку P(kn) и момент, когда точка c попадает между двумя точками этой решётки. Если n достаточно велико, а числа ε_h быстро убывают при уменьшении h то k не больше, чем $\sqrt[d]{c/\varepsilon} + 1$ Осталось заметить, что в таком случае, при переходе от k к $k+1$ $\{P(x)\}$ будет меняться не больше чем на $Q(\varepsilon)$ где Q — многочлен положительной степени от корней различных степеней из ε без свободного члена, а значит, стремится к нулю, при $\varepsilon \to 0$ Следовательно, мы сможем подойти сколь угодно близко к произвольной точке, т.е. последовательность всюду плотна.

3) Пусть q — общий знаменатель всех рациональных коэффициентов многочлена, тогда рассматривая $\{P(nq)\}$ и отбрасывая все заведомо целые слагаемые, мы сведём задачу к предыдущей.

Задача 3C.

Цикл D.

Задача 1D.

Рассмотрим точки, разделяющие круг на сектора и их образы при сдвиге на a в сторону, противоположную движению кентавра. Если рассмотреть n образов граничных точек, то нетрудно видеть, что точки одной дуги между двумя образами соответствуют одной конечной последовательности, а точки разных дуг — разным последовательностям. Так как прыжок кентавра иррационален, то количество различных дуг, на которые делится круг, будет бесконечно расти, следовательно будет бесконечно расти количество различных конечных подпоследовательностей нашей последовательности. Такая последовательность обязана быть непериодичной, так как в периодической последовательности количество различных конечных подпоследовательностей длины, большей длины периода, есть константа (а именно длина периода).

задача 2D.

1) Заметим, что $2^{-1} = 0.5, 2^{-2} = 0.25, 2^{-3} = 0.125, \ldots$. То есть первая цифра числа 5^n равна первой цифре числа $10 \cdot 2^{-n}$, которая определяется попаданием кентавра на соответствующую дугу при сдвиге на $1 - \log 2$ (см. B5), то есть прыжками в обратную сторону. Отсюда видно, что множества конечных подслов слова W и подслов W', записанных в обратном порядке, совпадают.

2) Доказательство повторяет рассуждения D1.

3) Количество подслов длины k равно количеству различных секторов, на которые разбивают окружность образы граничных точек $(0, \log 2, \log 3, \ldots)$ при сдвигах на $-na$, $n = 0, 1, \ldots k$. Поскольку $a = \log 2$, то у 0 и $\log 2$ всего в сумме $k+1$ прообраз, у остальных 8 точек все прообразы различны, значит всего различных секторов $8k + k + 1 = 9k + 1$.

4) Непериодичность последовательности первых цифр 2^{n^2} следует из доказательства пункта 1 и того факта, что последовательность $\{n^2 \log 2\}$ всюду плотна.

Задача 3D.

Задача 4D.

Рассмотрим предельную точку такого множества и ее произвольную окрестность U. В этой окрестности лежит точка x с существенной эволюцией V, в окрестности точки x, принадлежащей U, есть открытое множество точек с эволюцией V, значит, V-существенная эволюция предельной точки и множество всех точек с заданной эволюцией замкнуто.